

## ЭКОНОМИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 330.4

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКИ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ (ИЛИ О ФОРМИРОВАНИИ НЕЕВКЛИДОВОЙ ЭКОНОМИКИ И НЕЕВКЛИДОВОЙ СТАТИСТИКИ)

*д-р экон. наук, проф. К.В. ПАВЛОВ*

*(Камский институт гуманитарных и инженерных технологий, Ижевск, Россия)*

*Обосновывается целесообразность более широкого использования в разнообразных экономико-математических моделях неевклидовой метрики в целях упрощения математического выражения самих моделей и облегчения решения связанных с ними задач, а также для выявления с помощью моделей тенденций и закономерностей социально-экономического развития на разных уровнях управленческой иерархии.*

**Ключевые слова:** *неевклидова геометрия, метрика, неевклидова экономика, производственные функции, экономико-математические модели, неевклидова статистика.*

В последнее время при изучении социально-экономических процессов широко используются математические и инструментальные методы исследования. Уже первые опыты экономико-математического моделирования (например, использование производственной функции Кобба – Дугласа более ста лет назад) дали высокий результат в процессе исследования и поиска резервов повышения эффективности системы общественного воспроизводства.

Однако, как показывает анализ, в качестве теоретико-методологической основы, базиса разработки экономико-математических моделей, как правило, используется только лишь евклидова метрика, и прежде всего категория евклидова  $n$ -мерного пространства (в основном двух- или трехмерного, однако если местоположение точки определяется  $n$ -координатами, речь идет об  $n$ -мерном евклидовом пространстве). На наш взгляд, такое решение вполне оправданно. Но при разработке экономико-математических моделей в принципе можно основываться и на ином теоретическом базисе, а именно, использовать неевклидову метрику. В этой связи следует уточнить, о чем идет речь.

Евклидово пространство – это пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. Кроме этого, это векторное пространство над полем действительных чисел, в котором каждой паре векторов ставится в соответствие действительное число, называемое скалярным произведением этих векторов. Здесь также вводится понятие ортогональности: ортогональными считаются векторы, если их скалярное произведение равно нулю.

К неевклидовым геометриям относятся все геометрические системы, отличные от геометрии Евклида. Среди неевклидовых геометрий особое значение имеют геометрия Лобачевского и геометрия Римана (в честь великих математиков Н.И. Лобачевского и Б. Римана, впервые сообщивших о своих открытиях соответственно в 1826 и в 1854 годах) [1]. Причем геометрия Лобачевского – первая в историческом аспекте геометрическая система, отличная от геометрии Евклида, а также первая более общая, включающая евклидову геометрию как крайний, предельный случай. На наш взгляд, неевклидова метрика также может быть использована при разработке различных экономико-математических моделей. Более того, в ряде случаев она может оказаться более эффективной, чем евклидова метрика – как в математическом аспекте (например, позволяя существенно упростить математический вид модели или облегчить решение связанной с ней задачи), так и в экономическом плане (скажем, для выявления глубинных тенденций и закономерностей социально-экономического развития, для определения скрытых эффектов и явлений в системе общественного воспроизводства). Данную сферу экономики условно можно назвать *неевклидовой экономикой* (более того, сказанное выше вполне применимо и к определенной группе экологических моделей, особенно эколого-экономических). Чтобы было более понятным, о чем идет речь, рассмотрим данную проблему подробнее.

В используемых в настоящее время в процессе исследования различных воспроизводственных процессов экономико-математических моделях практически постоянно применяется метрика, основанная на применении декартовой системы координат, т.е. прямоугольной системы координат в евклидовом пространстве. Под метрикой понимается расстояние между двумя элементами  $a$  и  $b$  множества  $A$  – это действительная числовая функция  $c(a, b)$ , удовлетворяющая следующим трем условиям: 1)  $c(a, b) \geq 0$ , причем  $c(a, b) = 0$  тогда и только тогда, когда  $a = b$ ; 2)  $c(a, b) = c(b, a)$ ; 3)  $c(a, b) + c(b, c) \geq c(a, c)$ .

Под евклидовым пространством понимается векторное пространство  $E$  над полем действительных чисел, в котором каждой паре векторов  $a$  и  $b$  из  $E$  ставится в соответствие действительное число, называемое скалярным произведением  $(a, b)$  этих векторов [2]. Через скалярное произведение в евклидовом пространстве определяются длины этих векторов и угол между ними, а также вводится понятие ортогональности (перпендикулярности) между векторами: они ортогональны в том случае, если их скалярное произведение равно нулю. При этом в экономических исследованиях наиболее часто используется множество всех векторов плоскости (т.е. двухмерного) или трехмерного пространства евклидовой геометрии с обычным скалярным произведением, однако в отдельных случаях применяют и более общую модель, основанную на евклидовом  $n$ -мерном пространстве (т.е. конечномерное векторное пространство над множеством действительных чисел, в котором скалярное произведение векторов  $a = (a_1, \dots, a_n)$  и  $b = (b_1, \dots, b_n)$  определяется формулой  $(a, b) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$ ).

Выше нами упоминалась декартова система координат в евклидовом пространстве. В этой связи целесообразно напомнить, что общая декартова система координат, называемая также аффинной системой координат, задается точкой  $O$  (начало координат) и упорядоченной системой приложенной к этой точке « $n$ » неколлинеарных (непараллельных) векторов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , называемых также базисными векторами. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат данной декартовой системы координат. В экономико-математических моделях чаще всего ограничиваются двумерным случаем (т.е. плоскостью) и тогда эти оси называются осью абсцисс и осью ординат (в случае трехмерного пространства добавляется третья ось аппликат).

При анализе воспроизводственных процессов и явлений в основном используют прямоугольную декартову систему координат. В этом случае базисные векторы ортонормированы, т.е. взаимно перпендикулярны и по длине равны единице [3]. Однако вполне возможно, на наш взгляд, также и использование косоугольной декартовой системы координат, отличающейся от прямоугольной тем, что угол между единичными базисными векторами не является прямым. При использовании производственных функций, особенно с переменной эластичностью замещения производственных факторов, переход по известным математическим формулам от одной декартовой системы косоугольных координат к другой системе координат позволит наилучшим образом упростить математический вид такого рода производственных функций, что наверняка приведет не только к более широкому их использованию в обозримом будущем, но и позволит выявить скрытые тенденции и закономерности социально-экономического развития на разных уровнях управленческой иерархии.

Таким образом, использование косоугольных координат при изучении социально-экономических процессов может стать важным дополнением к традиционному применению прямоугольных декартовых координат в системе экономико-математического моделирования. Однако данная форма обобщения не только не является единственной, но и далеко не самой важной. На наш взгляд, гораздо более перспективным направлением обобщения, имеющим значительные внутренние резервы упрощения как самих моделей, так и расширение возможностей их использования в экономическом анализе, является применение подходов неевклидовой математики.

Здесь следует уточнить, что к неевклидовым геометриям относят все геометрические системы, отличные от геометрии Евклида. Среди них особое значение имеют геометрия Лобачевского и геометрия Римана. Геометрия Лобачевского является первой геометрической системой, отличной от геометрии Евклида. Она же является и первой более общей теорией, включающей евклидову геометрию как предельный случай. Позднее, открытая Б. Риманом геометрия, названная его именем, в некоторых отношениях противоположна геометрии Лобачевского, однако вместе с тем геометрия Римана служит для последней необходимым дополнением. Напомним, что если в геометрии Евклида к любой данной прямой через точку, лежащую вне этой прямой, можно провести только одну параллельную ей прямую, то в геометрии Лобачевского такого рода параллельных прямых через эту точку можно провести бесчисленное множество, а в геометрии Римана – ни одной, т.е. в этом случае все прямые на плоскости обязательно пересекаются.

Для экономико-математического моделирования важно то, что в неевклидовых геометриях метрические отношения существенно отличаются от метрических пропорций, характерных для евклидова пространства. В этой связи заметим, что по аналогии с поверхностью в евклидовом пространстве в неевклидовой плоскости также могут быть введены внутренние координаты  $U, V$  таким образом, что дифференциал  $dS$  дуги кривой, соответствующий дифференциалам  $dU$  и  $dV$  координат, определяется равенством

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

где  $E, F, G$  – коэффициенты.

Для евклидовой плоскости это равенство преобразуется следующим образом:

$$dS^2 = du^2 + dv^2.$$

Для плоскости Лобачевского общая формула оценки дифференциальных свойств плоскости будет иметь вид

$$dS^2 = du^2 + ch^2 \left( \frac{u}{R} \right) dv^2.$$

Для плоскости Римана

$$dS^2 = du^2 + \cos^2 \left( \frac{u}{R} \right) dv^2.$$

Здесь  $R$  – радиус кривизны анализируемой поверхности (заметим, что при  $R = \infty$ , т.е. при стремлении радиуса кривизны к бесконечности, каждое из двух последних равенств дает метрическую форму евклидовой плоскости).

Полученные результаты можно использовать в процессе математических преобразований в различных экономических моделях, в частности в теории производственных функций [4].

Так, даже простейший вариант – двухфакторная производственная функция  $P = f(C, T)$ , например производственная функция Кобба – Дугласа

$$P = A \cdot C^\lambda \cdot T^{1-\lambda},$$

где  $P$  – результаты производства;  $C$  – затраты капитала;  $T$  – затраты труда;  $A$  – коэффициент масштаба;  $\lambda$  – показатель степенной функции), при использовании вышеуказанных формул, характерных для неевклидовых геометрических систем, приобретет вид, в котором тот или иной фактор (труд или капитал) получит большее значение (типа весовых коэффициентов) по сравнению с другим фактором в зависимости от реальных хозяйственных условий.

Все это позволит расширить возможности математического описания реальных производственных ситуаций и различных хозяйственных условий, в том числе в зависимости от различных пропорций производственных факторов. Разумеется, данный подход может быть использован и в более сложных случаях применения производственных функций, например, когда кроме факторов труда и капитала в этих функциях используются также фактор научно-технического прогресса и земельный фактор, а также в случае применения производственных функций с переменной эластичностью замещения факторов. На наш взгляд, использование метрических соотношений неевклидовых геометрий позволит также более глубоко изучить явление эффекта от масштаба (в производственных функциях он количественно характеризуется коэффициентом  $A$ ), а значит, изучить также и тенденции, характеризующие рост концентрации и централизации производства и капитала.

Возможно, неевклидовы метрические соотношения можно использовать (например, в целях упрощения математического вида модели) при решении оптимизационных задач нелинейного программирования. Например, в процессе использования одного из наиболее популярных методов нелинейного программирования – метода штрафных функций. Как известно, этот метод позволяет свести задачу нелинейного программирования с ограничениями к задаче нелинейного программирования без ограничений путем формирования штрафной функции, образующейся из целевой функции задачи путем вычитания «штрафов» за нарушение ее ограничений, причем чем выше штрафы, тем ближе задача максимизации штрафной функции к исходной задаче.

Процесс решения задачи нелинейного программирования складывается из нескольких этапов, на каждом из которых решается задача линейного или квадратичного программирования, т.е. решается более простой вариант задачи или ее части. Математическое выражение штрафных функций, на наш взгляд, может быть упрощено при правильном использовании неевклидовой метрики. Это возможно и в случае разработки оптимальной стратегии в теории игр [5]. Применимо это также в функциях спроса и в функциях предложения.

Таким образом, при анализе различных проблем, связанных с функционированием системы производственных отношений на основе использования разнообразных экономико-математических моделей, наряду с традиционным применением декартовой прямоугольной системы координат в евклидовом пространстве во многих случаях более эффективным оказывается использование математических моделей, сконструированных на основе применения неевклидовой метрики. Все это позволит не только упростить математическое выражение используемых моделей, но и на их основе обнаружить скрытые тенденции

и закономерности развития воспроизводственных систем. Данная сфера экономической науки названа нами *неевклидовой экономикой*.

Как уже отмечалось выше, широкие возможности использования неевклидовой метрики, на наш взгляд, имеются и в отношении применения математических моделей, используемых в экологической сфере, т.е. при изучении экологических процессов и явлений. Результаты развития неевклидовой математики можно использовать и при осуществлении разнообразных статистических исследований в эколого-экономической области, например, при осуществлении дисперсионно-регрессионного анализа.

Таким образом, направления и формы развития неевклидовой математики весьма многочисленны и разнообразны, что свидетельствует о целесообразности её использования и дальнейшего её развития в системе экономического моделирования. Более того, все это может повлиять на развитие самих неевклидовых геометрий подобно тому, как и еще при жизни Н.И. Лобачевского его геометрические изыскания повлияли на развитие теории интегральных и дифференциальных уравнений [6], а эта теория, в свою очередь, оказала позитивное обратное воздействие на развитие неевклидовой геометрии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мир математики : в 45 т. ; пер. с исп. – М. : Де Агостини, 2014. – Т. 36 : Висенте Муньос. Деформируемые формы. Топология. – 176 с.
2. Ефимов, Н.В. Высшая геометрия / Н.В. Ефимов. – 6-е изд. – М. : Высш. шк., 1978. – 482 с.
3. Математика : энциклопедия ; под ред. Ю.В. Прохорова. – М. : Большая Рос. энцикл., 2003. – 845 с.
4. Браун, М. Теория и измерение технического прогресса / М. Браун ; пер. с англ. – М. : Статистика, 1981. – 147 с.
5. Петросян, Л.А. Теория игр : учеб. пособие для ун-тов / Л.А. Петросян, Н.А. Зинкевич, Е.А. Селина. – М. : Высш. шк., 1998. – 304 с.
6. Мир математики : в 45 т. ; пер. с исп. – М. : Де Агостини, 2014. – Т. 4 : Жуан Гомес. Когда кривые искривляются. Неевклидовы геометрии. – 160 с.

*Поступила 19.04.2018*

#### USE OF NEUVKLIDIC METRICS IN ECONOMIC AND MATHEMATICAL AND STATISTICAL STUDIES (OR FOR THE FORMATION OF THE NEUVILID ECONOMY AND NON-CURRENT STATISTICS)

**K. PAVLOV**

*In article the expediency of wider use is proved in various economic-mathematical models of a non-Euclidean metrics for simplification of mathematical expression of models and simplification of the solution of the related tasks and also for identification by means of models of tendencies and regularities of social and economic development at the different levels of administrative hierarchy.*

**Keywords:** *non-Euclidean geometry, metrics, non-Euclidean economy, production functions, economic-mathematical models, non-Euclidean statistics.*