

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»

В. П. Подшивалов

# ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ

## СФЕРОИДИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Учебно-методический комплекс  
для студентов специальности 1-56 02 01 «Геодезия» и слушателей ИПК  
УО «ПГУ» специальности 1-56 02 71 «Прикладная геодезия  
и геодезическое обеспечение кадастра»

Новополоцк  
ПГУ  
2010

УДК 528.23(075.8)

ББК 26.11я73

П44

Рекомендовано к изданию методической комиссией  
геодезического факультета в качестве учебно-методического  
комплекса (протокол № 44 от 22.04.2009)

#### РЕЦЕНЗЕНТЫ:

кафедра геодезии и фотограмметрии учреждения образования  
«Белорусская государственная сельскохозяйственная академия»;  
доктор технических наук, профессор кафедры прикладной геодезии  
и фотограмметрии В. И. МИЦКЕВИЧ

#### **Подшивалов, В. П.**

П44

Высшая геодезия : сфероидическая геодезия, теоретическая геодезия :  
учеб.-метод. комплекс / В. П. Подшивалов. – Новополоцк : ПГУ, 2010. –  
192 с.

ISBN 978-985-531-055-7.

Разработан на основе образовательного стандарта РД РБ 2100.5.201-98. Приведены темы изучаемого курса, лекционных и лабораторных занятий, их объем в часах.

Изложена геометрия эллипсоида вращения, вывод параметров земного эллипсоида как основной координатной поверхности в геодезии. Рассмотрены основные методы определения параметров земного эллипсоида и установления общеземных и государственных (референсных) систем координат, пути и методы решения геодезических задач на поверхности земного эллипсоида, основы формирования систем декартовых координат на основе теории конформного отображения поверхностей. Изложены теоретические основы и методы решения редуцированной проблемы высшей геодезии, методы уравнивания обширных геодезических построений на поверхности эллипсоида.

Предназначен для студентов специальности 1-56 02 01 «Геодезия» и слушателей ИПК УО «ПГУ» специальности 1-56 02 71 «Прикладная геодезия и геодезическое обеспечение кадастра». Будет полезен магистрантам и аспирантам, занимающимся проблемами формирования баз картографо-геодезических данных в современных условиях.

**УДК 528.23(075.8)**

**ББК 26.11я73**

**ISBN 978-985-531-055-7**

© Подшивалов В. П., 2010  
© УО «Полоцкий государственный университет», 2010

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Разделы «Сфероидическая геодезия» и «Теоретическая геодезия» являются завершающими в изучении дисциплины «Высшая геодезия» и формируют теоретические основы профессиональных знаний инженера-геодезиста.

В данных разделах изучают системы координат на земной поверхности. Важное место занимают вопросы редуцирования измерений на координатные поверхности, а также исследование различий геометрических и физических параметров нормальной и реальной Земли. В последние годы для решения задач высшей геодезии все шире используются технологии, основанные на спутниковых системах позиционирования *NAVSTAR* (США) и *ГЛОНАСС* (РФ).

В разделе «Сфероидическая геодезия» рассмотрены параметры координатной поверхности – земного эллипсоида и связь между ними, системы координат, применяющиеся для решения задач высшей геодезии. В связи с развитием методов геодезии, основанных на спутниковых системах позиционирования, детально рассмотрены геоцентрические системы пространственных прямоугольных координат, а также их связь с эллипсоидальными координатами. Детально рассматриваются вопросы, связанные с изучением геометрии земного эллипсоида, классификация кривых на этой поверхности и решение задач по вычислению длин дуг меридианов и параллелей, а также размеров рамок трапеций топографических карт. Выводится система дифференциальных уравнений для геодезической линии эллипсоида и первый интеграл этой системы – уравнение Клеро, лежащие в основе решения самых различных геодезических задач.

В связи с тем, что основным видом геодезических построений являются треугольники триангуляции или трилатерации, рассмотрены методы их решения с использованием теоремы Лежандра и способа аддитаментов, широко применяющиеся на производстве. Приводится обоснование условий, когда эти методы обеспечивают необходимую точность для решения как практических, так и научных задач геодезии.

Подробно рассмотрены методы решения главной геодезической задачи на поверхности земного эллипсоида как на малые расстояния, что широко используется при вычислениях в государственных геодезических построениях, созданных классическими методами, так и на любые (до 20 000 км) расстояния, что актуально в современных условиях при решении геодезических задач с использованием спутниковых технологий.

Изложена теория конформных отображений поверхностей и приводятся выводы основных формул для решения геодезических задач с применением наиболее распространенных в мире геодезических проекций в их классическом представлении. Также приведена общая теория описания класса проекций, наиболее подходящих для координатного описания объектов автоматизированных информационных технологий.

В разделе «Теоретическая геодезия» приведены основы знаний по физическим параметрам реальной и нормальной модели Земли, нормальном, реальном и возмущающем потенциале силы тяжести и их использовании при решении редуцированной проблемы высшей геодезии. Приводятся выводы основных методов определения уклонов отвеса, которые являются основными геометрическими характеристиками аномального гравитационного поля Земли.

Рассмотрена проблема неоднозначности передачи измеренных высот на большие расстояния. Обосновано применение, приводятся формулы для вычислений системы геопотенциальных высот, передача которых не зависит от пути нивелирования и которые применяются при создании высотной основы государства.

Рассмотрена проблема редуцирования геодезических и астрономических измерений с физической поверхности Земли на поверхность земного эллипсоида, приводятся расчеты значимости различных поправок и необходимость их учета в различных условиях.

Рассмотрены основные методы установления параметров общего земного эллипсоида, включая современные, а также методы установления исходных геодезических дат государства на поверхности референц-эллипсоида.

Рассмотрены основные методы уравнивания измерений в государственной геодезической сети, лежащих в основе поддержания государственных систем координат на поверхности земного эллипсоида.

В связи с бурным развитием и внедрением в геодезическую науку и практику современных измерительных технологий рассмотрены методы установления различных систем координат и связь между ними.

Приведены основные математические формулы, которые наиболее часто применяются при рассмотрении теоретического материала.

**Цель преподавания дисциплины:** сформировать у будущего специалиста профессиональные знания в области высшей геодезии, привить навыки и умения по формированию и практическому использованию баз данных для решения задач геодезического обеспечения различных отраслей хозяйственной деятельности государства.

### **Задачи изучения дисциплины:**

#### **Студент должен освоить:**

- методы построения государственных геодезических сетей;
- методы определения параметров земного эллипсоида и исходных геодезических дат;
- системы координат, применяемые для решения задач высшей геодезии;
- методы формирования систем плоских декартовых координат.

#### **Студент должен уметь:**

- анализировать характеристики отступлений реальной и нормальной Земли;
- выполнять редукционные вычисления;
- решать геодезические задачи на поверхности земного эллипсоида и плоскости геодезической проекции;
- использовать геопотенциальные высоты;
- пользоваться базами геодезических данных и выполнять их анализ;
- выполнять преобразования систем координат;
- пользоваться программными пакетами для обработки, анализа измерений на ЭВМ.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

по дисциплине «**Высшая геодезия**», разделы «**Сфероидическая геодезия**», «**Теоретическая геодезия**» для специальности **1-56 02 01 «Геодезия»**

### **Виды занятий и форма контроля занятий**

Виды занятий	Форма обучения	
	дневная	заочная
Курс	4	5
Семестр	7, 8	9, 10
Лекций, ч	64	16
Экзамен (семестр)	7, 8	10
Зачет (семестр)	-	10
Лабораторные занятия, ч	50	16
Расчетно-графические работы	7, 8	-
Контрольные работы (семестр)	-	9, 10
Управляемая самостоятельная работа (часы)	82	41

**Перечень дисциплин с указанием разделов (тем), усвоение которых студентами необходимо для изучения данной дисциплины**

№№ пп	Название дисциплины	Раздел, темы
1.	Высшая математика	Дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальная геометрия, разложение функций в ряды, линейная алгебра.
2.	Теория математической обработки геодезических измерений	Законы распределения случайных величин, предельные теоремы теории вероятностей и математической статистики, вероятно-статистическое обоснование метода наименьших квадратов. Теория и применение параметрического и корреляционного способов уравнительных вычислений.
3.	Высшая геодезия, раздел «Основные геодезические работы».	Приборы и принципы геодезических измерений.
4.	Информатика	Алгоритмические языки программирования, стандартные программные пакеты, профессиональные программные пакеты для обработки и представления на ЭВМ баз геодезических данных
5.	Гравиметрия	Нормальный, реальный и возмущающий потенциалы силы тяжести. Гравиметрический вывод уклонений отвеса.
6.	Геодезическая астрономия	Основы сферической тригонометрии. Методы астрономических определений координат.

**ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС**

№№ пп	Название темы	Содержание	Объем в часах
<b>Четвертый курс, седьмой семестр</b>			
1	Введение в сфероидическую геодезию	Основные термины и определения. Предмет и задачи высшей геодезии. Параметры земного эллипсоида и связь между ними.	2
2.	Системы координат высшей геодезии	Координаты на меридианном эллипсе и связь между ними. Пространственные прямоугольные координаты.	2

3.	Геометрия земного эллипсоида	Классификация кривых на поверхности. Координатные линии на поверхности эллипсоида.	2
		Радиусы кривизны меридиана, первого вертикала и параллели.	2
		Радиус произвольного нормального сечения. Средний радиус кривизны эллипсоида в данной точке.	2
		Длина дуги меридиана и параллели. Размеры рамок трапеций топографических карт.	2
		Система дифференциальных уравнений геодезической линии. Уравнение Клеро для геодезической линии земного эллипсоида.	2
4.	Решение сфероидических треугольников	Общие сведения о решении треугольников. Теорема Лежандра.	2
		Порядок решения треугольников триангуляции и трилатерации по теореме Лежандра. Способ аддитаментов. Порядок решения треугольников триангуляции и трилатерации по способу аддитаментов.	2
5.	Главная геодезическая задача на поверхности эллипсоида	Общие сведения о решении главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида. О точности вычислений при решении главной геодезической задачи. Пути и методы решения главной геодезической задачи.	2
		Разложение разностей широт, долгот и азимутов в ряды с «начальными аргументами».	2
		Ряды со «средними аргументами».	2
		Порядок решения прямой геодезической задачи на малые расстояния. Порядок решения обратной геодезической задачи на малые расстояния.	2
		О способе Бесселя для решения главной геодезической задачи. О современных требованиях к решению главной геодезической задачи на любые расстояния.	2
<b>Всего лекций за седьмой семестр</b>			<b>28 часов</b>
<b>Четвертый курс, восьмой семестр</b>			
6.	Геодезические проекции	Общие сведения из теории отображения поверхностей. Классификация проекций.	2
		Основные численные характеристики геодезических проекций.	2
		Проекция Гаусса – Крюгера. Прямая задача в проекции Гаусса – Крюгера.	2
		Обратная задача в проекции Гаусса – Крюгера. Масштаб изображения и его вычисление.	2

		Сближение меридианов и его вычисление. Редуцирование расстояний и горизонтальных направлений в проекции Гаусса – Крюгера. Контроль редуцированных вычислений.	2
		Преобразование координат из зоны в зону проекции Гаусса – Крюгера. Из общей теории описания геодезических проекций. Связь между различными проекциями.	2
		О современных требованиях к геодезическим проекциям. Проекция геоинформационных систем. Пути минимизации искажений.	2
		Критерий Чебышева о наилучших проекциях и пути его реализации. Композиционные геодезические проекции.	2
7.	Основы теории потенциала силы тяжести	Задачи теоретической геодезии. Краткая история развития методов изучения фигуры Земли. Основы теории потенциала силы тяжести. Уравнения Лапласа и Пуассона.	2
		Теорема Клеро. Нормальный и возмущающий потенциал силы тяжести. Аномалии силы тяжести.	2
8.	Уклонения отвесных линий	Общие сведения об уклонениях отвеса. Астрономо-геодезический, астрономо-гравиметрический выводы уклонений отвеса. Топографические и топографо-изостатические уклонения отвеса.	2
9.	Системы геопотенциальных высот	Проблема неоднозначности в передаче высот. Геопотенциал и его связь с высотой. Приближенные и ортометрические высоты.	2
		Нормальные и динамические высоты.	2
10.	Редуцированная проблема	Сущность проблемы и пути ее решения. Уравнение Лапласа для геодезических азимутов. Влияние уклонений отвеса на измеренные зенитные расстояния.	2
		Редуцирование базисных и светодальномерных линейных измерений. Редуцирование измеренных горизонтальных направлений.	2
11.	Методы определения координатных систем	Общие сведения о методах градусных измерений. Уравнения градусных измерений по меридиану и параллели. Метод площадей. Исходные геодезические даты и методы их установления.	2
12.	Уравнивание обширных государственных геодезических сетей	Постановка задачи и пути ее решения. Полигональное уравнивание астрономо-геодезической сети 1 класса. Современное уравнивание астрономо-геодезической сети 1 – 2 классов.	2
13.	Методы установления связи систем координат. Заключение.	Референционные системы координат СК-42 и СК-95. Общеземные системы координат ПЗ-90 и WGS-84. Параметры связи систем координат.	2
<b>Всего лекций за восьмой семестр:</b>			<b>36 часов</b>
<b>Итого лекций по дисциплине:</b>			<b>64 часа</b>

## ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ, ИХ ОБЪЕМ В ЧАСАХ

№№ пп	Наименование	Объем в часах
1.	Длина дуги меридиана и параллели. Размеры рамок трапеций топографических карт.	2
2.	Решение геодезических треугольников	4
3.	Решение главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида	6
4.	Решение задач проекции Гаусса – Крюгера	16
5.	Редуцирование измерений в геодезической сети 1 класса на поверхность эллипсоида и плоскость геодезической проекции	10
6.	Установление связи систем координат	10
<b>Всего лабораторных занятий:</b>		<b>48 часов</b>

# ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

## СФЕРОИДИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

### ВВЕДЕНИЕ

Основными задачами высшей геодезии являются:

– создание системы опорных точек на земной поверхности и в околоземном пространстве, взаимное положение которых определено в принятой системе координат с точностью, необходимой и достаточной для решения научных и практических задач;

– изучение формы, размеров и внешнего гравитационного поля Земли.

Решение этих задач производится теоретически обоснованными методами математической обработки результатов астрономических, геодезических, гравиметрических и спутниковых измерений.

Методы построения государственных геодезических построений на основе измерений и математической обработки их результатов рассматриваются в первой части курса высшей геодезии (основные геодезические работы, математическая обработка измерений в государственных геодезических построениях), а также в таких специальных дисциплинах, как геодезическая астрономия, гравиметрия, оптико-электронные методы измерений, космические технологии в геодезии. Государственные геодезические построения рассчитаны как для получения надежной информации для изучения формы и размеров Земли, так и для создания координатной основы топографических съемок и инженерно-геодезического обеспечения различных отраслей хозяйственной деятельности.

С развитием геодезических методов определения координат искусственных спутников Земли (ИСЗ) появились возможности высокоточного пространственно-временного описания уравнений их орбит. Это послужило базой развития принципиально новых методов определения геодезических координат методом пространственной засечки, основанных на спутниковых системах позиционирования, когда носителями координат в режиме реального времени являются ИСЗ. Спутниковые методы реализованы в приемниках, работающих в системах *NAVSTAR-GPS* (США) и *ГЛО-НАСС* (РФ), позволяют решать комплекс задач высшей геодезии с точностью, на порядок выше, в существенно более сжатые сроки по сравнению с классическими наземными методами.

В связи с этим коренным образом меняются требования к математическим методам решения задач высшей геодезии и их точности. Алгорит-

мы вычислений при решении этих задач должны быть удобны для реализации на ЭВМ.

Для того чтобы иметь представление о точностных характеристиках построения государственной геодезической основы методами триангуляции, полигонометрии и трилатерации 1 – 2 классов, напомним величины средних квадратических ошибок геодезических измерений:

относительные ошибки линейных величин	1 : 500 000 – 1 : 300 000
измерений горизонтальных углов	0.7 – 1.0 <sup>''</sup>
определений астрономических широт и долгот	0.3 – 0.5 <sup>''</sup>
определений астрономических азимутов	0.5 – 0.7 <sup>''</sup>
определений абсолютных значений ускорения силы тяжести	0.1 – 0.5 мгл
определений относительных значений ускорения силы тяжести	0.05 – 0.5 мгл

Система геодезических координат 1942 года (СК0-42), введенная на территории Советского Союза с 1946 года Постановлением Правительства, была закреплена на земной поверхности центрами порядка 6 000 пунктов триангуляции 1 класса, объединенных в 87 полигонов и отнесенных к поверхности референц-эллипсоида Красовского. Параметры референц-эллипсоида Красовского установлены из градусных измерений, выполненных в мире к 40-м годам XX столетия, и составляют: большая полуось  $a = 6\,378\,245$  м, полярное сжатие  $\alpha = 1 : 298.3$ . Его ориентировка в теле Земли определена исходными геодезическими датами, выведенными из градусных измерений, выполненных только на территории Советского Союза, для центра главного астрономо-геодезического пункта в Пулковской обсерватории.

К концу XX столетия выполнено уравнивание астрономо-геодезической сети (АГС) 1 – 2 классов на территории бывшего Советского Союза, включающей в себя 277 полигонов первого класса и порядка 164 000 пунктов 1 – 2 классов. Центры этих пунктов закрепляют на земной поверхности референцную систему геодезических координат 1995 года (СК-95), введенную Постановлением Правительства на территории Российской Федерации с 1 июля 2002 года. Фрагмент АГС 1 – 2 классов на территории Республики Беларусь представлен более чем 2 500 пунктами, координаты центров которых получены в СК-95. Координатной поверхностью в СК-95 является эллипсоид Красовского с исходными геодезическими датами в Пулково.

Для геодезического обеспечения навигации и решения глобальных задач в настоящее время используют общеземные системы координат *WGS-84* (США) и *ПЗ-90* (РФ), полученные независимо друг от друга по результатам наблюдений геодезических, геодинамических и навигационных ИСЗ, а также по наземным гравиметрическим данным. Параметры этих систем координат совпадают в пределах точности их определения.

Для системы *ПЗ-90* в качестве координатной принята поверхность земного эллипсоида с параметрами: большая полуось  $a = 6\,378\,136$  м, полярное сжатие  $\alpha = 1 : 298.257\,839$ . В системе *WGS-84* – соответственно:  $a = 6\,378\,137$  м,  $\alpha = 1 : 298.257\,224$ .

## 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЗАДАЧИ СФЕРОИДИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Основной задачей геодезии является определение взаимного положения точек земной поверхности и околоземного пространства в соответствующей системе координат. В качестве координатной поверхности в геодезии принимается поверхность **земного эллипсоида** (геометрическая модель Земли). Под земным эллипсоидом понимают поверхность эллипсоида вращения, форма и размеры которого определяются из совместной математической обработки астрономических, гравиметрических и геодезических измерений, выполненных на физической поверхности Земли. Под физической моделью Земли понимают **геоид**, тело которого ограничено гладкой, всюду выпуклой поверхностью, в каждой точке которой вектор силы тяжести является нормалью, а поле силы тяжести имеет характеристики, идентичные характеристикам поля силы тяжести реальной Земли (**реальное гравитационное поле**). Характеристики этого поля получают из гравиметрических измерений.

В зависимости от ориентировки в теле Земли, различают **общий земной эллипсоид**, ось вращения и плоскость экватора которого совпадают с осью вращения и плоскостью экватора реальной Земли на некоторую эпоху. Поверхность общего земного эллипсоида наилучшим образом подходит ко всей поверхности геоида. Если поверхность эллипсоида ориентируется в теле Земли так, чтобы наилучшим образом подходить к некоторой части поверхности геоида, например, на территории отдельного государства или группы государств, такой эллипсоид называют **референц-эллипсоидом**. Ориентировка поверхности референц-эллипсоида производится установлением исходных геодезических дат для центра геодезического пункта, который является исходным для всей государственной геодезической сети. Ось вращения и плоскость экватора референц-эллипсоида параллельны оси вращения и плоскости экватора реальной Земли на некоторую эпоху. Земной эллипсоид с принятыми физическими характеристиками называют **Нормальной Землей**, формирующей **нормальное гравитационное поле**, характеристики которого получают из вычислений. Разности ускорений силы тяжести в реальном и нормальном полях определяют **аномальное гравитационное поле**. Геометрическими характеристиками

этого поля служат величины, характеризующие непараллельность поверхностей геоида и земного эллипсоида – **уклонения отвеса** и высоты поверхности геоида над эллипсоидом – **аномалии высот**.

При решении задач сфероидической геодезии принимают основные параметры земного эллипсоида – большую полуось  $a$  и полярное сжатие  $\alpha$  точными величинами и поэтому все вычисления, связанные с решением тех или иных задач на поверхности эллипсоида, выполняют с необходимой точностью. Методы определения параметров земного эллипсоида, установления систем координат на его поверхности, а также изучение аномального гравитационного поля с целью редуцирования измерений с физической поверхности Земли на поверхность эллипсоида рассматриваются в теоретической (физической) геодезии.

При решении задач сфероидической геодезии считают параметры земного эллипсоида как координатной поверхности установленными, а измерения редуцированными с точностью, необходимой и достаточной. Положение точек определяется **пространственными геодезическими координатами**: широтой  $B$ , долготой  $L$ , высотой  $H$ . **Геодезической широтой** точки называется угол, образованный нормалью к поверхности эллипсоида с плоскостью его экватора, **геодезической долготой** – двугранный угол, образованный меридианом данной точки с меридианом, принятым за начальный, **геодезической высотой** – отрезок нормали к поверхности эллипсоида. **Геодезическим меридианом** называется геометрическое место точек равных долгот, он получается как линия пересечения поверхности эллипсоида плоскостью, содержащей в себе ось его вращения, **геодезической параллелью** называется геометрическое место точек равных широт, получается как линия пересечения поверхности эллипсоида плоскостью, проведенной перпендикулярно оси его вращения. Все меридианы земного эллипсоида – эллипсы, а параллели – окружности. Параллель наибольшего радиуса называется **геодезическим экватором**. При решении геодезических задач с применением спутниковых систем позиционирования, когда носители координат – ИСЗ могут находиться на значительных высотах над эллипсоидом, широкое применение нашли **системы пространственных прямоугольных координат  $(X, Y, Z)$** , центр которых совпадает с геометрическим центром земного эллипсоида, оси абсцисс и ординат лежат в плоскости экватора, образуя правую систему координат, ось аппликат совпадает с осью вращения эллипсоида.

В сфероидической геодезии используется также система полярных координат – азимуты геодезических линий и их длины (геодезические азимуты и расстояния на поверхности эллипсоида), которые получают путем редуцирования на поверхность эллипсоида результатов угловых и ли-

нейных измерений. **Геодезическим азимутом** направления в данной точке называется угол, образованный геодезической линией и геодезическим меридианом данной точки. Сфероидическая геодезия решает задачи определения взаимного положения точек на поверхности земного эллипсоида, используя его геометрию, связь между системами координат.

Для массовых геодезических работ, особенно в практических приложениях геодезических данных, системы координат на поверхности эллипсоида неудобны, решение задач трудоемко, поэтому в сфероидической геодезии также решаются задачи отображения поверхности земного эллипсоида на плоскости по математическим законам в **геодезической проекции** с целью установления системы плоских прямоугольных и полярных координат.

При решении задач сфероидической геодезии принципиально важными являются вопросы необходимой точности вычислений. Здесь недопустимо наложение ошибок вычислений на ошибки измерений. Ошибки вычислений состоят как из точности рабочих формул, так и ошибок округлений и должны быть на порядок менее значимыми по сравнению с ошибками измерений. Это объясняется тем, что математическая обработка результатов геодезических измерений с целью получения их вероятнейших значений производится по методу наименьших квадратов. Вероятностно-статистическое обоснование метода наименьших квадратов указывает на то, что ошибки измерений должны носить случайный характер и подчиняться нормальному закону распределения. Методика геодезических измерений и приборы для их выполнения разрабатываются так, чтобы совокупное влияние на формирование ошибки измеренного элемента отвечало требованиям центральной предельной теоремы Ляпунова о случайных величинах, подчиняющихся нормальному закону распределения. При этом, чем выше класс и точность приборов для геодезических измерений, тем строже эти требования выполняются.

## **2. ПАРАМЕТРЫ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ**

Поверхность земного эллипсоида образуется вращением эллипса вокруг его малой оси и имеет те же параметры, что и образующий ее эллипс. Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых его фокусами, постоянна и равна большой оси эллипса.

Уравнение эллипса в системе плоских прямоугольных координат имеет вид

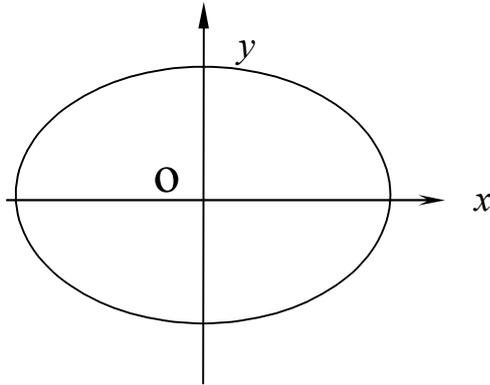


Рис. 2.1

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.1)$$

где  $a$  – большая и  $b$  – малая полуоси, являются линейными параметрами эллипса и определяют его форму и размеры.

Для решения задач сфероидической геодезии применяют также относительные параметры эллипсоида вращения, которые связаны с большой и малой полуосями и характеризуют его форму:

– полярное сжатие  $\alpha = \frac{a-b}{a}; \quad (2.2)$

– первый эксцентриситет  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; \quad (2.3)$

– второй эксцентриситет  $e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \quad (2.4)$

Для однозначного определения поверхности эллипсоида вращения необходимо знать два параметра, один из которых обязательно должен быть линейным. Используя выражения (2.3) – (2.4), несложно получить формулы связи различных параметров:

$$b = a(1 - \alpha) = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{a}{\sqrt{1 + e'^2}};$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} = 2\alpha - \alpha^2; \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2};$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}}; \quad \frac{b}{a} = 1 - \alpha = \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}} = \frac{e}{e'}.$$

Для эллипсоида Красовского, как известно, большая полуось  $a = 6\,378\,245$  м и полярное сжатие  $\alpha = 1 : 298.3$ , по которым можно вычислить следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} b &= 6\,356\,863.0188 \text{ м}; & \alpha &= 0.003\,352\,3299; \\ e^2 &= 0.006\,693\,4216; & e'^2 &= 0.006\,738\,5254. \end{aligned}$$



$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Если в уравнении (3.1) положить  $z = 0$ , получим уравнение геодезического экватора, который представляет собой окружность радиуса  $a$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1.$$

Если поверхность эллипсоида пересечь плоскостью  $z = \text{const}$ , получим окружности радиуса  $r$ , которые называются геодезическими параллелями. Отсюда следует, что экватор – параллель наибольшего радиуса ( $r = a$ ).

На рисунке 3.2 имеем системы координат, определяющие положение точки  $Q$  на меридианном эллипсе: плоские прямоугольные  $x, y$ ; геодезическую широту  $B$ ; геоцентрическую широту  $\Phi$  – угол, образованный геоцентрическим радиус-вектором  $OQ$  с плоскостью экватора; приведенную широту  $u$  – угол, образованный отрезком прямой  $Q_1Q_2O$  с плоскостью экватора, где  $Q_1$  и  $Q_2$  – проекции точки  $Q$  на окружности радиусов  $a$  и  $b$ , описанные вокруг точки  $O$  как центра.

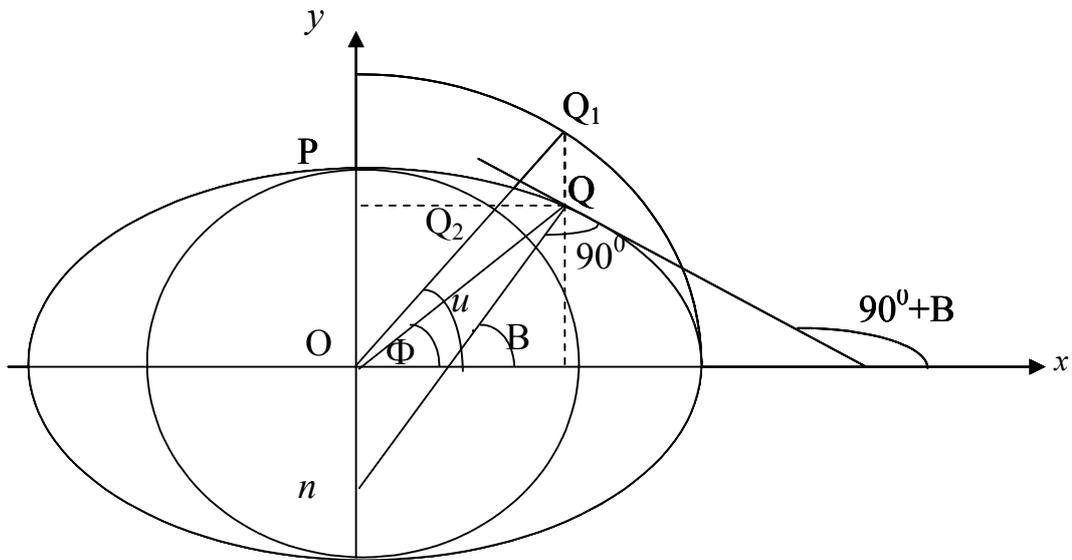


Рис. 3.2

### 3.1. Связь координат на меридианном эллипсе

Для установления связи между системами координат на меридианном эллипсе обратимся к рисунку 3.2. Прежде определим связь широт с плоскими прямоугольными координатами.

Для геоцентрической широты имеем уравнение связи из рисунка

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{y}{x}. \quad (3.2)$$

Для приведенной широты имеем

$$a \cos u = x; \quad b \sin u = y, \quad (3.3)$$

откуда получаем выражение

$$\operatorname{tgu} = \frac{a y}{b x} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{y}{x}. \quad (3.4)$$

Сравнивая выражения (3.2) и (3.4), получаем уравнение связи геоцентрической и приведенной широт

$$\operatorname{tgu} = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg}B. \quad (3.5)$$

Для установления связи координат  $x$ ,  $y$  с геодезической широтой  $B$  вспомним геометрический смысл первой производной. Если задано уравнение плоской кривой  $y = f(x)$ , то первая производная  $dy / dx$  равна тангенсу угла, образованного касательной к кривой в данной точке с положительным направлением оси абсцисс. Применительно к рисунку 3.2 можем записать

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(90 + B) = -\operatorname{ctg}B. \quad (3.6)$$

Уравнение меридианного эллипса в функции плоских прямоугольных координат имеет выражение (2.1). Дифференцируем по переменной  $x$  это уравнение:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда имеем для производной

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x}. \quad (3.7)$$

Приравнивая правые части уравнений (3.6) и (3.7), получаем

$$\operatorname{tg}B = \frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x} = \frac{1}{1-e^2} \frac{y}{x}. \quad (3.8)$$

Учитывая выражения (3.4) и (3.5), можем записать следующие уравнения связи широт:

$$\operatorname{tg}\Phi = (1-e^2) \operatorname{tg}B; \quad \operatorname{tgu} = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg}B; \quad \operatorname{tg}\Phi = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tgu}. \quad (3.9)$$

Используя полученные уравнения, а также имея в виду уравнения (3.4), получаем выражения для плоских прямоугольных координат  $x$ ,  $y$  в функции широт:

$$x = a \cos u; \quad y = b \sin u \quad (3.10)$$

$$x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}; \quad y = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \quad (3.11)$$

$$x = \frac{a\sqrt{1 - e^2} \cos \Phi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \Phi}}; \quad y = \frac{a\sqrt{1 - e^2} \sin \Phi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \Phi}} \quad (3.12)$$

### 3.2. Пространственные координаты

Для определения положения точки  $Q$  на поверхности эллипсоида в сфероидической геодезии используют системы пространственных координат: геодезические ( $B$ ), приведенные ( $u$ ) и геоцентрические ( $\Phi$ ) широты и геодезические долготы  $L$ , а также декартовые координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . На рисунке 3.1 меридианный эллипс определяемой точки  $PQ$ . Из сравнения рисунков 3.1 и 3.2 замечаем следующие уравнения связи прямоугольных пространственных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и в плоскости меридианного эллипса ( $x$ ), ( $y$ ) координат

$$x = (x) \cos L; \quad y = (x) \sin L; \quad z = (y). \quad (3.13)$$

Подставляя сюда выражения для ( $x$ ) и ( $y$ ) из (3.10) – (3.12), несложно получить уравнения связи, например:

$$x = a \cos u \cos L; \quad y = a \cos u \sin L; \quad z = a\sqrt{1 - e^2} \sin u \quad (3.14)$$

$$x = \frac{a \cos B \cos L}{W}; \quad y = \frac{a \cos B \sin L}{W}; \quad z = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{W} \quad (3.15)$$

Здесь и в последующем мы используем общепринятое в геодезии обозначение

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B},$$

которое называют первой основной функцией широты.

В настоящее время для решения геодезических задач все более используются спутниковые системы позиционирования, когда носителями координат являются созвездия специальных ИСЗ, находящихся на значительном удалении от поверхности земного эллипсоида. Если это удаление характеризуется геодезической высотой  $H$ , то уравнения связи простран-

ственных прямоугольных и геодезических широт, долгот и высот принимают вид, следуемый из (3.15), если к каждой из координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  прибавить проекции геодезической высоты  $H$  на соответствующие координатные оси.

$$\begin{aligned}x &= (N + H) \cos B \cos L; \\y &= (N + H) \cos B \sin L; \\z &= [N(1 - e^2) + H] \sin B.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Здесь принято обозначение:  $N = \frac{a}{W}$  – отрезок  $Qn$  на рисунке 3.1 – радиус первого вертикала. На практике возникает задача вычисления координат  $B$ ,  $L$ ,  $H$  по известным  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Рассмотрим вывод формул для решения этой задачи. Разделив второе уравнение (3.16) на первое, получаем

$$\operatorname{tg} L = \frac{y}{x}.\tag{3.17}$$

Возведя в квадрат первые два уравнения (3.16) и найдя их сумму, получаем уравнение

$$x^2 + y^2 = (N + H)^2 \cos^2 B,\tag{3.18}$$

которое совместно с третьим из (3.16) приводит к уравнению

$$\operatorname{tg} B = \frac{z + e^2 N \sin B}{\sqrt{x^2 + y^2}},\tag{3.19}$$

которое позволяет вычислить геодезическую широту методом последовательных приближений, которые будут сходящимися. Так, если требуется вычислить широту с точностью до  $0.0001''$ , достаточно трех приближений. Для удобства вычислений формулу (3.19) можно преобразовать, переходя в правой части уравнения от  $\sin B$  к  $\operatorname{tg} B$  по формуле

$$\sin B = \frac{\operatorname{tg} B}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B}}.$$

В результате получим после несложных преобразований

$$\operatorname{tg} B = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( z + \frac{ae^2 \operatorname{tg} B}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 B}} \right).\tag{3.20}$$

В этом уравнении нет необходимости последовательно вычислять различные тригонометрические функции от искомой широты  $B$ , как это нужно делать в уравнении (3.19), что упрощает вычисления.

Определив долготу и широту по приведенным формулам, геодезическую высоту можно определить с контролем из уравнений (3.16) или (3.18)

$$H = \frac{x}{\cos B \cos L} - N; \quad H = \frac{y}{\cos B \sin L} - N;$$

$$H = \frac{z}{\sin B} - N(1 - e^2); \quad H = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos B} - N. \quad (3.21)$$

### *Вопросы для самоконтроля по разделам 2-3*

1. Сколько и какие параметры однозначно определяют форму и размеры эллипсоида вращения?
2. Какие широты применяют для решения задач сфероидической геодезии?
3. Какая из широт наибольшая и наименьшая?
4. Дать определения геодезических меридианов и параллелей.
5. Как используется геометрический смысл производной?
6. Дать определения геодезических широты, долготы и высоты.
7. Записать систему уравнений для вычисления пространственных прямоугольных координат по геодезическим широте, долготе и высоте.
8. В чем особенности вычисления геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам?

## **4. ГЕОМЕТРИЯ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА**

### **4.1. Классификация кривых на поверхности**

На любой поверхности между двумя точками можно провести бесконечное множество самых различных линий, обладающих теми или иными свойствами. Для решения геодезических задач на поверхности эллипсоида нас будут интересовать только те линии из этого множества, которые связаны с измерениями, редуцированными на поверхность эллипсоида с физической поверхности Земли, а также координатные линии.

С учетом этого рассмотрим следующие линии на поверхности земного эллипсоида.

**Плоские сечения** – линии, образованные как след пересечения поверхности некоторой плоскостью. В зависимости от того, как ориентирована плоскость сечения относительно поверхности, различают: **нормаль-**

**ные сечения** в данной точке, если плоскость сечения содержит в себе нормаль к поверхности в данной точке, **центральные сечения**, когда плоскость содержит в себе центр эллипсоида, в этом случае всегда сечение будет нормальным в экваториальных точках. Если нормальное сечение проходит в азимуте, равном  $90^0$ , его называют **первым вертикалом** эллипсоида в данной точке, радиус которого равен  $N$ , выражение которого приведено в формуле (3.16).

**Геодезическая линия** – кратчайшая кривая между двумя точками на поверхности. Следует заметить, что геодезические линии на любой поверхности играют особую роль (прямые на плоскости, дуги больших кругов на сфере и др.). Геометрия геодезических линий характеризует геометрию поверхности, и все метрические задачи на поверхностях решают с помощью уравнений, связывающих элементы геодезических линий. Примером этому являются формулы плоской и сферической тригонометрии, связывающие линейные и угловые элементы геометрических фигур, образованных прямыми линиями на плоскости и дугами большого круга на сфере. Следует отметить, что на произвольных поверхностях, вообще говоря, не существует подобных формул в замкнутом виде в элементарных функциях, здесь используют дифференциальные формулы геодезических линий, интегрирование которых позволяет решать различные задачи. В этих случаях используют методы дифференциальной геометрии поверхностей.

При решении геодезических задач на поверхности земного эллипсоида мы будем использовать методы дифференциальной геометрии.

Для того чтобы лучше понять методы, применяемые в сфероидической геодезии, вспомним основные элементы кривых на поверхностях. Прежде всего вспомним, что в дифференциальной геометрии выделяют **регулярные или гладкие кривые и поверхности**, не имеющие особых (разрывных) точек и линий. На таких линиях и поверхностях для текущей точки производная непрерывна и плавно меняет свое значение с изменением координат. Такие кривые и поверхности называют также дифференцируемыми. Поверхность эллипсоида регулярная, и мы будем рассматривать геометрию регулярных кривых на этой поверхности.

Вспомним основные определения, относящиеся к кривым на поверхностях. В каждой точке кривой можно провести три взаимно перпендикулярные плоскости и прямые (рис. 4.1), образующие **сопровождающий трехгранник кривой**:

– **касательную плоскость  $K$**  к поверхности и **вектор касательной  $k$**  к кривой  $L$  в точке  $M$ , имеющие одну общую точку с поверхностью и кривой;

– **нормальную плоскость  $N$** , которая перпендикулярна касательной плоскости – все прямые, лежащие в нормальной плоскости и проходящие через точку  $M$ , называются **векторами нормалей к кривой** в данной точке, один из которых перпендикулярен касательной плоскости и называется нормалью  $\bar{n}$  к поверхности в данной точке;

– **соприкасающуюся плоскость кривой  $S$** , проходящую через три бесконечно близкие точки кривой, вектор нормали, лежащий на пересечении нормальной и соприкасающейся плоскостей, называется **главной нормалью кривой  $\bar{t}$** ;

– бинормаль  $\bar{b}$  – нормаль, перпендикулярную к соприкасающейся плоскости;

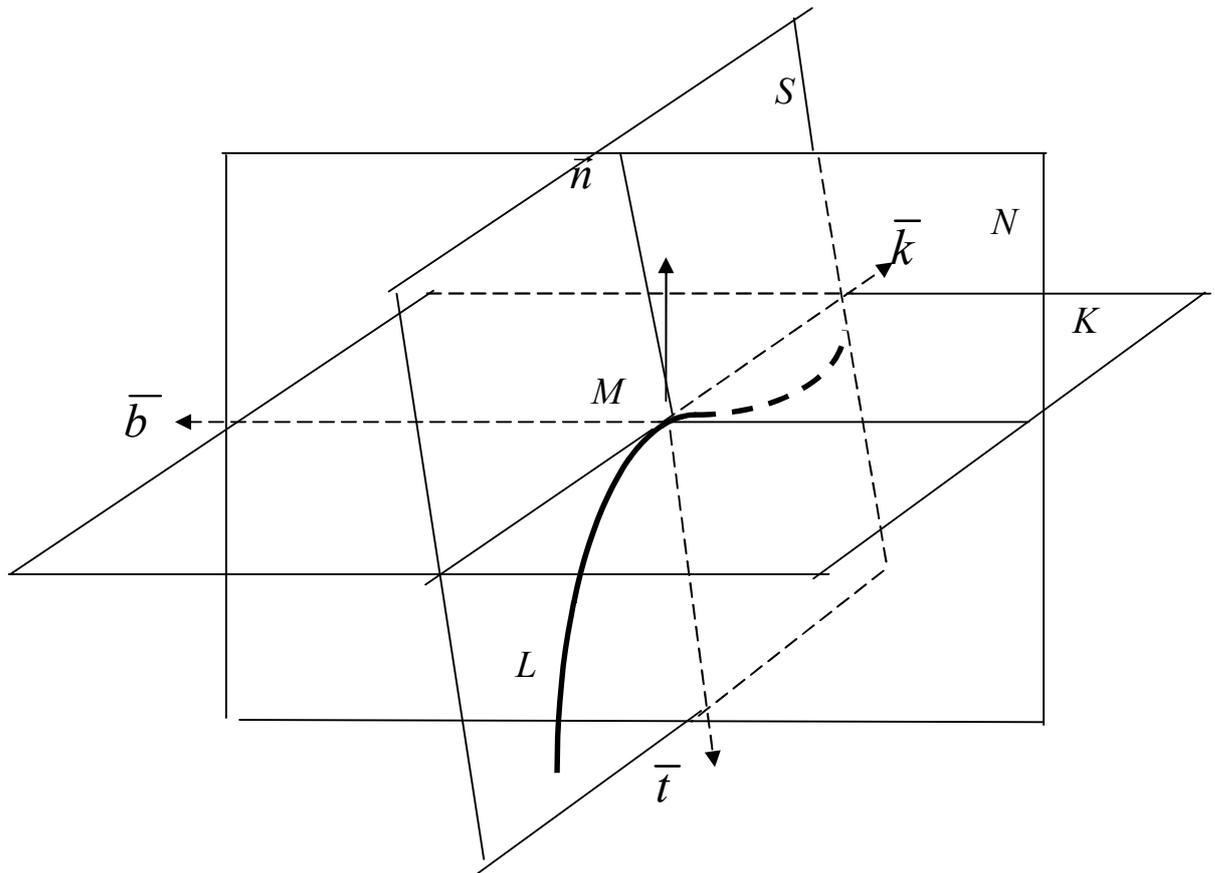


Рис. 4.1

Таким образом, можно отметить, что любая плоская кривая (следовательно, и плоское сечение на поверхности) имеет одну соприкасающуюся плоскость. У геодезической линии в каждой ее точке главная нормаль

кривой  $\bar{t}$  совпадает с нормалью к поверхности  $\bar{n}$  в данной точке. Для произвольных кривых на поверхностях точки, в которых эти два вектора совпадают, называются геодезическими точками.

Если на поверхности эллипсоида вращения проведено нормальное в данной точке сечение, то она также геодезическая, как геодезической будет точка, находящаяся на продолжении нормального сечения до точки, лежащей на одной параллели с данной. У центральных сечений эллипсоида экваториальные точки – геодезические. Таким образом, можно отметить, что любое нормальное сечение земного эллипсоида имеет, по крайней мере, две геодезические точки, удаление которых будет тем больше, чем ближе плоскость сечения проходит от его центра.

Если на поверхности эллипсоида (рис. 4.2) имеем две точки  $A$  и  $B$ , то между ними можно провести как геодезическую линию (одну единственную), так и нормальное как в одной, так и другой точках сечение. Если эти точки не лежат на одной параллели ( $B_A \neq B_B$ ), что чаще всего имеет место на практике, то получаем два взаимно нормальных сечения  $AaB$  и  $BbA$ , плоскости которых пройдут: для прямого нормального сечения в точке  $A$  – через точку  $B$  и нормаль  $An_A$ , для прямого нормального сечения в точке  $B$  – через точку  $A$  и нормаль  $Bn_B$ . Эти сечения не совпадут друг с другом потому, что нормали к поверхности эллипсоида  $An_A$  и  $Bn_B$  в данных точках не лежат в одной плоскости, а образуют скрещивающиеся прямые. Это хорошо видно из рисунка 4.2.

Уравнение любой поверхности можно записать в векторной форме

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} . \quad (4.1)$$

Подставляя сюда выражения для координат (3.14) или (3.15) для эллипсоида, получим уравнения его поверхности в функции параметрических координат:

$$\begin{aligned} \bar{r} = \bar{r}(u, L) &= a \cos u \cos L \bar{i} + a \cos u \sin L \bar{j} + b \sin u \bar{k}; \\ \bar{r} = \bar{r}(B, L) &= \frac{a}{W} \cos B \cos L \bar{i} + \frac{a}{W} \cos B \sin L \bar{j} + \frac{a(1-e^2)}{W} \sin B \bar{k}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для любой кривой на поверхности можем записать уравнение в дифференциальной форме, которое выражает линейный элемент поверхности.

$$ds = |d\bar{r}|,$$

или в параметрических координатах

$$ds^2 = Edu^2 + 2FdudL + GdL^2 . \quad (4.3)$$

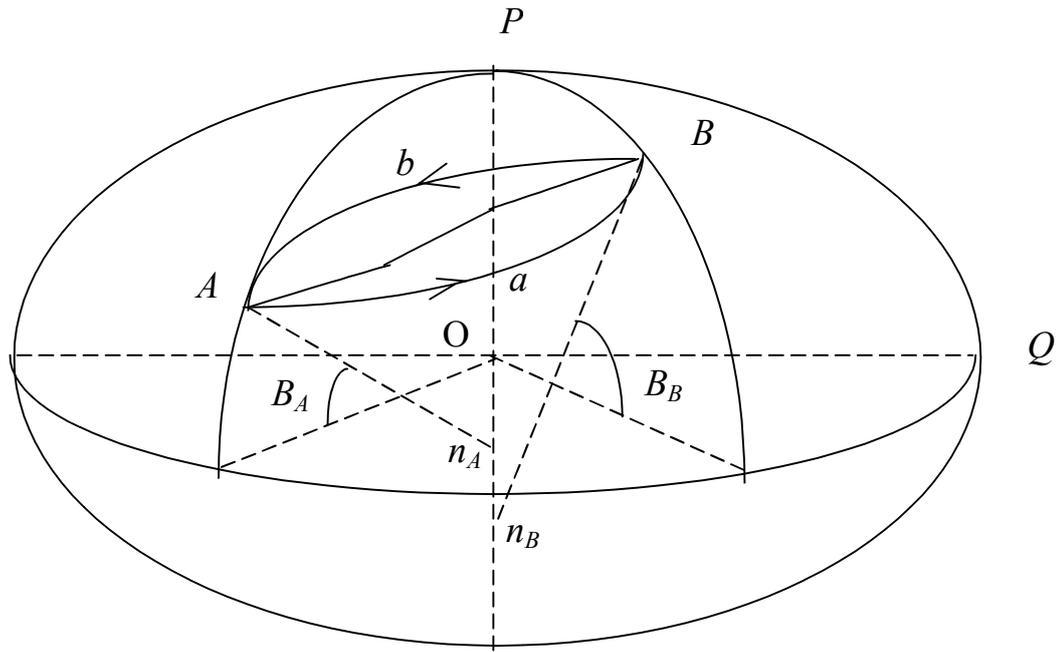


Рис. 4.2

Уравнение (4.3) носит название первой основной квадратичной формы Гаусса для любой поверхности, коэффициенты которой  $E, F, G$  имеют выражения в частных производных:

$$\begin{aligned} E &= (\bar{r}_u)^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F &= (\bar{r}_u, \bar{r}_L) = x_u x_L + y_u y_L + z_u z_L \\ G &= (\bar{r}_L)^2 = x_L^2 + y_L^2 + z_L^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Для ортогональной координатной сетки на поверхности эллипсоида (меридианов и параллелей) всегда имеет место  $F = 0$ , в чем несложно убедиться, если иметь в виду уравнения (3.14) или (3.15), из которых, кроме того, получаем выражения

$$E = a^2(1 - e^2 \cos^2 u) = \frac{a^2(1 - e^2)^2}{W^6}; \quad G = a^2 \cos^2 u = \frac{a^2 \cos^2 B}{W^2}. \quad (4.5)$$

С учетом этого линейный элемент поверхности эллипсоида имеет выражение

$$dS = \sqrt{M^2 dB^2 + r^2 dL^2}, \quad (4.6)$$

здесь приняты обозначения коэффициентов первой квадратичной формы для эллипсоида  $E = M^2, G = r^2$  и их выражения следуют из уравнений (4.5). Геометрический смысл этих коэффициентов поясним несколько дальше.

## 4.2. Координатные линии на поверхности эллипсоида

Как уже отмечалось ранее, координатными линиями на поверхности земного эллипсоида являются меридианы и параллели, уравнения которых могут быть получены из уравнения (4.6), учитывая (4.5). Полагая  $L = \text{const}$ ,  $dL = 0$ , получим уравнение меридиана в функции геодезической и приведенной широты

$$ds_{\text{мер.}} = dX = \frac{a(1-e^2)}{W^3} dB = \frac{a}{V} du \quad (4.7)$$

Для параллели получим аналогично при условии  $B = \text{const}$ ,  $dB = 0$

$$ds_{\text{пар.}} = dY = \frac{a \cos B}{W} dL = a \cos u dL. \quad (4.8)$$

В выражении (4.7) и в последующем мы используем принятое в геодезии обозначение функции  $V$ . Эта величина носит название второй основной функции широты и имеет следующие выражения:

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}} = \frac{W}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (4.9)$$

Сравнивая выражения (4.6), (4.7) и (4.8), замечаем, что величина  $M$  выражает радиус кривизны меридиана, а  $r$  – параллели.

Учитывая изложенное, заметим, что меридианы и параллели земного эллипсоида представляют собой плоские сечения. При этом меридианы – нормальные сечения, состоящие сплошь из геодезических точек, следовательно, они являются также геодезическими линиями. Заметим, что геодезические линии эллипсоида, проходящие в произвольном азимуте, не являются плоскими кривыми. Меридиан является исключением. Параллели земного эллипсоида являются наклонными по отношению к нормали плоскими сечениями. Более того, выражая радиус параллели  $r$  через радиус первого вертикала  $N$  (3.16), замечаем угол наклона плоскости параллели к нормали, которая лежит в плоскости первого вертикала, равный геодезической широте  $B$ .

$$r = N \cos B. \quad (4.10)$$

При этом уравнение вида (4.10) устанавливает связь между радиусами кривизны наклонных и нормальных плоских сечений и выражает **теорему Менье**.

Можно отметить, что параллель наибольшего радиуса (экватор) является нормальным сечением и геодезической линией.

В теории поверхностей координатные сетки в виде меридианов и параллелей, когда одна координатная линия является геодезической, а другая негеодезическая, называют полугеодезическими.

### 4.3. Главные радиусы кривизны поверхности эллипсоида

Из теории поверхностей известно, что в каждой точке поверхность имеет различную кривизну, зависящую как от координат данной точки, так и направления. Другими словами, если в данной точке поверхности провести нормальные сечения, то радиус их кривизны будет зависеть от направления (азимута). При этом на любой поверхности всегда можно выбрать такие два направления, вдоль которых будет иметь место наибольший и наименьший радиусы ее кривизны. Такие направления на поверхности называют главными, а радиусы кривизны нормальных сечений, проходящих вдоль этих направлений, называют **главными радиусами кривизны поверхности**.

Если взять меридиан  $PQ$  (рис. 4.3), то он делит поверхность эллипсоида на две симметричные по геометрическим параметрам части. Направление вдоль меридиана является одним из главных направлений на поверхности эллипсоида, вдоль которого кривизна поверхности равна величине, обратной радиусу меридиана:

$$k_{\text{мер}} = \frac{1}{M} = \frac{W^3}{a(1-e^2)}. \quad (4.11)$$

Вторым главным направлением на поверхности эллипсоида является направление вдоль первого вертикала – дуга  $Tk$  (рис. 4.3), и кривизна поверхности эллипсоида вдоль этого направления имеет выражение

$$k_{\text{верт}} = \frac{1}{N} = \frac{W}{a}. \quad (4.12)$$

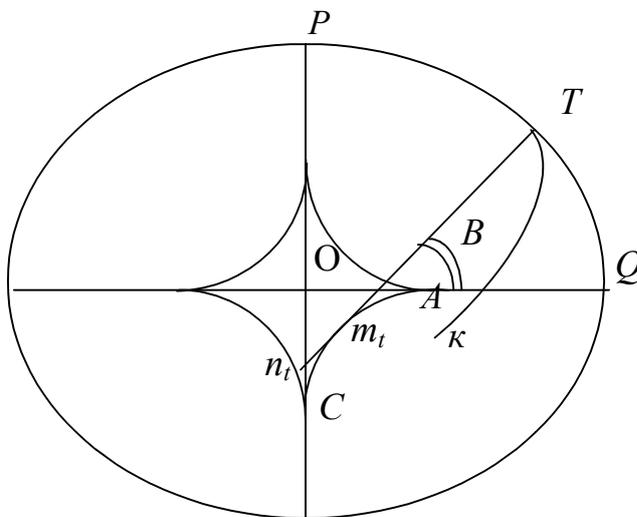


Рис. 4.3

На рисунке показаны главные радиусы кривизны поверхности эллипсоида в точке  $T$ , широта которой равна  $B$ :

$M$  – отрезок нормали  $Tm_T$ , заключенный между точкой на поверхности эллипсоида и точкой касания с астроидой;

$N$  – отрезок нормали  $Tn_T$ , заключенный между точкой на поверхности эллипсоида и точкой пересечения с осью вращения эллипсоида.

Заметим величину главных радиусов кривизны для полярной точки  $P$ , в которой  $B = 90^0$ :

Величины  $M$  и  $N$  носят название главных радиусов кривизны поверхности эллипсоида в данной точке.

$$M_{B=90^0} = N_{B=90^0} = c = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (4.13)$$

Эта величина носит название полярного радиуса кривизны эллипсоида и обозначается  $c$ . На рисунке 4.3 – это отрезок  $PC$ .

Для экваториальной точки  $Q$ , где  $B = 0$ , имеем соответственно:

$$M_{B=0} = \frac{a}{1-e^2}, \quad (4.14)$$

на рисунке – отрезок  $QA$ ;

$$N_{B=0} = a, \quad (4.15)$$

на рисунке – отрезок  $QO$ .

Вообще говоря, ось вращения эллипсоида является геометрическим местом центров кривизны первых вертикалов, а астроида – геометрическим местом центров кривизны меридианов. Сравнивая численные значения главных радиусов кривизны, замечаем, что радиус меридиана меньше радиуса первого вертикала, следовательно, всегда кривизна поверхности эллипсоида минимальна вдоль первого вертикала, а максимальна – вдоль меридиана. На полюсе меридиан и первый вертикал совпадают.

#### 4.4. Радиус произвольного нормального сечения. Средний радиус кривизны поверхности эллипсоида

Кривизна поверхности эллипсоида в произвольном направлении определяется кривизной нормального сечения, проходящего в азимуте  $A$ , и выражается уравнением Эйлера в функции главных радиусов кривизны.

$$K_A = \frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}, \quad (4.16)$$

откуда несложно получить выражение для радиуса кривизны произвольного нормального сечения

$$R_A = \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A}. \quad (4.17)$$

Данное выражение получим после несложных преобразований в виде

$$R_A = \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 A}, \quad (4.18)$$

где  $\eta^2 = e^2 \cos^2 B$ . Это обозначение принято в высшей геодезии и будет использовано нами дальше.

Для решения целого ряда практических задач геодезии на территориях малых размеров с целью упрощения рабочих формул для вычислений поверхность эллипсоида заменяют поверхностью шара, радиус которого принимается равным среднему интегральному значению радиусов кривизны эллипсоида в данной точке. Некоторые из этих задач мы будем рассматривать дальше. Естественно, при этом важным является вопрос расчета точности вычислений.

Среднее интегральное значение для выражения (4.17) в точке будет зависеть только от азимута. Из выражения (4.17) видно, что эта зависимость одинакова в четырех квадрантах, поэтому можем записать

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_A dA = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi/2} R_A dA. \quad (4.19)$$

Подставляя выражение (4.17) в (4.18), разделим числитель и знаменатель подынтегральной функции на  $N \cos^2 A$ , в результате запишем

$$R = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{M}{\cos^2 A}}{1 + \frac{M}{N} \operatorname{tg}^2 A} dA = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\frac{M}{N}} \frac{dA}{\cos^2 A}}{1 + \sqrt{\frac{M}{N}} \operatorname{tg} A}. \quad (4.20)$$

Для приведения полученного выражения к табличному интегралу введем новую переменную по формуле

$$t = \sqrt{\frac{M}{N}} \operatorname{tg} A; dt = \sqrt{\frac{M}{N}} \frac{dA}{\cos^2 A},$$

В результате имеем выражение, взамен (4.19)

$$R = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \left| \operatorname{arctg} t \right|_0^{\infty} = \sqrt{MN} \quad (4.21)$$

Как видим, средний радиус кривизны поверхности эллипсоида равен среднему геометрическому из главных радиусов кривизны. Подставляя в полученное выражение значения главных радиусов кривизны, имеем

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 B} = \frac{b}{W^2}. \quad (4.22)$$

Полезно запомнить выражения для радиусов кривизны, если используется полярный радиус кривизны (4.13) и вторая функция широты (4.9).

$$M = \frac{c}{V^3}; N = \frac{c}{V}; R = \frac{c}{V^2}. \quad (4.23)$$

Вторую функцию широты можно также выразить через второй эксцентриситет в виде

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B} . \quad (4.24)$$

Средний радиус кривизны эллипсоида применяется для упрощения решения целого ряда геодезических задач: при решении треугольников, редукционной проблемы, а также в картографии.

#### 4.5. Длина дуги меридиана

Меридиан земного эллипсоида представляет собой эллипс, радиус кривизны которого определяется величиной  $M$ , зависящей от широты. Длина дуги любой кривой переменного радиуса может быть вычислена по известной формуле дифференциальной геометрии, которая применительно к меридиану имеет выражение

$$s = \int_{B_1}^{B_2} M dB = \int_{B_1}^{B_2} \frac{c}{V^3} dB = c \int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{(1 + e'^2 \cos^2 B)^{3/2}} . \quad (4.25)$$

Здесь  $B_1$  и  $B_2$  – широты, для которых определяется длина меридиана. Интеграл не берется в замкнутом виде в элементарных функциях. Для его вычисления возможны лишь приближенные методы интегрирования. При выборе метода приближенного интегрирования обратим внимание на то, что значение эксцентриситета меридианного эллипса – величина малая, поэтому здесь возможно применить метод, основанный на разложении в ряд по степеням малой величины ( $e'^2 \cos^2 B < 7 \cdot 10^{-3}$ ) биномиального выражения, стоящего под знаком интеграла. Число членов разложения будет зависеть от необходимой точности вычисления длины дуги меридиана, а также от разности широт ее конечных точек.

В геодезической практике могут возникать различные случаи, чаще приходится производить вычисления для малых длин (до 60 км), но для специальных целей может возникнуть потребность вычислений дуг меридианов большой длины: от экватора до текущей точки (до 10 000 км), между полюсами (до 20 000 км). Необходимая точность вычислений может достигать величины в 0.001 м. Поэтому мы рассмотрим вначале общий случай, когда разность широт может достигать  $180^\circ$ , а длина дуги 20 000 км.

Для разложения в ряд биномиального выражения применяем известную из математики формулу

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (4.26)$$

Погрешность вычисления с удержанием  $m$  членов разложения здесь достаточно определить с помощью остаточного члена в форме Лагранжа, который не меньше по абсолютной величине суммы всех отброшенных членов разложения и вычисляется по формуле

$$\rho_m(1 \pm x)^n = \frac{n(n-1)\dots(n-m)}{(m+1)!} x_{\max}^{(m+1)} \quad (4.27)$$

как первый из отброшенных членов разложения, вычисленный при максимально возможном значении величины  $x$ .

В нашем случае имеем

$$\begin{aligned} (1 + e'^2 \cos^2 B)^{-3/2} = & 1 - \frac{3}{2} e'^2 \cos^2 B + \frac{3 \times 5}{2 \times 4} e'^4 \cos^4 B - \frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6} e'^6 \cos^6 B + \\ & + \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9}{2 \times 4 \times 6 \times 8} e'^8 \cos^8 B - \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10} e'^{10} \cos^{10} B + \dots \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (4. 25), получим

$$\begin{aligned} s = c \int_{B_1}^{B_2} (1 - \frac{3}{2} e'^2 \cos^2 B + \frac{3 \times 5}{2 \times 4} e'^4 \cos^4 B - \frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6} e'^6 \cos^6 B + \\ + \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9}{2 \times 4 \times 6 \times 8} e'^8 \cos^8 B - \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10} e'^{10} \cos^{10} B + \dots) dB, \end{aligned} \quad (4.28)$$

которое допускает почленное интегрирование с удержанием необходимого числа членов разложений. Предположим, что длина дуги меридиана может достигать величины 10 000 км (от экватора до полюса), что соответствует разности широт  $\Delta B = \pi / 2$ , при этом требуется ее вычислить с точностью до 0.001 м, что будет соответствовать относительной величине  $10^{-10}$ . Значение  $\cos B$  в любом случае не превзойдет единицы. Если при вычислениях будем удерживать третьи степени разложения, то остаточный член в форме Лагранжа имеет выражение

$$\rho_3(s) = \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9}{2 \times 4 \times 6 \times 8} e'^8 \approx 5 \times 10^{-9}.$$

Как видим, для достижения необходимой точности такого числа членов разложения недостаточно, необходимо удерживать четыре члена разложения, и остаточный член в форме Лагранжа будет иметь выражение

$$\rho_4(s) = \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10} e'^{10} \approx 3.4 \times 10^{-12}.$$

Следовательно, при интегрировании необходимо удерживать в данном случае четыре степени разложения.

Почленное интегрирование (4.28) не вызывает труда, если преобразовать четные степени в кратные дуги ( $\cos^{2n} B$  в  $\cos(2nB)$ ), используя известную формулу косинуса двойного аргумента

$$\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = 2\cos^2 B - 1; \quad \cos^2 B = (1 + \cos 2B)/2,$$

последовательно применяя которую, получаем

$$\cos^4 B = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2B + \frac{1}{8}\cos 4B.$$

Действуя таким образом до  $\cos^8 B$ , получим после несложных преобразований и интегрирования

$$s = n_1(B_2 - B_1) - n_2 \sin 2(B_2 - B_1) + n_3 \sin 4(B_2 - B_1) - n_4 \sin 6(B_2 - B_1) + \dots \quad (4.29)$$

Здесь разность широт берется в радианной мере и приняты следующие обозначения коэффициентов, имеющих постоянные значения для эллипсоида с данными параметрами.

$$n_1 = c \left( 1 - \frac{3}{4}e'^2 + \frac{45}{64}e'^4 - \frac{175}{256}e'^6 + \frac{11025}{16384}e'^8 - \dots \right);$$

$$n_2 = \frac{3}{8}ce'^2 \left( 1 - \frac{5}{4}e'^2 + \frac{175}{128}e'^4 - \frac{105}{64}e'^6 + \dots \right);$$

$$n_3 = \frac{15}{256}ce'^4 \left( 1 - \frac{7}{4}e'^2 + \frac{147}{64}e'^4 - \dots \right);$$

$$n_4 = \frac{35}{3072}ce'^6 \left( 1 - \frac{9}{4}e'^2 + \dots \right).$$

Полезно запомнить, что длина дуги меридиана с разностью широт в один градус примерно равна 111 км, в одну минуту – 1.8 км, в одну секунду – 0.031 км.

В геодезической практике очень часто возникает необходимость вычисления дуги меридиана малой длины (порядка длины стороны треугольника триангуляции), в условиях Беларуси это значение не превзойдет величины в 30 км. В этом случае нет необходимости применять громоздкую формулу (4.29), а можно получить более простую, но обеспечивающую такую же точность вычислений (до 0.001 м).

Пусть широты конечных точек на меридиане будут  $B_1$  и  $B_2$  соответственно. Для расстояний до 30 км это будет соответствовать разности широт в радианной мере, не более 0.27. Вычисляя среднюю широту  $B_m$  дуги меридиана по формуле  $B_m = (B_1 + B_2) / 2$ , принимаем дугу меридиана за дугу окружности радиусом

$$M_m = \frac{c}{V_m} = \frac{c}{(1 + \cos^2 B_m)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.30)$$

и ее длину вычисляем по формуле длины дуги окружности

$$S = M_m (B_2 - B_1), \quad (4.31)$$

где разность широт берется в радианной мере.

#### 4.6. Длина дуги параллели

Радиус параллели, как видно из формулы (4.10), не зависит от долготы и для данной параллели имеет постоянное значение (параллель – окружность), поэтому для вычисления длины дуги параллели применяют формулу

$$s_{\text{пар.}} = r(L_2 - L_1) = \frac{c}{V} \cos B (L_2 - L_1), \quad (4.32)$$

здесь разность долгот берется в радианной мере.

В отличие от меридиана, длина дуги параллели, соответствующая одинаковой разности долгот, различается. Если на экваторе эти значения близки к тому, что имеет место на меридиане, то, например, на широте в  $60^\circ$  ( $\cos 60^\circ = 0.5$ ) они будут в два раза меньше.

#### 4.7. Площадь сфероидической трапеции. Размеры рамок трапеций топографических карт

Трапеция топографической карты любого масштаба является отображением на плоскости в соответствующей проекции (цилиндрической Гаусса – Крюгера, конической Ламберта и др.) сфероидической трапеции, ограниченной меридианами и параллелями с соответствующей разграфке масштабных рядов разностью долгот и широт. Например, для масштаба 1: 1 000 000 у нас в стране эти разности приняты соответственно в  $6^\circ$  и  $4^\circ$ . В других странах принята иная разграфка, например, для близэкваториальных стран приняты обе разности в  $4^\circ$ . В любом случае стремятся к тому, чтобы линейные размеры трапеций карт любого масштаба были примерно одинаковыми.

Пусть мы имеем такую сфероидическую трапецию. Тогда площадь поверхности эллипсоида, ограниченная парами меридианов и параллелей, определяется двойным интегралом

$$T = \iint_{B L} MN \cos B dB dL = c^2 \iint_{B L} \frac{\cos B}{V^4} dB dL = c^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} \frac{\cos B dB}{(1 + e'^2 \cos^2 B)^2}.$$

Подынтегральное выражение преобразуем. Для этого перейдем к первому эксцентриситету по известной формуле  $e'^2 = e^2 / (1 - e^2)$ , в результате получим

$$T = b^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} \frac{\cos B dB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2}. \quad (4.33)$$

Используя новую переменную по формуле  $e \sin B = \sin Q$ , будем иметь  $\cos B dB = (\cos Q dQ) / e$ .

В результате имеем после очевидных преобразований и интегрирования

$$T = \frac{b^2}{e} (L_2 - L_1) \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{dQ}{\cos^3 Q} = \frac{b^2}{e} (L_2 - L_1) \left( \frac{\sin Q}{2 \cos^2 Q} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\sin Q}{2} \right) \right| \right) \Big|_{Q_1}^{Q_2}. \quad (4.34)$$

Возвращаясь от переменной  $Q$  к широте  $B$ , получим

$$T = \frac{b^2}{e} (L_2 - L_1) \left( \frac{e \sin B}{2W^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{e \sin B}{2} \right) \right| \right) \Big|_{B_1}^{B_2}. \quad (4.35)$$

Вычисление площади по полученной формуле производится при условии, что разность долгот берется в радианной мере. При этом точность вычислений зависит только от их разрядности, так как формула (4.35) строгая. В учебниках старых изданий приведена другая формула для вычислений площади трапеции, полученная путем разложения биномиального выражения под знаком интеграла (4.33) в ряд, что в настоящее время с наличием современной вычислительной техники неактуально.

Прежде чем приступить к формулам для вычислений размеров рамок топографических карт, полезно заметить следующее. Во-первых, эти размеры нужны для вычерчивания рамок соответствующего масштаба карт, когда предельная графическая точность равна 0.1 мм в масштабе карты. Например, для масштаба карты 1 : 1 000 000 это будет соответствовать на местности величине в 100 м, а для самого крупного масштаба карты 1 : 10 000, соответственно 1 м. Во-вторых, несложно убедиться, что линейные размеры трапеций карты любого масштаба примерно одинаковы и не превосходят величины 50 x 50 см. В-третьих, численные значения размеров рамок нужны для их нанесения на планшет и вычерчивания с графической точностью (до 0.1 мм). Таким образом, мы видим, что в любом случае при вычислениях необходимо учитывать не более четырех значащих цифр.

На рисунке 4.4 показана трапеция топографической карты, у которой основаниями являются изображения на плоскости параллелей, а боковыми сторонами – изображения меридианов эллипсоида.

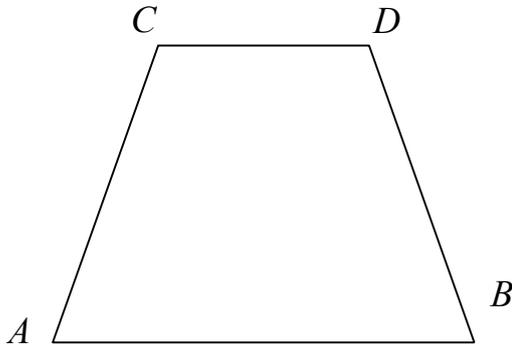


Рис. 4.4

Для вычисления их длин воспользуемся ранее полученными формулами для малой дуги меридиана и параллели (4.31, 4.32), при этом будем иметь в виду, что карта масштаба  $1 : m$ , линейные параметры эллипсоида даны в метрах. С учетом этого имеем

$$\begin{aligned}
 AC = BD = c_{(cm)} &= \frac{100}{m} M_{m(m)} \frac{\Delta B''}{\rho''}; \\
 AB = d_{1(cm)} &= \frac{100}{m} N_{A(m)} \cos B_A \frac{\Delta L''}{\rho''}; \\
 CD = d_{2(cm)} &= \frac{100}{m} N_{C(m)} \cos B_C \frac{\Delta L''}{\rho''}.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

#### 4.8. Система дифференциальных уравнений геодезической линии

На рисунке 4.5 имеем полярный сфероидический треугольник  $PTK$ , у которого  $P$  – полюс,  $T$  и  $K$  – бесконечно близкие друг другу точки, соединенные элементарной дугой геодезической линии  $dS$ , проходящей через точку  $T$  в азимуте  $A$ . Через точку  $K$  (широта которой равна  $B$ ) проведем параллель, которая пересечет меридиан точки  $T$  в некоторой точке  $C$ .

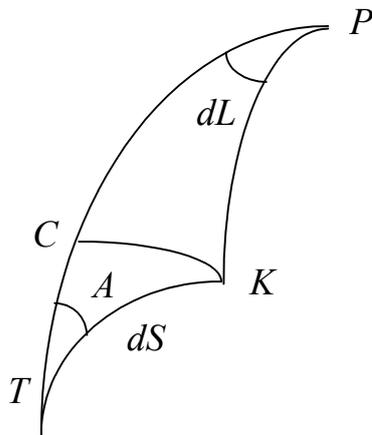


Рис. 4.5

Рассмотрим элементарный прямоугольный треугольник  $TCK$ , у которого все стороны будут бесконечно малы потому, что гипотенуза  $dS$  по условию бесконечно мала. Этот треугольник решаем как плоский прямоугольный, при этом будем иметь в виду, что элементарная дуга меридиана  $TC$  равна  $MdB$ , а параллели  $CK$  –  $rdL$ , где  $dL$  – разность долгот точек  $K$  и  $T$ .

В результате можем записать.

$$MdB = dS \cos A; \quad rdL = dS \sin A, \quad (4.37)$$

откуда получаем дифференциальные зависимости

$$\frac{dB}{dS} = \frac{\cos A}{M}; \quad \frac{dL}{dS} = \frac{\sin A}{r}. \quad (4.38)$$

Обратимся теперь к треугольнику  $PTK$ . Несмотря на то, что одна из его сторон  $TK$  бесконечно мала, стороны  $PT$  и  $PK$  могут достигать значительных величин, зависящих от значения широты точки  $T$ . В этом случае мы можем рассматривать его как сферический и решать по формулам сферической тригонометрии. Рассмотрим элементы этого треугольника. Угол при вершине  $P$  равен  $dL$ , при вершине  $T$  – азимут  $A$ , сторона  $PT$  выражается на сфере единичного радиуса как  $(\pi / 2 - B)$ . Угол этого треугольника при вершине  $K$  можем определить как  $(\pi - A - dA)$ , так как азимут геодезической линии в точке  $K$  равен  $(A + dA)$ .

Применяя теорему косинуса угла для решения сферического треугольника  $PTK$ , имеем

$$\begin{aligned} \cos(\pi - A - dA) &= -\cos A \cos dL + \sin A \sin dL \cos(\pi / 2 - B) \\ -\cos(A + dA) &= -\cos A \cos dL + \sin A \sin dL \sin B. \end{aligned}$$

Применяя формулу для косинуса суммы и разлагая синусы и косинусы бесконечно малых аргументов в ряд и ограничиваясь первыми членами разложений, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dA}{dL} = \sin B,$$

в котором выражаем  $dL$  из второго уравнения (4.38), и запишем систему трех дифференциальных уравнений для геодезической линии эллипсоида в виде

$$\frac{dB}{dS} = \frac{\cos A}{M}; \quad \frac{dL}{dS} = \frac{\sin A}{r}; \quad \frac{dA}{dS} = \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B. \quad (4.39)$$

#### 4.9. Уравнение Клеро для геодезической линии

Система дифференциальных уравнений (4.39) имеет очень большое значение и лежит в основе решения задач сфероидической геодезии при определении связи между полярными координатами  $A$  и  $S$  и параметрическими координатами  $B$  и  $L$  на поверхности земного эллипсоида. Решение этих задач производится по формулам, следующим из интегрирования системы (4.39).

Французский математик и геодезист Клеро в 1773 году взял первый интеграл системы вида (4.39), описывающей геодезические линии на поверхностях вращения. Полученное уравнение в математике носит название уравнение Клеро для геодезических линий на поверхностях вращения.

Для вывода этого уравнения на поверхности земного эллипсоида перейдем в системе (4.39) от геодезической широты  $B$  к приведенной широте  $u$  по ранее полученной формуле (3.9) и формулам, следуемым из нее:

$$\operatorname{ctg} B = \sqrt{1-e^2} \operatorname{ctg} u; \sin B = V \sin u; dB = \frac{\sqrt{1-e^2}}{V^2} du; V = \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}};$$

с учетом этого система (4.39) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dS} &= \frac{V}{a} \cos A; \\ \frac{dL}{dS} &= \frac{\sin A}{a \cos u}; \\ \frac{dA}{dS} &= \frac{V}{a} \operatorname{tg} u \sin A. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Разделив третье уравнение этой системы на первое, получим после очевидных преобразований

$$\operatorname{ctg} A dA = \operatorname{tg} u du; \frac{\cos A dA}{\sin A} = \frac{\sin u du}{\cos u}.$$

Интегрируя полученное уравнение, приходим к уравнению

$$\int \frac{d(\sin A)}{\sin A} + \int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = \ln(\sin A) + \ln(\cos u) = \ln(\sin A \cos u) = \ln c,$$

откуда получаем уравнение Клеро для геодезической линии на поверхности земного эллипсоида

$$\sin A \cos u = c. \quad (4.41)$$

Данное уравнение носит название теоремы Клеро, согласно которой произведение синуса азимута на косинус приведенной широты в каждой точке геодезической линии – величина постоянная.

Заметим геометрический смысл постоянной  $c$  в уравнении (4.41). Полагая  $u = 0$  (экваториальная точка), имеем  $c = \sin A_0$ ; при  $A=90^\circ$  (наиболее удаленная от экватора точка – **точка вертекса**) имеем  $c = \cos u_B$ .

При использовании уравнения (4.41) для вычислений широты по азимуту и наоборот заметим уравнение связи широт, следуемое из (3.9):

$$\cos u = \frac{\cos B}{W}.$$

Если речь идет о двух фиксированных точках на поверхности эллипсоида, то справедливо будет уравнение связи

$$\frac{\sin A_{12} \cos B_1}{W_1} = \frac{\sin A_{21} \cos B_2}{W_2}.$$

#### ***Вопросы для самоконтроля по разделу 4***

1. Какие плоскости образуют сопровождающий трехгранник кривой на поверхности?
2. Дать определения нормали к поверхности и главной нормали кривой.
3. Что такое кривизна кривой, ее составляющие?
4. Дать определения плоского сечения, нормального сечения и геодезической линии на поверхности.
5. Кривизна поверхности, главные радиусы кривизны поверхности земного эллипсоида.
6. Как определяется кривизна поверхности в произвольном азимуте?
7. Средний радиус поверхности в точке, для чего он используется в геодезии?
8. В чем особенности вычисления длины дуги меридиана земного эллипсоида?
9. Как вычисляют размеры рамок трапеций топографических карт? Какова точность вычислений?
10. Записать систему дифференциальных уравнений для геодезической линии эллипсоида.
11. Перейти в системе дифференциальных уравнений от геодезической к приведенной широте.
12. Записать уравнение Клеро для геодезической линии эллипсоида.

## **5. РЕШЕНИЕ СФЕРОИДИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ**

### **5.1. Общие сведения о решении треугольников**

Основным видом построений в государственных геодезических сетях являются треугольники триангуляции и трилатерации. Для того чтобы использовать эти треугольники для передачи координат от исходных к определяемым пунктам, необходимо знать как длины их сторон, так и внутренние углы. В процессе предварительных вычислений вводят поправки в измеренные углы (в триангуляции) и длины сторон (в трилатерации) за ре-

дуцирование с физической поверхности Земли на поверхность эллипсоида. В результате получают **сфероидические треугольники**, сторонами которых служат геодезические линии эллипсоида.

Возникает необходимость решения этих треугольников. При этом в триангуляции по измеренным углам и длине одной из сторон треугольника вычисляют стороны всех треугольников сети. В трилатерации – по измеренным длинам сторон вычисляют углы треугольников. Проблема решения этой задачи заключается в том, что не существует формул сфероидической тригонометрии, подобных формулам плоской и сферической тригонометрии. Вместе с тем замечаем: во-первых, полярное сжатие земного эллипсоида величина малая, во-вторых, длины сторон сфероидических треугольников – малые величины по сравнению с радиусом кривизны эллипсоида.

Ранее мы получили выражение для среднего радиуса кривизны эллипсоида  $R = \sqrt{MN}$ . В связи с этим возникает вопрос, при каких условиях для решения треугольников можно заменить область на поверхности эллипсоида соответствующей областью на поверхности шара, если его радиус принять равным  $R_0$ , вычисленным по средней широте  $B_0$  данной области эллипсоида. Другими словами, когда элементы сфероидического треугольника будут с необходимой точностью соответствовать элементам сферического треугольника. В этом случае треугольники можно решать как сферические. Исследования показывают, что такое возможно, если сеть треугольников располагается в сфероидическом поясе шириной до 300 км или на удалении от параллели с широтой  $B_0$  до 150 км. В этом случае длины сторон треугольников первого и последующих классов будут отличаться на величину, не более 0.001 м, а углы –  $0.001''$ . При пониженных требованиях к необходимой точности решения треугольников ширина пояса увеличивается, например, при точности, на порядок ниже, ширина пояса может достигать 570 км.

Решение треугольников по формулам сферической тригонометрии не совсем удобно на практике, когда длины сторон нужно выражать в долях радиуса ( $S / R_0$ ), поэтому в геодезии применяют методы решения малых сферических треугольников по формулам плоской тригонометрии, основанным на теореме Лежандра и способе аддитивных.

## 5.2. Теорема Лежандра

Пусть мы имеем сферический треугольник  $ABC$  на сфере радиуса  $R_0$ . Возьмем плоский треугольник  $A'B'C'$  с соответственно равными сторонами (рис. 5.1). Углы этих треугольников, расположенные против соответст-

венно равных сторон, не будут равны соответствующим углам сферического треугольника.

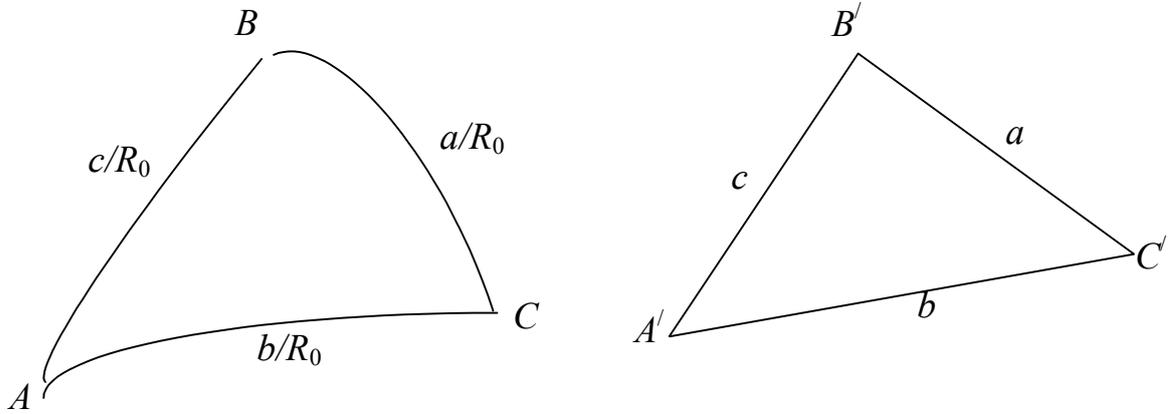


Рис. 5.1

Применяя теорему косинуса стороны для сферического треугольника  $ABC$ , запишем

$$\cos \frac{a}{R_0} = \cos \frac{b}{R_0} \cos \frac{c}{R_0} + \sin \frac{b}{R_0} \sin \frac{c}{R_0} \cos A, \quad (5.1)$$

откуда можем выразить

$$\cos A = \frac{\cos \frac{a}{R_0} - \cos \frac{b}{R_0} \cos \frac{c}{R_0}}{\sin \frac{b}{R_0} \sin \frac{c}{R_0}}. \quad (5.2)$$

Стороны треугольника малы по сравнению с радиусом  $R_0$ , поэтому тригонометрические функции малых аргументов разложим в ряд Маклорена, ограничиваясь четвертыми степенями аргументов  $s/R_0$ , в результате получим вместо (5.2)

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2R_0^2} + \frac{a^4}{24R_0^4} - \left(1 - \frac{b^2}{2R_0^2} + \frac{b^4}{24R_0^4}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2R_0^2} + \frac{c^4}{24R_0^4}\right)}{\left(\frac{b}{R_0} - \frac{b^3}{6R_0^3}\right) \left(\frac{c}{R_0} - \frac{c^3}{6R_0^3}\right)}. \quad (5.3)$$

Заметим, что наибольший из отброшенных членов разложений в (5.3) будет  $\frac{s^5}{120R_0^5}$ . Поставим условие, чтобы он не превосходил величины  $5 \cdot 10^{-10}$ , что соответствует точности вычисления углов в  $0.0001''$ , тогда получаем предельные длины сторон треугольника, для которого (5.3) будет

обеспечивать требуемую точность  $\frac{s^5}{120R_0^5} \leq 5 \cdot 10^{-10}$ ,  $s \leq R_0 \cdot 10^{-2} (600)^{1/5} \approx$

230 км. Преобразуем выражение (5.3) с принятой точностью

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\frac{-a^2}{2R_0^2} + \frac{a^4}{24R_0^4} + \frac{b^2}{2R_0^2} - \frac{b^4}{24R_0^4} + \frac{c^2}{2R_0^2} - \frac{c^4}{24R_0^4} - \frac{b^2c^2}{4R_0^4}}{\frac{bc}{R_0^2} \left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6R_0^2}\right)} = \\ &= \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24R_0^2bc} \right) \left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6R_0^2}\right) = \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24R_0^2bc} + \frac{b^2 + c^2}{6R_0^2} \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right). \end{aligned}$$

Откуда несложно получить после приведения подобных членов

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24R_0^2bc}. \quad (5.4)$$

Обратимся теперь к плоскому треугольнику на рис. 5.1. Для него можем записать по теореме косинусов плоской тригонометрии

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A'; \cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

И выражение для  $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$$\sin^2 A' = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4b^2c^2}.$$

С учетом этого выражение (5.4) принимает вид

$$\cos A - \cos A' = -\frac{bc \sin^2 A'}{6R_0^2}. \quad (5.5)$$

Преобразуя разность косинусов в произведение и полагая

$$\sin \frac{A - A'}{2} = \frac{A - A'}{2}; \sin \frac{A + A'}{2} = \sin A',$$

получим вместо (5.5) для разности сферического и соответствующего плоского углов выражение

$$A - A' = \frac{bc \sin A'}{6R_0^2}.$$

Несложно заметить, что уравнение

$$P = -\frac{bc \sin A'}{2}.$$

выражает площадь треугольника, поэтому для разности любых углов сферического и плоского треугольников справедливы выражения

$$A - A' = B - B' = C - C' = \frac{P}{3R_0^2}.$$

Поскольку сумма внутренних углов плоского треугольника всегда равна  $\pi$ , можем записать для суммы углов сферического треугольника

$$A + B + C = \pi + \frac{P}{R_0^2}. \quad (5.6)$$

Величина, определяющая в (5.6), насколько сумма внутренних углов сферического треугольника больше  $\pi$ , носит название сферического избытка и обозначается  $\varepsilon$ . Отсюда следует вывод, что сферический избыток треугольника (как и любого многоугольника на сфере) прямо пропорционален площади и обратно пропорционален квадрату радиуса сферы, что и выражает **теорему Лежандра**. При этом каждый угол сферического треугольника больше соответствующего угла плоского треугольника на величину одной трети сферического избытка (для  $n$ -угольника – больше на величину  $\varepsilon / n$ ).

Сферический избыток может достигать в общем случае величины до  $2\pi$ . Для малых треугольников, которые мы рассматриваем, эта величина малая, и ее выражают в секундах, поэтому формула для вычисления сферического избытка имеет вид

$$\varepsilon'' = \frac{\rho''}{R_0^2} P. \quad (5.7)$$

Для вычисления площади  $P$  треугольника можно применять любую формулу. Так для треугольников триангуляции, когда известна только одна сторона удобнее формулы вида

$$P = a^2 \frac{\sin B' \sin C'}{\sin A'} \frac{\rho''}{2R_0^2} = b^2 \frac{\sin A' \sin C'}{\sin B'} \frac{\rho''}{2R_0^2} = c^2 \frac{\sin B' \sin A'}{\sin C'} \frac{\rho''}{2R_0^2}. \quad (5.8)$$

В трилатерации измерены длины сторон, а углы неизвестны, поэтому здесь более удобно вычислять площадь треугольника по формуле Герона

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; p = \frac{1}{2}(a+b+c). \quad (5.9)$$

Из формулы (5.7) видно, что наибольший сферический избыток (при заданном порядке длин сторон) будет иметь равносторонний тре-

угольник. Несложно подсчитать, что сферический избыток для различных длин сторон геодезических треугольников не превзойдет следующих величин: при  $s_{км} = 5, 10, 20, 30, 60$   $\varepsilon'' = 0.07, 0.25, 1.0, 2.0, 8.0$  соответственно. Величина  $f = \rho'' / 2R^2$  изменяется с широтой очень медленно. Учитывая, что сферический избыток даже в сети 1 класса с длинами сторон до 60 км не превышает  $8''$ , а точность вычисления углов –  $0.001''$ , при его вычислении достаточно удерживать четыре верные значащие цифры. Это значит, что при его вычислении можно пренебречь различием площадей сферического и плоского треугольников, а величину  $f$  можно считать постоянной и равной для всей территории Республики Беларусь ( $f = 2.530 \cdot 10^{-9}$ ), если длины сторон выражены в метрах.

### 5.3. Порядок решения треугольников по теореме Лежандра

В условиях Республики Беларусь длины сторон триангуляции 1 класса не превышают величины 30 км. Порядок решения сети треугольников триангуляции по теореме Лежандра будет следующим:

- определяют порядок решения треугольников сети так, чтобы последовательно производилась передача длин сторон из треугольника в треугольник, в конечном итоге замыкалась на исходную сторону;
- по длине стороны и измеренным углам вычисляют сферический избыток по формулам (5.7) – (5.8) в триангуляции 1 класса с округлением до  $0.001''$ , в триангуляции 2 класса – до  $0.01''$ ;
- вычитают из измеренных значений углов треугольника одну треть сферического избытка – получают измеренные приведенные плоские углы;
- вычисляют невязку треугольника и вычитают одну треть ее из каждого угла – получают уравненные плоские приведенные углы треугольника;
- по теореме синусов плоской тригонометрии вычисляют неизвестные две стороны треугольника с контролем

$$b = a \frac{\sin B}{\sin A}; c = a \frac{\sin C}{\sin A} = b \frac{\sin C}{\sin B}.$$

Расхождение значений стороны  $c$ , полученное в треугольнике дважды, не должно превышать 0.001 м.

В том случае, когда решаются треугольники, объединенные в сеть, необходимо последний из решаемых треугольников выбрать так, чтобы он примыкал к первому. И в этом случае контролем правильного решения будет условие, что расхождение в длине стороны, полученной дважды, не превышает величины 0.001 м.

Если решаются треугольники трилатерации, порядок следующий:

– вычисление плоских приведенных углов треугольников по формулам

$$\operatorname{tg} \frac{A'}{2} = \frac{P}{p(p-a)}; \operatorname{tg} \frac{B'}{2} = \frac{P}{p(p-b)}; \operatorname{tg} \frac{C'}{2} = \frac{P}{p(p-c)};$$

– вычисление сферического избытка по формулам (5.7) и (5.9);

– вычисление сферических углов треугольников по формулам

$$A = A' + \frac{\varepsilon''}{3}; B = B' + \frac{\varepsilon''}{3}; C = C' + \frac{\varepsilon''}{3}.$$

#### 5.4. Способ аддитаментов и порядок решения треугольников

Для треугольника  $ABC$  (рис. 5.1) можем записать по теореме синусов сферической тригонометрии

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{R_0}} = \frac{\sin B}{\sin \frac{b}{R_0}}. \quad (5.10)$$

Далее представляем синусы малых аргументов в виде разложений в ряд по формуле Маклорена с той же точностью, что и в способе Лежандра, в результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{b}{R_0} - \frac{b^3}{6R_0^3} &= \left( \frac{a}{R_0} - \frac{a^3}{6R_0^3} \right) \frac{\sin B}{\sin A}; \\ b - \frac{b^3}{6R_0^2} &= \left( a - \frac{a^3}{6R_0^2} \right) \frac{\sin B}{\sin A}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Несложно заметить, что для любого класса триангуляции или трилатерации величины, вычитаемые из длин сторон ( $b$ ,  $a$ ), малые и их называют аддитаментами. Например, для длин сторон  $s \leq 60\,000$  м имеем аддитаменты  $A_s = s^3 / 6R_0^2 \leq 1$  м. С учетом этого можем записать вместо (5.11) для приведенных длин сторон выражение в виде теоремы синусов плоской тригонометрии

$$b' = a' \frac{\sin B}{\sin A}. \quad (5.12)$$

Отсюда видно, если в сферическом треугольнике из исходной стороны вычесть аддитаменту, получив ее приведенную длину, приведенные длины других сторон можем вычислить по теореме синусов плоской тригонометрии, если использовать уравненные сферические углы треугольника. На

практике способ аддитаментов для решения треугольников используют, как правило, для контроля решения способом Лежандра.

Таким образом, замечаем порядок решения сферических треугольников по способу аддитаментов.

В триангуляции:

– получают уравненные сферические углы треугольников, для чего из способа Лежандра берут уравненные плоские углы плюс одна треть сферического избытка;

– вычисляют аддитаменту исходной стороны по формуле  $A_a = \frac{a^3}{6R_0^2}$ ;

– вычисляют приведенную длину исходной стороны по формуле  $a' = a - A_a$ ;

– по теореме синусов плоской тригонометрии вычисляют приведенные длины определяемых сторон с контролем

$$b' = a' \frac{\sin B}{\sin A}; c' = a' \frac{\sin C}{\sin A} = b' \frac{\sin C}{\sin B};$$

– вычисляют аддитаменты определяемых сторон

$$A_b = \frac{b'^3}{6R_0^2}; A_c = \frac{c'^3}{6R_0^2}$$

и точные значения сторон сферического треугольника

$$b = b' + A_b; c = c' + A_c.$$

При вычислении аддитаментов можно использовать как точные, так и приведенные длины сторон. В этом случае для любого класса триангуляции будет обеспечена необходимая точность вычислений сторон, как и в способе Лежандра. Действуя последовательно, решают любое число треугольников.

В трилатерации:

– вычисляют аддитаменты  $A_s$  всех сторон треугольников и их приведенные длины  $s'$ ;

– по теореме косинусов плоской тригонометрии вычисляют сферические углы треугольников

$$\cos A = \frac{a'^2 - b'^2 - c'^2}{2b'c'}; \cos B = \frac{b'^2 - a'^2 - c'^2}{2a'c'}; \cos C = \frac{c'^2 - b'^2 - a'^2}{2b'a'}.$$

Действуя последовательно, решают любое число треугольников.

## ***Вопросы для самоконтроля по разделу 5***

1. Что собой представляет геодезический треугольник?
2. В каких случаях геодезический треугольник можно заменить сферическим?
3. Смысл решения треугольников триангуляции и трилатерации.
4. Сформулировать теорему Лежандра.
5. В каких пределах может изменяться сферический избыток? Примерные величины сферического избытка треугольников триангуляции.
6. Необходимая точность вычислений сферического избытка.
7. Смысл способа аддитаментов.
8. Величины аддитаментов треугольников триангуляции и трилатерации.
9. Необходимая точность вычислений аддитаментов.
10. Что такое приведенная длина стороны треугольника при его решении способом аддитаментов?

## **6. ГЛАВНАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА**

### **6.1. Общие сведения о решении главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида**

Основной задачей геодезии является определение координат точек земной поверхности и околоземного пространства. Координатной поверхностью в геодезии, как известно, является поверхность земного эллипсоида. Таким образом, задача сводится к вычислению сфероидических координат по результатам спутниковых, астрономических, гравиметрических и геодезических измерений с использованием геометрии земного эллипсоида.

Как отмечалось ранее, на поверхности земного эллипсоида приняты две системы геодезических координат – параметрическая (широты и долготы, пространственные прямоугольные) и полярная (азимуты и расстояния). В результате спутниковых и астрономических измерений и их редуцирования на поверхность эллипсоида получают пространственные прямоугольные координаты, геодезические широты, долготы точек и азимуты направлений. Геодезические измерения, выполненные в триангуляции, трилатерации, полигонометрии и их сочетаниях, после редуцирования на поверхность эллипсоида дают длины геодезических линий между точками эллипсоида и углы между ними. Точность редуцированных вычислений все-

гда на порядок выше точности измерений соответствующих величин, поэтому при их математической обработке считают величины на эллипсоиде измеренными.

Сущность главной геодезической задачи сводится к установлению связи между системой параметрических и полярных координат на поверхности эллипсоида. Формулы связи пространственных прямоугольных координат и геодезических широт, долгот и высот нами рассмотрены ранее. Поэтому при рассмотрении методов решения главной геодезической задачи на поверхности земного эллипсоида под параметрическими координатами будем понимать геодезические широты и долготы. В основе решения главной геодезической задачи лежит полярный сфероидический треугольник  $PAB$  (рис. 6.1). Различают **прямую и обратную геодезические задачи**.

**Прямая геодезическая задача:** по известным геодезическим широте ( $B_1$ ) и долготе ( $L_1$ ) одной точки, длине ( $S_{12}$ ) и азимуту ( $A_{12}$ ) геодезической линии до другой точки вычислить геодезические широту ( $B_2$ ) и долготу ( $L_2$ ) другой точки, а также обратный азимут ( $A_{21}$ ).

Здесь требуется вычислить параметрические координаты определяемой точки, обратный азимут по ее полярным координатам, отсчитанным от исходной точки.

**Обратная геодезическая задача:** по известным геодезическим широтам ( $B_1, B_2$ ) и долготам ( $L_1, L_2$ ) двух точек вычислить прямой и обратный азимуты ( $A_{12}, A_{21}$ ) и длину геодезической линии между ними ( $S_{12}$ ).

Здесь по известным параметрическим координатам двух точек вычисляются связывающие их полярные координаты.

Если бы шла речь о решении главной геодезической задачи на сфере единичного радиуса, то были бы применимы формулы сферической тригонометрии для решения полярного сферического треугольника. При этом, как в прямой, так и в обратной задачах необходимо в треугольнике по трем известным элементам вычислить три неизвестные. Здесь задача решается однозначно, и точность ее решения зависит только от формата вычислений.

Замкнутых формул сфероидической тригонометрии не существует, поэтому решение главной геодезической задачи на поверхности земного эллипсоида производится приближенными методами, в основе которых лежат различные пути приближенного интегрирования системы дифференциальных уравнений для геодезической линии эллипсоида вращения (4.39), которую запишем в следующем виде:

$$b = B_2 - B_1 = \int_0^s \frac{\cos A}{M} ds; l = L_2 - L_1 = \int_0^s \frac{\sin A}{r} ds; a = A_{21} - A_{12} \pm \pi = \int_0^s \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B ds. \quad (6.1)$$

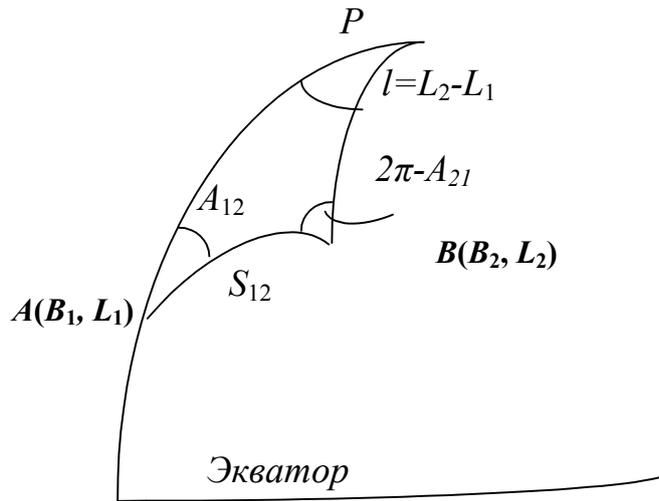


Рис. 6.1

При выборе этих путей следует иметь в виду, что сжатие земного эллипсоида величина малая, а расстояния между точками, для которых необходимо решать задачу, могут существенно различаться. Так, при решении прямой задачи это расстояние ограничивается дальностью действия геодезических приборов (теодолитов, дальномеров, спутниковых и других навигационных систем); при решении обратной задачи при полигональном уравнивании геодезических построений – длинами первоклассных звеньев, в навигации – расположением начальных и конечных пунктов дистанции. Немецкий астроном и геодезист Ф. Гельмерт предложил следующую градацию расстояний в геодезии:

- малые –  $(S / R) \leq 0.01$  (до 60 км);
- средние –  $0.01 < (S / R) \leq 0.1$  (от 60 до 600 км);
- большие –  $(S / R) > 0.1$  (от 600 до 20 000 км).

С развитием науки и техники точность и дальность действия геодезических приборов возрастает, совершенствуются измерительные технологии, методы их математической обработки и представления на основе автоматизации с широким применением ЭВМ. В связи с этим в настоящее время главная геодезическая задача должна с необходимой точностью решаться на любые расстояния, для чего разработаны соответствующие алгоритмы ее решения на ЭВМ.

Вместе с тем полезно проследить, как в историческом аспекте формировались знания в этой области. Следует отметить, что при вычислениях вручную с использованием малой вычислительной техники (арифмометров, калькуляторов) и специальных таблиц, весьма важным фактором являлся объем вычислений. При этом наиболее часто возникала практическая потребность в решении прямой и обратной задач на малые расстояния, реже – на средние и исключительно редко – на большие расстояния.

При этом необходимая точность решения задач понижалась с возрастанием расстояний. Это определялось уровнем развития измерительных технологий и потребностями в геодезическом обеспечении навигационных средств.

В связи с этим различают два пути решения главной геодезической задачи: **прямой и косвенный**. В прямом пути предполагается вычисление значений искомых величин по известным. В косвенном пути вычисляются разности между известными и искомыми величинами, которые затем вводятся в соответствующие значения известных величин для вычисления искомого. Наибольший эффект по сокращению объема вычислений вручную достигается применением косвенного пути решения задачи на малые расстояния, когда разности координат исходного и определяемого пунктов – величины малые и число значащих цифр при их вычислениях вручную существенно меньше.

Известны различные методы решения главной геодезической задачи, но все они приводят к разложению в ряды по степеням малых величин  $S/R$  и эксцентриситета меридианного эллипса. Понятно, что только при малых расстояниях разложения в ряды по степеням  $S/R$  дают эффект, в других случаях применимы только ряды по степеням эксцентриситета, сходимость которых практически не зависит от расстояний. В этом контексте мы рассмотрим наиболее известные два метода решения главной геодезической задачи.

## 6.2. О точности вычислений при решении главной геодезической задачи

Как уже отмечалось ранее, точность любых геодезических вычислений должна быть на порядок выше точности измерений. Так масштабирование государственных геодезических сетей триангуляции 1 класса обеспечивается с относительной погрешностью  $1 : 400\,000 = 2.5 * 10^{-6}$ , точность геодезических азимутов на пунктах Лапласа  $0.5'' = 2.5 * 10^{-6}$ , следовательно, точность вычисления этих величин должна быть не ниже  $2.5 * 10^{-7}$ . Покажем, с какой точностью необходимо вычислять геодезические широты и долготы, чтобы они соответствовали точности азимутов и расстояний. Для этого в первых двух уравнениях системы (4.39) от дифференциалов перейдем к средним квадратическим ошибкам и запишем их в виде

$$m_B \leq \rho'' \frac{\cos A}{M} s \frac{m_s}{s}; m_l \leq \rho'' \frac{\sin A}{N \cos B} s \frac{m_s}{s}.$$

Примем условие, чтобы азимут в равной мере влиял на точность вычислений. Это будет при условии, когда  $A = 45^\circ$ . Длины сторон триангуляции

1 класса не менее 20 км. В результате получаем для близэкваториальных и средних широт  $m_B \approx m_L \leq 0.0002'' \approx 10^{-9}$ . При этом требования к точности долготы снижаются по мере удаления от экватора. Подобные расчеты можно произвести и иным образом. Ошибка во взаимном положении двух смежных пунктов, связанных геодезическими измерениями, определяется поперечным сдвигом, обусловленным ошибкой передачи азимутов, и продольным сдвигом, обусловленным ошибками линейных измерений. Естественно, при построении геодезических сетей любыми методами должно выдерживаться условие равнозначного влияния ошибок угловых и линейных величин на точность. Общеизвестны формулы, определяющие поперечный и продольный сдвиги двух смежных пунктов

$$m_{\text{прод.}} = m_s; m_{\text{попер.}} = \frac{m_\beta}{\rho} s.$$

Отсюда следует условие построения сетей любого класса  $\frac{m_s}{s} = \frac{m_\beta}{\rho}$  при  $m_{\text{прод.}} = m_{\text{попер.}}$ . Для 1 класса мы имеем при ранее принятых условиях

$$m_{\text{полож.}} = s \sqrt{\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 + \left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2} \approx 0.01 \text{ м.}$$

Ошибки в значениях широты и долготы точки определяют ошибки ее положения на меридиане и параллели соответственно, а в совокупности – ошибку положения точки на координатной поверхности.

$$m_{\text{мер.}} = \frac{m_B}{\rho} M; m_{\text{нар.}} = \frac{m_L}{\rho} N \cos B.$$

Отсюда следует, что вычислять широты и долготы необходимо с той же точностью, что определено и другим путем.

Таким образом, получаем, что геодезические широты и долготы на пунктах 1 класса вычисляются с округлением до  $0.0001''$ , а геодезические азимуты принято вычислять с округлением до  $0.001''$ . В каталогах после уравнивания геодезической сети значения широт и долгот помещаются с округлением до  $0.001''$ , азимутов – до  $0.01''$ .

### 6.3. Разложение разностей широт, долгот и азимутов в ряды с начальными аргументами

Из уравнений (6.1) видно, что геодезические широта, долгота и азимут определяемой точки на поверхности эллипсоида являются некоторыми, пока неопределенными функциями от расстояния между определяемой и исходной точками. Это можем записать в виде

$$B_2 = f_1(s); L_2 = f_2(s); A_{21} = f_3(s). \quad (6.2)$$

При условии, что эти функции дифференцируемы и допускают разложение в ряд Тейлора по степеням малой величины  $s$ , запишем

$$\begin{aligned} B_2 &= f_1(0) + f_1'(0)s + f_1''(0)\frac{s^2}{2} + f_1'''(0)\frac{s^3}{6} + \dots + f_1^n(0)\frac{s^n}{n!} + \dots \\ L_2 &= f_2(0) + f_2'(0)s + f_2''(0)\frac{s^2}{2} + f_2'''(0)\frac{s^3}{6} + \dots + f_2^n(0)\frac{s^n}{n!} + \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$A_{21} = f_3(0) + f_3'(0)s + f_3''(0)\frac{s^2}{2} + f_3'''(0)\frac{s^3}{6} + \dots + f_3^n(0)\frac{s^n}{n!} + \dots$$

При условии, когда  $s = 0$ , очевидно будем иметь  $B_1 = f_1(0)$ ;  $L_1 = f_2(0)$ ;  $B_1 = f_3(0)$ , и уравнения (6.3) запишутся в виде

$$\begin{aligned} b &= B_2 - B_1 = \left(\frac{dB}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \dots + \left(\frac{d^nB}{ds^n}\right)_1 \frac{s^n}{n!} + \dots \\ l &= L_2 - L_1 = \left(\frac{dL}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3L}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \dots + \left(\frac{d^nL}{ds^n}\right)_1 \frac{s^n}{n!} + \dots \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$a = A_{21} - A_{12} \pm \pi = \left(\frac{dA}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3A}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \dots + \left(\frac{d^nA}{ds^n}\right)_1 \frac{s^n}{n!} + \dots$$

В уравнениях (6.4), в отличие от уравнений (6.3), вид функций, связывающих координаты двух точек, определен, а именно, выражения для первых производных нам известны из (4.39), которые мы запишем с учетом принятых обозначений.

$$\left(\frac{dB}{ds}\right)_1 = \frac{\cos A_{12}}{c} V_1^3; \left(\frac{dL}{ds}\right)_1 = \frac{\sin A_{12}}{c \cos B_1} V_1; \left(\frac{dA}{ds}\right)_1 = \frac{\cos A_{12}}{c} V_1 \operatorname{tg} B_1. \quad (6.5)$$

Вычисление последующих производных не вызывает труда, когда вторая производная равна производной от первой и т. д. Здесь применяем правила дифференцирования сложных функций, неявно зависящих от переменной  $s$ .

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_1 &= \frac{d}{ds} \left(\frac{dB}{ds}\right)_1 = \frac{d}{ds} \left(\frac{V^3 \cos A}{c}\right)_1 = \frac{V_1^3}{c} \frac{\partial}{\partial A} (\cos A)_1 \left(\frac{dA}{ds}\right)_1 + \frac{\cos A_{12}}{c} \frac{\partial}{\partial B} (V^3)_1 \left(\frac{dB}{ds}\right)_1 = \\ &= -\frac{V_1^4 \sin^2 A_{12}}{c^2} \operatorname{tg} B_1 - 3e'^2 \frac{\cos^2 A_{12}}{c^2} V_1^4 \sin B_1 \cos B_1 = \\ &= -\left(\frac{\operatorname{tg} B_1}{R_1^2}\right) (\sin^2 A_{12} + 3e'^2 \cos^2 A_{12} \cos^2 B_1). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Действуя аналогично и опуская промежуточные действия, получаем для вторых производных от  $f_2(s)$  и  $f_3(s)$  следующие выражения.

$$\left(\frac{d^2 L}{ds^2}\right)_1 = 2 \frac{\operatorname{tg} B_1 \sin A_{12}}{N_1^2 \cos B} \cos A_{12}; \left(\frac{d^2 A}{ds^2}\right)_1 = \frac{\sin A_{12} \cos A_{12}}{N_1^2} (V_1^2 + 2 \operatorname{tg}^2 B_1). \quad (6.7)$$

Возникает вопрос, сколько членов разложения следует брать в (6.4) для обеспечения необходимой точности вычислений широт, долгот и азимутов. Заметим из (6.5) – (6.7), что с возрастанием порядка численные значения производных уменьшаются. При этом будут уменьшаться и численные значения членов разложений (6.4) не хуже, чем  $(s/R)^n$ , где  $n$  – его порядковый номер, и при расстояниях  $s \leq 30$  км будем иметь малые величины первого, второго, третьего и т. д. порядка:

$$(s/R)^1 \leq 5 \cdot 10^{-3}; (s/R)^2 \leq 2 \cdot 10^{-5}; (s/R)^3 \leq 10^{-7}; (s/R)^4 \leq 5 \cdot 10^{-10} \text{ и т.д.}$$

Таким образом, видим, что достаточно удерживать три члена разложения, при этом точность вычислений, оцененная с помощью остаточного члена разложений в форме Лагранжа, меньше требуемой точности вычислений широт, долгот и азимутов. Здесь говорят, что для решения задачи на малые расстояния достаточно удерживать малые величины третьего порядка.

Третьи производные в (6.4) получаются как производные от вторых, выражения которых приведем без вывода, опуская слагаемые, содержащие множителями  $e'^2$ , значение которых меньше требуемой точности вычислений (имея в виду, что  $e'^2 \approx 7 \cdot 10^{-3}$  – малая величина первого порядка).

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3 B}{ds^3}\right)_1 &= -\frac{\cos A_{12}}{N_1^3} \sin^2 A_{12} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 B_1) \\ \left(\frac{d^3 L}{ds^3}\right)_1 &= \frac{2 \sin A_{12}}{N_1^3 \cos B_1} (\cos^2 A_{12} (1 + 4 \operatorname{tg}^2 B_1) - \operatorname{tg}^2 B_1) \\ \left(\frac{d^3 A}{ds^3}\right)_1 &= -\frac{\sin A_{12}}{N_1^3} \operatorname{tg} B_1 (\cos^2 A_{12} (5 + 6 \operatorname{tg}^2 B) - \sin^2 A_{12} (1 - 2 \operatorname{tg}^2 B)) \end{aligned} \quad (6.8)$$

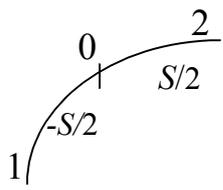
Подставляя полученные выражения производных в (6.4), получим рабочие формулы для вычислений, наиболее удобные для решения прямой геодезической задачи на расстояния до 30 км. В формулах значения производных (коэффициентов разложений) вычисляются по координатам начальной точки, отсюда название формул.

#### **6.4. Разложение разностей широт, долгот и азимутов в ряды со средними аргументами**

Как отмечено, формулы для решения главной геодезической задачи, основанные на рядах с начальными аргументами, имеют ограниченные

возможности. Рассмотрим один из возможных путей их усовершенствования, основанный на применении рядов со средними аргументами. При этом мы также будем удерживать в формулах для вычислений малые величины третьего порядка.

Пусть мы имеем некоторую геодезическую линию  $s_{12}$  (рис. 6.2), в середине которой находится точка 0 с координатами  $B_0$  и  $L_0$ , геодезические расстояния от которой до точек 1 и 2 будут соответственно  $-s/2$  и  $s/2$ . Действуя аналогично тому, как это делали ранее, запишем следующие разложения для широты:



$$\begin{aligned}
 B_2 - B_0 &= \left(\frac{dB}{ds}\right)_0 \frac{s}{2} + \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{8} + \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{48} + \dots \\
 B_1 - B_0 &= -\left(\frac{dB}{ds}\right)_0 \frac{s}{2} + \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{8} - \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{48} + \dots
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Рис. 6.2

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$B_2 - B_1 = b = \left(\frac{dB}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{24} + \dots, \tag{6.10}$$

которое выражает разность широт, как и первое уравнение (6.4).

Аналогично получаем для разностей долгот и азимутов

$$\begin{aligned}
 L_2 - L_1 = l &= \left(\frac{dL}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^3L}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{24} + \dots \\
 A_{21} - A_{12} \pm \pi = a &= \left(\frac{dA}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^3A}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{24} + \dots
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Отличие выражений (6.10) – (6.11) от (6.4) состоит в том, что они содержат меньшее число слагаемых и проще для вычислений, но значения производных здесь следует вычислять по широте и азимуту середины линии. Возникает вопрос, быть может, эти значения равны средним значениям, получаемым по формулам

$$B_m = (B_1 + B_2) / 2 \text{ и } A_m = (A_{12} + A_{21} \pm \pi) / 2.$$

Проверим, так ли это, для чего возьмем полусуммы уравнений (6.9) и аналогичных им уравнений для долгот и азимутов, в результате получим

$$B_m - B_0 = \left( \frac{d^2 B}{ds^2} \right)_0 \frac{s^2}{8} + \dots; L_m - L_0 = \left( \frac{d^2 L}{ds^2} \right)_0 \frac{s^2}{8} + \dots; A_m - A_0 = \left( \frac{d^2 A}{ds^2} \right)_0 \frac{s^2}{8} + \dots \quad (6.12)$$

Отсюда видно, что средние координаты отличаются от координат середины геодезической линии на малые величины второго порядка. При этом на данной геодезической линии существуют четыре различные точки со средними координатами. Это обстоятельство следует учитывать при дальнейшем выводе рабочих формул.

В формулах (6.10) – (6.11) коэффициенты разложений представлены производными, являющимися функциями широты и азимута середины геодезической линии, значения которых неизвестны. Мы можем вычислить средние широту и азимут, если известны их значения в двух точках. Поэтому перейдем в коэффициентах указанных формул к средним широтам и азимутам (средним аргументам). При этом будем иметь в виду порядок малых величин (6.12). Для широт имеем

$$\left( \frac{dB}{ds} \right)_0 = \left( \frac{dB}{ds} \right)_m + \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{dB}{ds} \right)_m (B_0 - B_m) + \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{dB}{ds} \right)_m (A_0 - A_m) + \dots \quad (6.13)$$

$$\left( \frac{d^3 B}{ds^3} \right)_0 = \left( \frac{d^3 B}{ds^3} \right)_m. \quad (6.14)$$

Учитывая значения разностей из (6.12), выражения для производных, полученные ранее (6.5) – (6.8), а также вычисляя частные производные

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{dB}{ds} \right)_m = -\frac{\sin A_m}{M_m}; \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{dB}{ds} \right)_m = -\frac{3e'^2 \cos A_m \cos B_m \sin B_m}{N_m}, \quad (6.15)$$

получаем для (6.10) выражение в виде

$$b = \frac{s \cos A_m}{M_m} \left( 1 + \frac{s^2 \sin^2 A_m}{12N_m^2} + \frac{s^2 \operatorname{tg}^2 B_m \sin^2 A_m}{8N_m^2} \right). \quad (6.16)$$

Действуя аналогично, получаем для разностей долгот и азимутов

$$l = \frac{s \sin A_m}{N_m \cos B_m} \left( 1 + \frac{s^2 \sin^2 A_m \operatorname{tg}^2 B_m}{24N_m^2} - \frac{s^2 \cos^2 A_m}{24N_m^2} \right) \quad (6.17)$$

$$a = \frac{s \sin A_m \operatorname{tg} B_m}{N_m} \left( 1 + \frac{s^2 \sin^2 A_m}{12N_m^2} + \frac{s^2 \cos^2 A_m}{12M_m^2} - \frac{s^2 \sin^2 A_m \operatorname{tg}^2 B_m}{24N_m^2} \right)$$

Заметим, что в правых частях полученных уравнений (6.16) – (6.17) дробные выражения, стоящие в скобках, являются малыми величинами

третьего порядка, их можно для удобства вычислений с принятой точностью принять равными главным членам разложений, и тогда можем записать

$$\begin{aligned} b &= \frac{s \cos A_m}{M_m} \left( 1 + \frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{24} \right); \\ l &= \frac{s \sin A_m}{N_m \cos B_m} \left( 1 - \frac{b^2}{24} + \frac{a^2}{24} \right); \\ a &= \frac{s \sin A_m}{N_m} \operatorname{tg} B_m \left( 1 + \frac{b^2}{12} + \frac{(2 - \sin^2 B_m)}{24} l^2 \right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Здесь вычисления ведутся в радианной мере, а в последнем уравнении, в поправочном члене принято

$$a = l \sin B_m. \quad (6.19)$$

### 6.5. Порядок решения прямой геодезической задачи по формулам со средними аргументами

При решении прямой геодезической задачи известны следующие величины:  $B_1, L_1, S_{12}, A_{12}$ , требуется найти:  $B_2, L_2, A_{21}$ . При этом очевидны уравнения:

$$B_2 = B_1 + b; \quad L_2 = L_1 + l; \quad A_{21} = A_{12} + a \pm \pi. \quad (6.20)$$

При вычислении обратного азимута знак плюс берется, когда прямой азимут меньше  $\pi$ , и знак минус – когда он больше  $\pi$ .

Особенностью применения формул (6.18) при вычислениях искомых разностей является то, что нам неизвестны средние значения широт и азимутов, поэтому задача решается методом последовательных приближений. На первом этапе принимают  $(A_m)_{(1)} = A_{12}$ ;  $(B_m)_{(1)} = B_1$ , а значения разностей, стоящих в скобках уравнений (6.18), равными нулю. Получают первоначальные значения разностей из этих уравнений  $b_{(1)}, l_{(1)}, a_{(1)}$ , с учетом которых получают значения средних широт и долгот по формулам:

$$(B_m)_{(1)} = B_1 + b_{(1)} / 2; \quad A_m = A_{12} + a_{(1)} / 2.$$

Для расстояний до 30 км второе приближение дает искомые разности с достаточной точностью, для контроля выполняют третье приближение. Получив значения разностей, искомые величины находят по формулам (6.20).

## 6.6. Порядок решения обратной геодезической задачи

Здесь известными величинами являются  $B_1, B_2, L_1, L_2$ , требуется определить:  $s_{12}, A_{12}, A_{21}$ . Среднюю широту определяем по формуле  $B_m = (B_1 + B_2) / 2$  и разности широт и долгот  $b = B_2 - B_1; l = L_2 - L_1$ .

Далее замечаем, что в (6.18) первые два уравнения можно записать с учетом (6.19) в виде

$$b = \frac{s \cos A_m}{M_m} \left( 1 + \frac{l^2}{12} + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} \right); l = \frac{s \sin A_m}{N_m \cos B_m} \left( 1 - \frac{b^2}{24} + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} \right). \quad (6.21)$$

Разделив второе уравнение на первое и ограничившись принятой точностью, получим после несложных преобразований уравнение для вычисления среднего азимута

$$\operatorname{tg} A_m = \frac{l \cos B_m}{b} \frac{N_m}{M_m} \left( 1 + \frac{b^2}{24} + \frac{l^2}{12} \right).$$

Из любого из уравнений (6.21) выражаем расстояние  $s$  и вычисляем его с контролем по формулам

$$s = \frac{b M_m}{\cos A_m} \left( 1 - \frac{l^2}{12} - \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} \right); s = \frac{l N_m \cos B_m}{\sin A_m} \left( 1 + \frac{b^2}{24} - \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} \right).$$

Для вычисления разности азимутов используем третье уравнение (6.18), затем вычисляем искомые прямой и обратный азимуты по формулам

$$A_{12} = A_m - a / 2; A_{21} = A_m + a / 2 \pm \pi.$$

## 6.7. Способ Бесселя для решения главной геодезической задачи

Рассмотренный способ решения главной геодезической задачи пригоден для малых расстояний, мы привели формулы, обеспечивающие необходимую точность при расстояниях до 30 км.

Немецкий геодезист и астроном Ф. Бессель обратил внимание на то, что теорема Клеро для геодезической линии земного эллипсоида является аналогом теоремы синусов сферической тригонометрии для полярного сферического треугольника. Если в системе дифференциальных уравнений для геодезической линии земного эллипсоида (4.40)

$$\frac{du}{dS} = \frac{V}{a} \cos A; \frac{dL}{dS} = \frac{\sin A}{a \cos u}; \frac{dA}{dS} = \frac{V}{a} \operatorname{tgu} \sin A \quad (6.22)$$

положить эксцентриситет, равный нулю, получим на сфере единичного радиуса

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \cos\alpha; \frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}; \frac{d\alpha}{d\sigma} = \operatorname{tg}\varphi \sin\alpha. \quad (6.23)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\sigma$  – сферические: азимут, широта, долгота и расстояние.

Ф. Бессель рассмотрел полярные треугольники на сфере и эллипсоиде при условии, чтобы аргументы теоремы Клеро (азимуты и широты) были равны на сфере и эллипсоиде. Тогда, разделив соответствующие уравнения (6.22) и (6.23) получим, при условии

$$\alpha = A; \quad \varphi = u \quad (6.24)$$

следующие дифференциальные уравнения:

$$ds = \frac{a}{V} d\sigma = a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\sigma; dL = \frac{d\lambda}{V} = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\lambda. \quad (6.25)$$

Интегрируя эти уравнения, получим для расстояний и долгот на эллипсоиде интегральные выражения:

$$s = a \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\sigma; L_2 - L_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\lambda. \quad (6.26)$$

Полученные уравнения вместе с (6.24) определяют зависимости всех элементов соответствующего сфероидического и сферического полярных треугольников по Бесселю. Это позволяет применить формулы сферической тригонометрии для установления связи между величинами, входящими под знаки интегралов (6.26).

На рис. 6.3 имеем геодезическую линию, проходящую через некоторые две точки 1 и 2, пересекающую экватор в точке 0. Геодезические азимуты соответственно равны в этих точках:  $A_1$ ,  $2\pi - A_2$  и  $A_0$  и широты:  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_0 = 0$ .

По условию Бесселя эти сфероидические величины сохраняются на сфере единичного радиуса, где длины больших кругов выражены в радианной мере и их значения показаны на рисунке. Точка  $P$  – полюс, а дуги  $P0$ ,  $P1$ ,  $P2$  – меридианы соответствующих точек.

Для дальнейших выводов введем условные долготы  $\lambda_0$  и сферические расстояния  $\sigma_0$ , отсчитанные от экваториальной точки геодезической линии до текущей. При вычислении определенных интегралов (6.26) участвуют их разности, поэтому искомые величины – расстояние и разность долгот получают как разности

$$\sigma = \sigma_{02} - \sigma_{01}; \quad \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_{02} - \lambda_{01}.$$

Применяя аналогии Непера к прямоугольному сферическому треугольнику  $011_0$ , запишем

$$\begin{aligned}
\cos(\pi/2 - A_0) &= \operatorname{ctg}\sigma_0 \operatorname{ctg}(\pi/2 - \lambda_0); \longrightarrow \sin A_0 = \operatorname{ctg}\sigma_0 \operatorname{tg}\lambda_0 \\
\cos\sigma_0 &= \sin(\pi/2 - u) \sin(\pi/2 - \lambda_0) \longrightarrow \cos\sigma_0 = \cos u \cos\lambda_0 \\
\cos(\pi/2 - u) &= \sin\sigma_0 \sin(\pi/2 - A_0) \longrightarrow \sin u = \sin\sigma_0 \cos A_0
\end{aligned}
\tag{6.27}$$

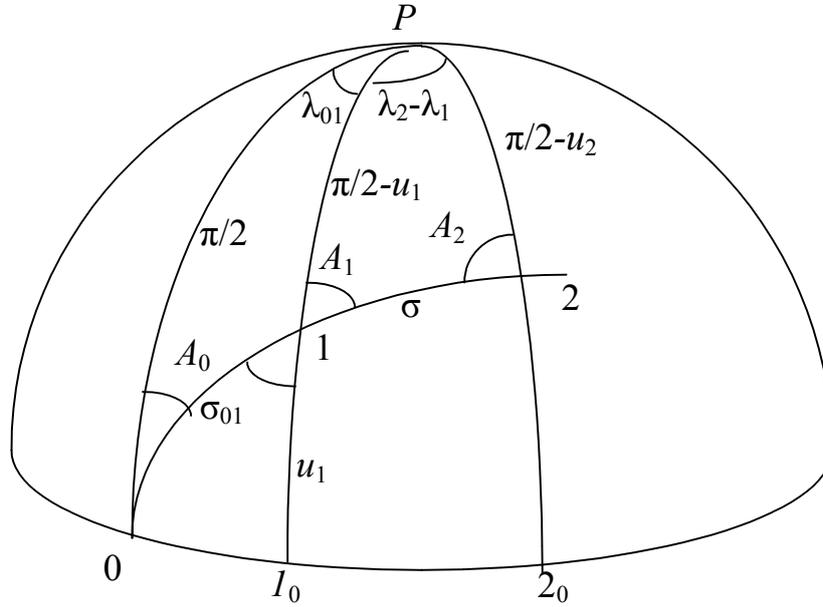


Рис. 6.3

Дифференцируя первое из уравнений (6.27) по переменным величинам (азимут  $A_0$  – величина постоянная для данной геодезической линии), получаем

$$\frac{\cos^2 \sigma_0}{\cos^2 \lambda_0} d\lambda_0 = \sin A_0 d\sigma_0.
\tag{6.28}$$

Тогда, с учетом второго и третьего уравнений (6.27) можем записать

$$\cos^2 u d\lambda_0 = \sin A_0 d\sigma_0; \cos^2 u = 1 - \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma_0.
\tag{6.29}$$

Разложим подынтегральные выражения (6.26) в биномиальный ряд по степеням малых величин  $e^2 \cos^2 u$  ( $e^2 \sin^2 u \leq 7 \cdot 10^{-3}$ ):

$$(1 - e^2 \cos^2 u)^{1/2} = 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 u - \frac{e^4}{8} \cos^4 u - \frac{e^6}{16} \cos^6 u - \frac{5e^8}{132} \cos^8 u - \dots
\tag{6.30}$$

$$(1 + e^2 \sin^2 u)^{1/2} = 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 u - \frac{e^4}{8} \sin^4 u + \frac{e^6}{16} \sin^6 u - \frac{5e^8}{132} \sin^8 u + \dots$$

При этом заметим порядок величин членов разложений:

$$\frac{e^2}{2} \cos^2 u \leq 3,5 * 10^{-3}; \quad \frac{e^4}{8} \cos^4 u \leq 6 * 10^{-6};$$

$$\frac{e^6}{16} \cos^6 u \leq 2.1 * 10^{-8}; \quad \frac{5e^8}{132} \cos^8 u \leq 7 * 10^{-11}.$$

Следовательно, для обеспечения необходимой точности вычислений достаточно удерживать три члена разложения. Можно заметить то, что здесь степени разложения характеризуют малые величины определенного порядка, как и в способе со средними аргументами, но преимущество данных формул в том, что величины членов разложения (6.30) практически не зависят от расстояния, а определяются степенями малой величины эксцентриситета меридианного эллипса.

С учетом изложенного запишем интегральные выражения (6.26) в виде

$$s = b \int_{\sigma_{01}}^{\sigma_{02}} \left( 1 + \frac{e^{/2}}{2} \sin^2 u - \frac{e^{/4}}{8} \sin^4 u + \frac{e^{/6}}{16} \sin^6 u - \dots \right) d\sigma_0 =$$

$$= b\sigma + b \frac{e^{/2}}{2} \int_{\sigma_{01}}^{\sigma_{02}} \left( \sin^2 u - \frac{e^{/2}}{4} \sin^2 u + \frac{e^{/4}}{8} \sin^4 u + \dots \right) d\sigma_0 \quad (6.31)$$

$$L_2 - L_1 = l = \int_{\lambda_{01}}^{\lambda_{02}} \left( 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 u - \frac{e^4}{8} \cos^4 u - \frac{e^6}{16} \cos^6 u - \dots \right) d\lambda_0 \quad (6.32)$$

С учетом третьего уравнения (6.27) можем записать для (6.31), введя обозначение для постоянной величины  $k = e' \cos A_0$ ,

$$s = b\sigma + b \int_{\sigma_{01}}^{\sigma_{02}} \left( \frac{k^2}{2} \sin^2 \sigma_0 - \frac{k^4}{8} \sin^4 \sigma_0 + \frac{k^6}{16} \sin^6 \sigma_0 \right) d\sigma_0. \quad (6.33)$$

Интеграл долготы (6.32) с учетом уравнений (6.29) запишем в виде

$$l = \omega - \frac{e^2}{2} \int_{\sigma_{01}}^{\sigma_{02}} \left( 1 + \frac{e^2}{4} (1 - \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma_0) + \frac{e^4}{8} (1 - \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma_0)^2 + \dots \right) \sin A_0 d\sigma_0, \quad (6.34)$$

где принято  $\omega = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_{02} - \lambda_{01}$  – разность сферических долгот.

Производя почленное интегрирование (6.33) и (6.34), получаем после тождественных преобразований с принятой точностью:

для расстояния

$$s = A\sigma + \sin 2\sigma_{01} (B + C \cos 2\sigma_{01}) - \sin 2\sigma_{02} (B + C \cos 2\sigma_{02}), \quad (6.35)$$

где приняты обозначения постоянных коэффициентов:

$$A = b \left( 1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64} + \frac{5k^6}{256} - \dots \right); \quad B = b \left( \frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{32} + \frac{15k^6}{1024} - \dots \right); \quad C = b \left( \frac{k^4}{128} - \frac{3k^6}{512} + \dots \right) \quad (6.36)$$

и для разности геодезических долгот

$$l = \omega - \sin A_0 (A_1 \sigma + B_1 (\sin 2\sigma_{02} - \sin 2\sigma_{01})), \quad (6.37)$$

где приняты обозначения постоянных коэффициентов:

$$A_1 = \frac{e^2}{2} \left(1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \dots\right) - \frac{e^4}{16} \cos^2 A_0 (1 + e^2 + \dots) + \frac{3e^6}{128} \cos^4 A_0 (1 + \dots);$$

$$B_1 = \frac{e^4}{32} \cos^2 A_0 (1 + e^2 + \dots) - \frac{e^6}{64} \cos^4 A_0 (1 + \dots)$$
(6.38)

Таким образом, получены основные формулы для решения главной геодезической задачи на большие расстояния. При вычислениях на ЭВМ можно заметить, что их объем здесь несущественно отличается от вычислений по формулам со средними аргументами. Поэтому в современных условиях лучше применять способ Бесселя для решения задачи на любые расстояния.

### 6.8. О современных требованиях к решению главной геодезической задачи

Как уже отмечалось ранее, современные стандарты геодезических измерений, основанные прежде всего на спутниковых системах позиционирования *ГЛОНАСС (РФ)* и *GPS-NAVSTAR (США)*, могут обеспечивать точность определения абсолютных координат точек земной поверхности и околоземного пространства практически на порядок выше, чем классические астрономические определения. Так, если положение астрономических пунктов Лапласа, на которые опираются первоклассные звенья триангуляции 1 класса, характеризуются ошибками 10 и более метров, то современные системы позволяют обеспечивать точность до 1-3 м. Существенную роль в повышении качества всех видов геодезических измерений играют компьютерные технологии автоматизации измерений и их математической обработки. По материалам уравнивания астрономо-геодезической сети 1 – 2 классов на всей территории бывшего Советского Союза получены ошибки взаимного положения смежных пунктов порядка 5 – 7 см, а спутниковыми системами обеспечивается взаимное положение пунктов на расстояниях до 20 км с ошибками порядка 7 – 10 мм. Следует отметить при этом, что спутниковые системы находятся в стадии совершенствования и позволяют определять с высокой точностью взаимное положение пунктов на большие расстояния.

Таким образом, можно говорить о том, что конец XX и начало XXI века являются эпохой революционных изменений в повышении качества

топографо-геодезической и картографической продукции, их представления и практического применения.

К настоящему времени разработаны различные методы решения главной геодезической задачи на любые расстояния, основанные как на совершенствовании способа Бесселя, так и альтернативные ему. Естественно, в современных условиях задача должна решаться достаточно надежно и с достаточной точностью на любые расстояния (от 20 до 20 000 км), удовлетворяющей высокой точности измерений.

Рассмотрим порядок решения прямой и обратной задач на любые расстояния на примере способа Бесселя. Для этого используем приведенные нами формулы и обозначения, принятые на рисунке 6.3.

### Прямая геодезическая задача

1. Вычисление приведенной широты исходной точки  $l$  по формуле

$$\operatorname{tg} u_1 = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B_1.$$

2. Вычисление вспомогательных величин из решения прямоугольного сферического треугольника  $011_0$

$$\operatorname{tg} \sigma_{01} = \frac{\operatorname{tg} u_1}{\cos A_1}; \quad \operatorname{tg} A_0 = \cos \sigma_{01} \operatorname{tg} A_1.$$

3. Вычисление  $\sigma$  из формулы (6.35) и  $\sigma_{02} = \sigma_{01} + \sigma$  методом последовательных приближений (не более трех)

4. Решение прямоугольных сферических треугольников  $011_0$  и  $022_0$

$$\operatorname{tg} A_2 = \frac{\operatorname{tg} A_0}{\cos \sigma_{02}}; \quad \operatorname{tg} B_2 = \frac{\operatorname{tg} u_2}{\sqrt{1 - e^2}} = -\frac{\operatorname{tg} \sigma_{02} \cos A_2}{\sqrt{1 - e^2}};$$

$$\operatorname{tg} \lambda_{01} = \sin A_0 \operatorname{tg} \sigma_{01}; \quad \operatorname{tg} \lambda_{02} = \sin A_0 \operatorname{tg} \sigma_{02};$$

$$\omega = \lambda_{02} - \lambda_{01}.$$

5. Определение геодезической долготы  $L_2 = L_1 + l$ , где  $l$  определяется по формуле (6.37).

### Обратная геодезическая задача

1. Вычисление приведенных широт точек 1 и 2:

$$\operatorname{tg} u_1 = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B_1; \quad \operatorname{tg} u_2 = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B_2.$$

2. Совместное применение формул, следуемых из (6.37), решения полярного сферического треугольника  $P12$  и теоремы Клеро:

$$\omega = l + \sin A_0 (A_1 \sigma + B_1 (\sin 2\sigma_{02} - \sin 2\sigma_{01}));$$

$$\cos \sigma = \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos \omega;$$

$$\sin A_0 = \cos u_1 \sin A_1 = \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sin \omega}{\sin \sigma} \quad ; \quad \sin \sigma_{01} = \frac{\sin u_1}{\cos A_0}$$

для вычисления  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma_{01}$  и  $A_0$  последовательными приближениями (не более трех).

3. Вычисление азимутов из треугольника  $P12$

$$\sin A_1 = \cos u_2 \frac{\sin \omega}{\sin \sigma} \quad ; \quad \sin A_2 = \cos u_1 \frac{\sin \omega}{\sin \sigma}.$$

4. Вычисление расстояния  $s$  по формуле (6.35).

Отметим, что приведенные формулы удобны для составления алгоритма и программы вычислений на ЭВМ при решении задачи на любые расстояния. Вообще говоря, на поверхности эллипсоида, как и на любой замкнутой поверхности, между двумя точками можно провести не одну, а две геодезические линии. При решении геодезических задач под расстоянием понимают длину кратчайшей из этих кривых.

### ***Вопросы для самоконтроля по разделу 6***

1. Сущность главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида.
2. Градация расстояний в геодезии по Гельмерту.
3. Пути решения главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида.
4. Обосновать точность вычислений при решении главной геодезической задачи.
5. Методы решения главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида.
6. Пояснить порядок вычисления коэффициентов разложений разностей широт, долгот и азимутов в ряды с начальными аргументами.
7. Показать преимущества рядов со средними аргументами.
8. В чем смысл неоднозначности средних точек геодезической линии?
9. Смысл способа Бесселя для решения главной геодезической задачи.
10. В чем отличие современных требований к решению главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида от традиционных?

## 7. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

### 7.1. Применение плоских координат в геодезии

Мы рассмотрели решение геодезических задач на поверхности земного эллипсоида при различных расстояниях между точками. Отметим, что в большинстве случаев геодезической практики измерения производятся между точками, удаленными друг от друга на незначительные расстояния. Более того, геодезические построения, создаваемые в качестве обоснования для крупномасштабных топографических съемок инженерных объектов, населенных пунктов и др., как правило, располагаются на ограниченных по площади территориях. В этих случаях более удобной и простой является система координат на плоскости.

В системе плоских координат решение всех задач производится значительно проще – по формулам плоской тригонометрии. В геодезии, как известно, применяются две системы плоских координат: **декартовы**е **прямоугольные** –  $x$ ,  $y$  и **полярные** – расстояние  $s$  и дирекционный угол  $\alpha$ . Со времен Гаусса в геодезии у нас в стране и в ряде других стран принята левая система координат (рис. 7.1).

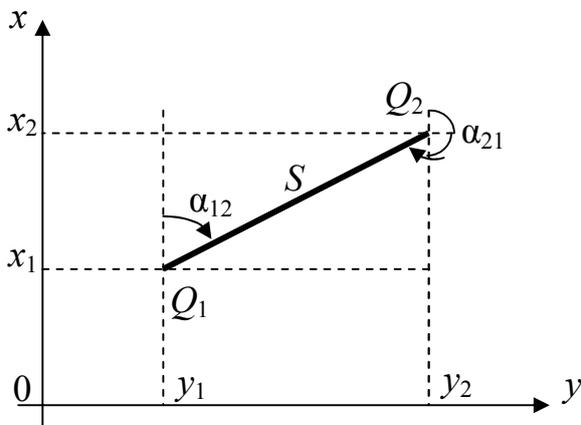


Рис. 7.1

В прямой геодезической задаче на плоскости даны прямоугольные координаты  $x_1, y_1$  одной точки и полярные координаты  $S, \alpha_{12}$  другой. Требуется найти прямоугольные координаты  $x_2, y_2$  другой точки. Задача решается по формулам

$$x_2 = x_1 + S \cos \alpha_{12};$$

$$y_2 = y_1 + S \sin \alpha_{12}.$$

Обратный дирекционный угол  $\alpha_{21}$  отличается от прямого на  $180^\circ$ .

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} \pm 180^\circ.$$

В обратной задаче по известным прямоугольным координатам  $x_1, y_1, x_2, y_2$  двух точек требуется найти полярные координаты. Задача решается по формулам

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Видно, что указанные формулы существенно проще формул, которые мы рассмотрели для решения аналогичных задач на поверхности эл-

эллипсоида даже при малых расстояниях. Поэтому при решении многих задач в геодезии применяют систему плоских координат, а поверхность эллипсоида заменяют плоскостью.

Поверхность эллипсоида не изометрична плоскости, т. е. не может быть развернута на ней без деформаций и разрывов. Поэтому в геодезии, как и в картографии применяют различные законы взаимного отображения (проекции) поверхности эллипсоида на плоскости. В **математической картографии** подробно рассматриваются различные виды проекций, учет искажений геометрических элементов эллипсоида при их отображении на плоскости с целью создания самых различных карт от наиболее точных – топографических, до обзорных – географических (**картографические проекции**).

Анализ проекций для решения геодезических задач на плоскости (**геодезических проекций**), получивших наибольшее применение в мировой геодезической практике, показывает следующее:

во-первых, геодезические проекции получают на основе теории **конформного (равноугольного) отображения** поверхностей, когда частный масштаб длин в точке не зависит от направления и сохраняется подобие бесконечно малых фигур;

во-вторых, геодезические построения на отдельных объектах и в отдельных государствах, как правило, охватывают небольшие по сравнению с площадью Земли территории;

в-третьих, все геодезические проекции относятся к весьма узкому классу **перспективных и симметричных проекций**, когда все виды искажений возрастают по мере удаления от линии или точки симметрии;

в-четвертых, в геодезических проекциях, по крайней мере, один из меридианов эллипсоида на плоскости изображается прямой линией и принимается за одну из координатных осей, в левой системе – за ось абсцисс и называется **осевым меридианом**.

У нас в стране, других странах Европы и бывшего Советского Союза до последнего времени наиболее широкое применение для создания топографических карт и для обработки геодезических измерений нашла **проекция Гаусса – Крюгера**. Вообще говоря, во всех странах, как правило, для этих целей применяется одна и та же проекция (одна система плоских координат), что обеспечивает удобства совместного применения топографических карт, каталогов координат геодезических пунктов и результатов геодезических измерений при инженерно-геодезическом обеспечении проектирования, строительства и эксплуатации самых различных объектов.

Заметим, что К. Гаусс в 1825 году применил конформную проекцию для математической обработки результатов градусных измерений, выпол-

ненных вдоль Ганноверского меридиана. Удобство этой проекции заключалось в том, что искажения всех измеренных величин в ряде триангуляции, вытянутом вдоль меридиана, при отображении на плоскость были пренебрегаемо малы. Вычислив плоские координаты исходных пунктов по геодезическим, уравнивание ряда и все вычисления в нем производили на плоскости. Основные формулы для вычислений и результаты геодезических работ Гаусса впервые были опубликованы известным немецким геодезистом О. Шрейбером в 1866 году. В 1917 году в Германии и Австрии проекция Гаусса с трехградусными координатными зонами рекомендована для кадастровых работ. И лишь в 1919 году немецкий геодезист Л. Крюгер предложил проекцию Гаусса с шестиградусными зонами для создания топографических карт и математической обработки геодезических измерений, для чего были составлены специальные таблицы, существенно облегчающие вычисления. В результате проекция стала находить все большее применение в различных странах как проекция Гаусса – Крюгера. В СССР проекция Гаусса – Крюгера впервые применялась с 1928 года для обработки Донбасской триангуляции известным советским геодезистом и маркшейдером Н.Г. Келлем.

Повсеместное применение в СССР проекция Гаусса – Крюгера нашла после введения системы геодезических координат 1942 года на поверхности референц-эллипсоида Красовского (до этого применялся эллипсоид Бесселя). Были разработаны специальные таблицы как для логорифмических, так и нелогорифмических вычислений для широт территории СССР. В разработку таблиц наибольший вклад внесли известные советские ученые – геодезисты Ф.Н. Красовский, А.А. Изотов, А.М. Вировец, Д.А. Ларин, Б.Н. Рабинович.

## 7.2. Общие сведения из теории конформного отображения поверхностей

Под **взаимным отображением** поверхностей понимают взаимно однозначное соответствие их точек, когда одной точке поверхности соответствует одна и только одна точка другой поверхности.

На поверхности эллипсоида, как известно, положение точек определяется геодезическими широтами  $B$  и долготами  $L$ . На плоскости – декартовыми прямоугольными координатами  $x$ ,  $y$ .

Таким образом, любое взаимное отображение поверхности эллипсоида и плоскости определяется функциями

$$x = f_1(B, L); \quad y = f_2(B, L); \quad (7.1)$$

$$B = \varphi_1(x, y); \quad L = \varphi_2(x, y). \quad (7.2)$$

Для конформных отображений эти функции должны быть **аналитическими (дифференцируемыми) функциями комплексных переменных** и записаны в виде

$$x + iy = f(B + iL); \quad (7.3)$$

$$B + iL = \varphi(x + iy). \quad (7.4)$$

Кроме того, получим аналитическое представление основного свойства конформных проекций, заключающегося в том, что масштаб длин не зависит от направления. На рисунке 7.2 имеем изображение на плоскости меридиана  $AB$  и параллели  $AC$  точки  $A$ . Угол  $\gamma$ , образованный прямой, параллельной изображению осевого меридиана (оси абсцисс) и меридиана точки  $A$ , – сближение меридиана в данной точке.

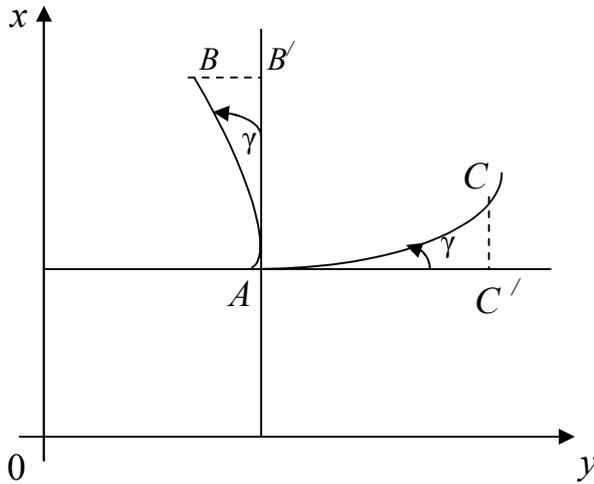


Рис. 7.2

Из подобных треугольников  $ABB'$  и  $ACC'$  запишем

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \cos \gamma; \quad (7.5)$$

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC} = \sin \gamma.$$

Частным масштабом длин  $m$  называют отношение бесконечно малого отрезка на плоскости к соответствующему ему отрезку на эллипсоиде. Поскольку в конформных проекциях масштаб не зависит от направления, то для его вычисления можно взять отношение любых отрезков.

Возьмем меридиан и параллель эллипсоида и их изображение на плоскости, для которых можем записать

$$m = \frac{AB}{MdB} = \frac{AC}{rdL}. \quad (7.6)$$

Полные дифференциалы плоских координат запишем, учитывая (7.1) или (7.3), в следующем виде:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial L} dL; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial B} dB + \frac{\partial y}{\partial L} dL. \quad (7.7)$$

где слагаемые в правых частях выражают частные дифференциалы и характеризуют изменения плоских координат при изменении только широты или только долготы на эллипсоиде. Это будет иметь место при движении точки по меридиану или параллели, следовательно, можем записать согласно рис. 7.2, формулы (7.5), учитывая (7.6), в виде

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial B} dB}{mMdB} = \frac{\frac{\partial y}{\partial L} dL}{mrdL} = \cos \gamma; \quad -\frac{\frac{\partial y}{\partial B} dB}{mMdB} = \frac{\frac{\partial x}{\partial L} dL}{mrdL} = \sin \gamma. \quad (7.8)$$

Далее можем записать из (7.8)

$$\frac{\partial x}{\partial B} = \frac{M}{r} \frac{\partial y}{\partial L}; \quad \frac{\partial y}{\partial B} = -\frac{M}{r} \frac{\partial x}{\partial L}; \quad (7.9)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{\partial x}{\partial L}}{\frac{\partial y}{\partial L}} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial B}}{\frac{\partial x}{\partial B}}. \quad (7.10)$$

$$m = \frac{1}{M} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)^2} = \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2}. \quad (7.11)$$

Уравнения в частных производных (7.10) в теории отображений поверхностей носят название уравнений Коши – Римана для конформных отображений.

Таким образом, получены уравнения, в общем виде определяющие конформные проекции эллипсоида на плоскости. Задавая конкретный вид функций (7.1) – (7.4), удовлетворяющих (7.10), получают конкретную проекцию.

Аналогичным образом получают основные формулы для обратного отображения, взяв за основу уравнения (7.2) и (7.4).

### 7.3. Связь полярных координат на поверхности эллипсоида и плоскости

Уравнения (7.1) – (7.4) при соответствующем выборе вида функций осуществляют связь между параметрическими координатами на поверхности

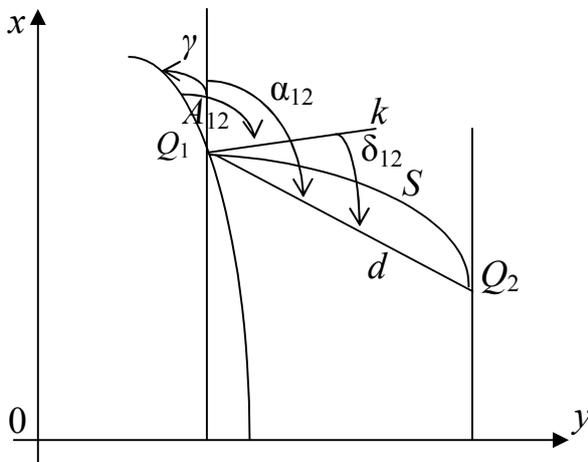


Рис. 7.3

эллипсоида и плоскости. Для геодезических проекций необходимо также иметь формулы, связывающие сфероидические и плоские полярные координаты.

На рис. 7.3 показано изображение геодезической линии эллипсоида на плоскости проекции длиной  $S$  и ее хорда  $d$ .

Показаны также геодезический азимут  $A_{12}$ , дирекционный угол  $\alpha_{12}$ , поправка за кри-

визну изображения геодезической линии эллипсоида на плоскости проекции.  $Q_1k$  – касательная к кривой  $S$  в точке  $Q_1$ .

Несложно заметить уравнение связи дирекционного угла и азимута

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}. \quad (7.12)$$

Формулы для вычисления сближения меридианов  $\gamma_1$  в точке  $Q_1$  получают из уравнений (7.10).

Поправка в направление за кривизну изображения геодезической линии эллипсоида на плоскости  $\delta_{12}$  получается по формулам дифференциальной геометрии и для малых длин может быть записана в виде

$$\delta_{12} = \Gamma_1 \frac{S}{2} + \left( \frac{d\Gamma}{dS} \right)_1 \frac{S^2}{6} = \dots, \quad (7.13)$$

где  $\Gamma$  – кривизна кривой  $s$ , определяемая из уравнения Схольца

$$\Gamma = \frac{\partial \ln m}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial \ln m}{\partial y} \cos \alpha. \quad (7.14)$$

Связь длины кривой  $S$  на плоскости с длиной геодезической линии эллипсоида  $s$  выражается интегралом

$$S = \int_{Q_1}^{Q_2} m ds. \quad (7.15)$$

Связь длины хорды  $d$  с длиной кривой  $S$  определяется уравнением дифференциальной геометрии

$$d = S - \Gamma_1^2 \frac{S^2}{24} + \dots \quad (7.16)$$

Таким образом, получены основные уравнения конформных геодезических проекций. Конкретный вид проекции, вообще говоря, определяется функциями (7.3) – (7.4), этот процесс может быть весьма трудоемким, но для конформных геодезических проекций можно определить более простой путь их выбора.

#### 7.4. Характеристические уравнения геодезических проекций

Линейный элемент поверхности эллипсоида в функции геодезических координат имеет ранее полученное выражение (4.6), которое преобразуется к изометрической форме следующим образом:

$$ds^2 = M^2 dB^2 + r^2 dL^2 = r^2 \left( \left( \frac{M}{r} \right)^2 dB^2 + dL^2 \right) = r^2 (dq^2 + dL^2). \quad (7.17)$$

Здесь  $q$  – изометрическая широта, связанная с геодезической дифференциальным уравнением

$$dq = \frac{M}{r} dB = \frac{(1-e^2)}{W^2 \cos B} dB = \frac{dB}{V^2 \cos B}. \quad (7.18)$$

Интегрирование данного уравнения производим следующим образом:

$$\begin{aligned} q &= \int \frac{(1-e^2) dB}{(1-e^2 \sin^2 B) \cos B} = \int \frac{(1-e^2 \sin^2 B - e^2 \cos^2 B) dB}{(1-e^2 \sin^2 B) \cos B} = \\ &= \int \frac{dB}{\cos B} - e \int \frac{e \cos B dB}{(1-e^2 \sin^2 B)} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin B}{1-\sin B} - \frac{e}{2} \ln \left| \frac{1+e \sin B}{1-e \sin B} \right| = \ln \sqrt{\left( \frac{1+\sin B}{1-\sin B} \right) \left( \frac{1-e \sin B}{1+e \sin B} \right)^e} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Здесь приняли постоянную интегрирования равной нулю, так как счет широт ведется от экватора.

Система плоских прямоугольных координат изометрическая. Линейный элемент на плоскости выражается уравнением

$$dS^2 = dx^2 + dy^2. \quad (7.20)$$

Для конформных геодезических проекций запишем уравнения связи изометрических координат в прямом и обратном изображениях:

$$\begin{aligned} x + iy &= f(q + iL); \\ q + iL &= \varphi(x + iy). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Учитывая, что в геодезических проекциях решается задача изображения сравнительно малых областей эллипсоида, для каждой из которых можно выбрать некоторые средние значения координат  $q_0$  и  $L_0$  на эллипсоиде, которым на плоскости будут соответствовать значения  $x_0, y_0$ , уравнения (7.21) можно записать в виде

$$\begin{aligned} (x_0 + \Delta x) + i(y_0 + \Delta y) &= f((q_0 + \Delta q) + i(L_0 + l)) \\ (q_0 + \Delta q) + i(L_0 + l) &= \varphi((x_0 + \Delta x) + i(y_0 + \Delta y)) \end{aligned} \quad (7.22)$$

Здесь  $L_0$  – долгота осевого меридиана и, очевидно, будут иметь место уравнения

$$x_0 + iy_0 = f(q_0 + iL_0); \quad q_0 + iL_0 = \varphi(x_0 + iy_0). \quad (7.23)$$

Поскольку функции (7.22) аналитические, а приращения координат  $\Delta q$  и  $l$ ,  $\Delta x$  и  $\Delta y$  – малые величины, их можно разложить в ряд по формуле Тейлора по степеням малых величин

$$\Delta x + i\Delta y = f(\Delta q + il) = C_1(\Delta q + il) + C_2(\Delta q + il)^2 + C_3(\Delta q + il)^3 + \dots \quad (7.24)$$

$$\Delta q + il = \varphi(\Delta x + i\Delta y) = C'_1(\Delta x + i\Delta y) + C'_2(\Delta x + i\Delta y)^2 + C'_3(\Delta x + i\Delta y)^3 + \dots$$

Но в геодезических проекциях выполняется условие, что осевой меридиан изображается прямой линией на плоскости, когда выполняются условия

$$l = 0; \quad \Delta y = 0. \quad X_0 = f(q_0); \quad q_0 = \varphi(x_0) \quad (7.25)$$

и для изображения осевого меридиана на плоскости будут иметь место уравнения

$$\begin{aligned} \Delta X &= f(\Delta q) = C_1\Delta q + C_2\Delta q^2 + C_3\Delta q^3 + \dots \\ \Delta q &= \varphi(\Delta x) = C'_1\Delta x + C'_2\Delta x^2 + C'_3\Delta x^3 + \dots \end{aligned} \quad (7.26)$$

где коэффициенты  $C_j$  – производные вида  $\frac{1}{j!} \left( \frac{\partial^j f}{\partial q^j} \right)_0$ , а  $C'_j = \frac{1}{j!} \left( \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j} \right)_0$ .

Обратимся к первому уравнению из (7.26). Оно выражает длину изображения осевого меридиана на плоскости от точки с координатами  $x_0, y_0$  (начальной точки) до текущей точки изображаемой области. При этом заметим, что эта длина выражается в виде разложения по степеням разности изометрической широты текущей и начальной точек, а также коэффициентов разложения, являющихся функциями широты начальной точки. Поэтому формулы (4.24) и (7.26) называют формулами, основанными на рядах с начальными аргументами.

Уравнения (7.26) для различных проекций указанного класса будут отличаться только коэффициентами разложений, которые будут зависеть от вида функций (7.21), описывающих проекции, поэтому назовем эти уравнения **характеристическими уравнениями геодезических проекций.**

## 7.5. Общее алгоритмическое описание геодезических проекций

Здесь мы получим общие формулы для вычислений основных характеристик геодезических проекций.

Произведя возведение в степени выражений, стоящих в правых частях (7.24), а затем, воспользовавшись условием равенства комплексных выражений, когда равны их действительные и мнимые части, получаем следующие выражения для связи координат:

$$\Delta x = \sum_{j=1}^n (C_j P_j); \quad \Delta y = \sum_{j=1}^n (C_j Q_j), \quad (7.27)$$

где  $P_j = P_1 P_{(j-1)} - Q_1 Q_{(j-1)}$ ;  $Q_j = P_1 Q_{(j-1)} + Q_1 P_{(j-1)}$  при условии  $P_0 = 1$ ;  $Q_0 = 0$ .

Это гармонические полиномы, удовлетворяющие уравнению Лапласа. При этом имеем  $P_1 = \Delta q$ ;  $Q_1 = l$ .

Вычислим производные, входящие в уравнения Коши – Римана (7.10):

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\partial x}{\partial L} = -\frac{\partial y}{\partial q} = -\sum_{j=1}^n (jC_j Q_{(j-1)}); \\ k_2 &= \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial L} = \sum_{j=1}^n (jC_j P_{(j-1)}). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Теперь выражения для частного масштаба длин и сближения меридианов принимают вид

$$m = \frac{1}{r} \sqrt{k_1^2 + k_2^2}; \quad \gamma = \operatorname{arctg} \left( \frac{k_1}{k_2} \right). \quad (7.29)$$

Приведенные формулы работают в прямой задаче, когда по сфероидическим элементам требуется вычислить их образы на плоскости (задача отображения поверхности эллипсоида на плоскости). Если требуется решить обратную задачу, когда по элементам на плоскости проекции требуется вычислить соответствующие сфероидические элементы, берем за основу вторые уравнения из (7.21) – (7.26). В результате аналогично получим:

– для связи координат в обратном переходе – уравнения

$$\Delta q = \sum_{j=1}^n (C'_j P'_j); \quad l = \sum_{j=1}^n (C'_j Q'_j), \quad (7.30)$$

где  $P_j = P'_1 P'_{(j-1)} - Q'_1 Q'_{(j-1)}$ ;  $Q'_j = P'_1 Q'_{(j-1)} + Q'_1 P'_{(j-1)}$  при условии  $P'_0 = 1$ ;  $Q'_0 = 0$ . Это также гармонические полиномы, удовлетворяющие уравнению Лапласа. Здесь следует иметь в виду также, что  $P'_1 = \Delta x$ ;  $Q'_1 = \Delta y$ .

– для частного масштаба длин и сближения меридианов

$$m = \frac{1}{r \sqrt{k'^2_1 + k'^2_2}}; \quad \gamma = \operatorname{arctg} \left( \frac{k'_1}{k'_2} \right). \quad (7.31)$$

Здесь производные, входящие в уравнения Коши – Римана, получают выражения

$$\begin{aligned} k'_1 &= \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y} = -\sum_{j=1}^n (jC'_j Q'_{(j-1)}); \\ k'_2 &= \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \sum_{j=1}^n (jC'_j P'_{(j-1)}). \end{aligned} \quad (7.32)$$

Как видно из полученных выражений, они общие для любой из определенного нами класса геодезических проекций. Вид проекции определяется только коэффициентами характеристических уравнений (7.26).

Аналогичным образом можно получить общие алгоритмические выражения для уравнений связи полярных и параметрических координат.

## 7.6. Характеристические уравнения некоторых геодезических проекций

В теории отображения поверхностей указывается на то, что все многообразие конформных отображений следует из аналитической функции комплексных переменных, связывающей изометрические координаты на обеих поверхностях (7.3, 7.4, 7.21). Под изометрическими координатами на любой поверхности понимают такие, когда равным приращениям координат соответствуют равные линейные приращения вдоль координатных линий. Заметим, что в математике такая система координат называется изотермической, а в картографии и геодезии принято название изометрическая. Таким образом, необходимо установить изометрические координаты степени  $(\Delta q)^j$ , которые представляют собой малые убывающие величины при малых  $\Delta q$ . Для Республики Беларусь, например,  $B_0 \approx 54^\circ$  и  $\cos B_0 \leq 3.8 \times 10^6$  м. Если размеры изображаемой в одной зоне области ограничить разностью широт и долгот

$$(\Delta q)_{\max} \approx (\Delta L)_{\max} \leq 6^\circ \approx 0.1,$$

а вычисления координат производить с точностью до 0.001 м, что соответствует стандартам точности современных измерительных технологий, то в разложениях (7.33) достаточно ограничиться восьмью степенями разложений. При этом замечаем, что остаточный член в форме Лагранжа будет

$$\rho_{(9)}(x, y) \approx (3.8 \times 10^6) (0.1)^9 / 9! \leq 0.001 \text{ м.}$$

### 7.6.1. Поперечно-цилиндрические проекции

В поперечно-цилиндрических геодезических проекциях ставится условие, чтобы длина дуги меридиана эллипсоида, принимаемого на плоскости проекции за осевой, изображалась без искажений (в натуральную величину), когда частный масштаб длин вдоль меридиана равен единице ( $m_0 = 1$ ) – это проекция Гаусса – Крюгера, либо при условии  $m_0 \leq 1 = \text{const}$  – универсальная проекция Меркатора, известная как проекция *UTM*. Отсюда видно, что проекция *UTM* является обобщением проекции Гаусса – Крюгера.

Здесь можем записать для уравнения из (7.25)

$$X_0 = f(q_0) = m_0 (X_0)_{\text{эллипс.}}$$

где  $(X_0)_{\text{эллипс.}}$  – длина дуги меридиана эллипсоида, отсчитанная от экватора до средней точки проекции с широтой  $B_0$ . И первое уравнение из (7.26) можем записать в виде

$$\Delta X = m_0 \left( \left( \frac{dX}{dq} \right)_0 \Delta q + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 X}{dq^2} \right)_0 \Delta q^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{d^3 X}{dq^3} \right)_0 \Delta q^3 + \frac{1}{24} \left( \frac{d^4 X}{dq^4} \right)_0 \Delta q^4 + \dots \right). \quad (7.33)$$

Производные в этом уравнении получаем следующим образом. Как известно, дифференциал дуги меридиана эллипсоида имеет выражение

$$dX = M dB = \frac{c}{V^3} dB,$$

откуда можем записать

$$\frac{dX}{dB} = M = \frac{c}{V^3}$$

и далее по правилу дифференцирования неявных функций

$$\frac{dX}{dq} = \left( \frac{dX}{dB} \right) \left( \frac{dB}{dq} \right) = M \left( \frac{dB}{dq} \right) = \frac{c}{V^3} \left( \frac{dB}{dq} \right) = \frac{c}{V^3} V^2 \cos B = \frac{c}{V} \cos B. \quad (7.34)$$

Здесь производную  $\frac{dB}{dq} = V^2 \cos B$  получаем из (7.18). Производная, вычисленная по координатам начальной точки проекции, имеет выражение

$$\left( \frac{dX}{dq} \right)_0 = \frac{c}{V_0} \cos B_0.$$

Далее действуем по известным правилам дифференциального исчисления, когда вторая производная вычисляется как производная от первой и т. д. В результате получаем

$$\frac{d^2 X}{dq^2} = \frac{d}{dq} \left( \frac{dX}{dq} \right) = \frac{d}{dB} \left( \frac{dX}{dq} \right) \left( \frac{dB}{dq} \right) = \frac{d}{dB} \left( \frac{c}{V} \cos B \right) V^2 \cos B = -\frac{c}{V} \cos B \sin B;$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 X}{dq^3} &= \frac{d}{dq} \left( \frac{d^2 X}{dq^2} \right) = \frac{d}{dB} \left( \frac{d^2 X}{dq^2} \right) \left( \frac{dB}{dq} \right) = \\ &= \frac{d}{dB} \left( -\frac{c}{V} \cos B \sin B \right) V^2 \cos B = \frac{c}{V} \cos^3 B (\operatorname{tg}^2 B - V^2). \end{aligned}$$

Последовательно вычисляем необходимое число производных и, следовательно, коэффициентов разложения (7.33). При этом заметим, что в этом разложении коэффициенты удовлетворяют условию  $C_j \leq \frac{1}{j!} (c \cos B_0)$ .

Действуя указанным ранее образом, вычисляем необходимое число производных и в результате получаем следующие выражения коэффициентов первого характеристического уравнения из (7.26) для поперечно-цилиндрических проекций:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= m_0 \frac{c}{V_0} \cos B_0; & C_2 &= -\frac{C_1}{2} \sin B_0; & C_3 &= \frac{C_1}{6} \cos^2 B_0 (\operatorname{tg}^2 B_0 - V_0^2); \\
 C_4 &= \frac{C_1}{24} \sin B_0 \cos^2 B_0 (5 - \operatorname{tg}^2 B_0 + 9\eta_0'^2 + 4\eta_0'^4); \\
 C_5 &= \frac{C_1}{120} \cos^4 B_0 (5 - 18\operatorname{tg}^2 B_0 + \operatorname{tg}^4 B_0 + 14\eta_0'^2 - 58\eta_0'^2 \operatorname{tg}^2 B_0); \\
 C_6 &= \frac{C_1}{720} \sin B_0 \cos^4 B_0 (58\operatorname{tg}^2 B_0 - 61 - \operatorname{tg}^4 B_0 - 270\eta_0'^2 + 330\eta_0'^2 \operatorname{tg}^2 B_0); \\
 C_7 &= \frac{C_1}{5040} \cos^6 B_0 (479\operatorname{tg}^2 B_0 - 61 - 179\operatorname{tg}^4 B_0 + \operatorname{tg}^6 B_0); \\
 C_8 &= \frac{C_1}{40320} \sin B_0 \cos^6 B_0 (1385 - 3111\operatorname{tg}^2 B_0 + 543\operatorname{tg}^4 B_0 - \operatorname{tg}^6 B_0)
 \end{aligned} \tag{7.35}$$

Здесь используем ранее принятое обозначение  $\eta_0'^2 = e'^2 \cos^2 B_0$ ; в коэффициентах  $C_5$  и  $C_6$  по малости отброшены слагаемые с множителем  $\eta_0'^4$ , а в коэффициентах  $C_7$  и  $C_8$  – с множителем  $\eta_0'^2$ .

Полагая значение  $m_0 = 1$ , получаем проекцию Гаусса – Крюгера, а при  $m_0 = 0.9996$  – проекцию *UTM*. Вообще говоря, варьируя значением  $m_0$ , можно управлять распределением искажений длин в пределах изображаемой области. На том, как это делается, мы рассмотрим позднее.

Поперечно-цилиндрические проекции наиболее удобны для изображения на плоскости областей эллипсоида, вытянутых вдоль меридиана.

### 7.6.2. Конические проекции

Известная конформная коническая проекция Ламберта, которая широко применяется в мировой геодезической практике для создания топографических карт и для математической обработки геодезических измерений, задается уравнениями связи координат, следуемыми из рисунка 7.4.

$$\begin{aligned}
 x &= \rho_0 - \rho \cos \gamma; \\
 y &= \rho \sin \gamma.
 \end{aligned} \tag{7.36}$$

Для осевого меридиана имеем сближение  $\gamma = 0$ , следовательно, получаем для его длины от широты стандартной параллели  $B_0 = \text{const}$  до широты текущей точки выражение

$$\Delta X = \rho_0 - \rho. \tag{7.37}$$

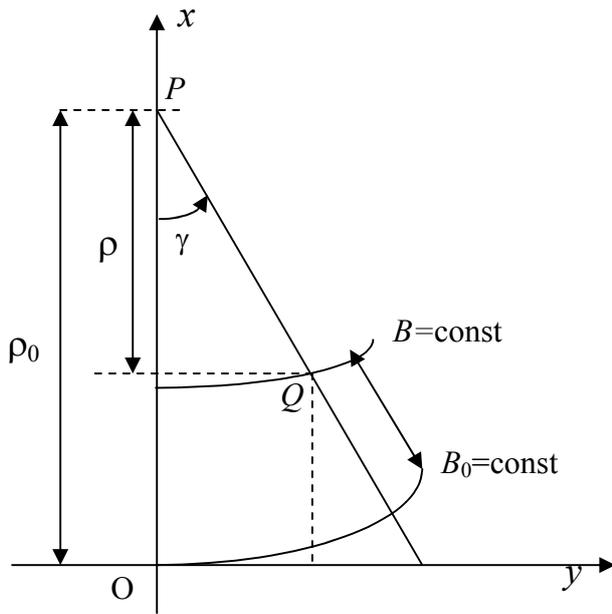


Рис. 7.4

Для конических проекций всегда выполняется уравнение

$$\gamma = \beta(L - L_0) = \beta l, \quad (7.38)$$

и в конформных проекциях масштаб не зависит от направления, поэтому можно приравнять отношения

$$m = -\frac{d\rho}{MdB} = \frac{\rho\beta}{N \cos B}. \quad (7.39)$$

Из последнего уравнения можем записать

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta \frac{MdB}{N \cos B} = -\beta dq, \quad (7.40)$$

после интегрирования которого получаем

$$\ln \rho = -\beta \Delta q + \ln k; \quad \text{или} \quad \rho = k e^{-\beta \Delta q}. \quad (7.41)$$

Несложно заметить, что постоянная интегрирования  $k = \rho_0 = m_0 N_0 \operatorname{ctg} B_0$ , а  $\beta = \sin B_0$ . Тогда для длины изображения любого меридиана эллипсоида на плоскости конической проекции получаем из (7.37), учитывая (7.41)

$$\Delta X = \rho_0 \left( 1 - e^{-\sin B_0 \Delta q} \right). \quad (7.42)$$

Раскладывая в ряд показательную функцию по формуле

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

получаем характеристическое уравнение для конических проекций

$$\Delta X = \sum_1^n (C_j \Delta q^j),$$

где для коэффициентов получаем рекуррентное выражение

$$C_j = \frac{C_1}{j!} (-1)^{(j-1)} (\sin B_0)^{(j-1)}; \quad \text{при} \quad C_1 = m_0 \frac{c}{V_0} \cos B_0. \quad (7.43)$$

Это обстоятельство указывает на достоинство конических проекций, состоящее в том, что здесь можно в автоматическом режиме формировать любое число членов разложений в (7.43) и общем алгоритме геодезических проекций.

При значении  $m_0 = 1$  на стандартной параллели проекции получают широко применяющуюся для геодезических целей коническую проекцию

Ламберта. При иных значениях  $m_0 \leq 1$  можно получать видоизмененные конические проекции, как это имеет место в цилиндрических проекциях (Гаусса – Крюгера и *UTM*).

Конические проекции наиболее удобно применять для отображения на плоскости областей, вытянутых вдоль параллели.

### 7.6.3. Азимутальные проекции

Французский инженер Руссиль в 1924 году предложил для геодезических и топографических работ проекцию на касательную плоскость, являющуюся частным случаем азимутальных проекций, характеристическое уравнение которой можно получить следующим образом (см. рис. 7.5).

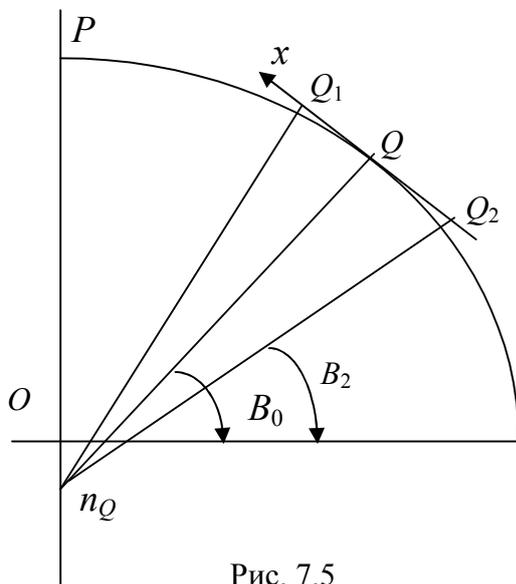


Рис. 7.5

Здесь за длину дуги осевого меридиана  $PQ$ , заключенного между точками  $Q_1$  и  $Q_2$  принимается дуга окружности радиусом, равным среднему радиусу кривизны эллипсоида в точке  $Q$  с широтой  $B_0$ , который имеет известное нам выражение через главные радиусы кривизны эллипсоида

$$R_0 = \sqrt{M_0 N_0} .$$

Из рисунка получаем связь между длиной дуги окружности и ее касательной.

Длина дуги окружности, заключенной между симметрично расположенными относительно центральной точками  $Q_1$  и  $Q_2$  (для изображаемой области) выражается уравнением

$$S = 2R_0 \Delta B .$$

Здесь  $\Delta B = B - B_0$ , а длина изображения осевого меридиана на плоскости проекции (касательной к окружности в точке  $Q$ )

$$\Delta X = 2R_0 \operatorname{tg}(\Delta B) = 2R_0 \operatorname{tg}\left(\frac{S}{2R_0}\right) .$$

Разлагая в ряд функцию малого аргумента, получаем

$$\Delta X = S + \frac{S^3}{12R_0^2} + \frac{S^5}{120R_0^4} + \frac{17S^7}{20160R_0^6} + \dots \quad (7.44)$$

В общем случае, когда картинная плоскость может не только касаться поверхности эллипсоида, но и пересекать ее (секущая плоскость), можем записать уравнение (7.44) для азимутальных проекций в виде

$$\Delta X = m_0 \left( S + \frac{S^3}{12R_0^2} + \frac{S^5}{120R_0^4} + \frac{17S^7}{20160R_0^4} + \dots \right). \quad (7.45)$$

Учитывая то, что в проекции Гаусса – Крюгера осевой меридиан изображается на плоскости без искажений, в данном уравнении под  $S$  можем понимать значение, полученное по формуле для этой проекции, а в (7.35) положить  $m_0 = 1$ . После тождественных преобразований получаем для коэффициентов характеристического уравнения азимутальных проекций

$$\begin{aligned} C_1 &= m_0 \frac{c}{V_0} \cos B_0; & C_2 &= -\frac{C_1}{2} \sin B_0; & C_3 &= \frac{C_1}{12} \cos^2 B_0 (2 \operatorname{tg}^2 B_0 - V_0^2); \\ C_4 &= \frac{C_1}{24} \sin B_0 \cos^2 B_0 (2 - \operatorname{tg}^2 B_0 + 6\eta_0'^2 + 4\eta_0'^4); \\ C_5 &= \frac{C_1}{240} \cos^4 B_0 (2 - 11 \operatorname{tg}^2 B_0 + 2 \operatorname{tg}^4 B_0 + 12\eta_0'^2 - 9\eta_0'^2 \operatorname{tg}^2 B_0); \\ C_6 &= \frac{C_1}{1440} \sin B_0 \cos^4 B_0 (26 \operatorname{tg}^2 B_0 - 17 - 2 \operatorname{tg}^4 B_0 - 270\eta_0'^2 + 570\eta_0'^2 \operatorname{tg}^2 B_0); \\ C_7 &= \frac{C_1}{20160} \cos^6 B_0 (180 \operatorname{tg}^2 B_0 - 17 - 114 \operatorname{tg}^4 B_0 + 4 \operatorname{tg}^6 B_0); \\ C_8 &= \frac{C_1}{40320} \sin B_0 \cos^6 B_0 (62 - 192 \operatorname{tg}^2 B_0 + 603 \operatorname{tg}^4 B_0 - \operatorname{tg}^6 B_0). \end{aligned} \quad (7.46)$$

В азимутальных проекциях также имеется возможность управления распределением искажений внутри изображаемой области, моделируя значение  $m_0 \leq 1$ . При этом, полагая  $m_0 = 1$ , получим проекцию Руссилья.

Азимутальные проекции удобно применять для областей округлой формы.

### 7.7. Выбор значения масштаба в геодезических проекциях

Как уже отмечалось ранее, три вида геодезических проекций, рассмотренных нами, являются наиболее распространенными в мировой геодезической практике, при этом все они являются перспективными и симметричными относительно распределения всех видов искажений внутри изображаемой зоны. При этом во всех этих проекциях линейные искажения, обусловленные масштабом, существенно более значимы по сравне-

нию с искажениями, обусловленными кривизной изображения геодезической линии. В поперечно-цилиндрических проекциях масштаб в точке возрастает примерно пропорционально квадрату ее ординаты (удаления от осевого меридиана), в конических – примерно пропорционально квадрату абсциссы (удаления от стандартной параллели), в азимутальных – примерно пропорционально квадрату удаления от центральной точки проекции. Линии постоянного масштаба или равных линейных искажений называют **изоколами**. При этом в цилиндрических проекциях изоколы симметрично расположены относительно изображения осевого меридиана, в конических – симметрично относительно изображения стандартной параллели, в азимутальных – окружности, описанной вокруг центральной точки проекции.

Положим значение масштаба равным  $m_0 = 1$  на осевом меридиане цилиндрических, на стандартной параллели конических и в центральной точке азимутальных проекций. Поставим условие, чтобы максимальное значение масштаба  $m_{\max}$  для всей изображаемой зоны было бы настолько больше единицы, насколько значение масштаба  $m_0$  меньше единицы.

$$1 - m_0 = m_{\max} - 1.$$

Значение масштаба  $m_{\max}$  при  $m_0 < 1$  связано со значением масштаба  $m'_{\max}$  при  $m'_0 = 1$  следующим очевидным уравнением:

$$m_{\max} = m_0 m'_{\max}.$$

Отсюда получаем для значения масштаба  $m_0$ , при котором в пределах всей изображаемой зоны масштаб по абсолютному значению будет меньше всего отличаться от единицы. В этом случае максимальные для данной зоны линейные искажения будут наименьшими.

$$m_0 = \frac{2}{1 + m'_{\max}}. \quad (7.47)$$

Если требуется получить такую проекцию, для которой линейные искажения отсутствуют вдоль какой-либо изоколы  $m = \text{const}$ , то достаточно принять значение

$$m_0 = 1 / m. \quad (7.48)$$

## 7.8. Проекция Гаусса – Крюгера в традиционном изложении

### 7.8.1. Формулы для вычисления координат в проекции Гаусса – Крюгера

Как отмечено ранее, проекция Гаусса – Крюгера с 1928 г. и до настоящего времени традиционно используется в Российской Федерации, у нас и в ряде других стран. В тридцатые годы прошлого столетия вы-

числения велись вручную, для их облегчения необходимо было составлять вспомогательные таблицы. В этом случае применялась зональная система координат, когда долготы отсчитывались от среднего меридиана зоны ( $l = L - L_0$ ). Ординаты также отсчитывались от изображения этого меридиана в виде прямой линии, которая принималась за ось ординат. Общие уравнения (7.21) в зональной системе координат записываются в виде

$$\begin{aligned}x + iy &= f(q + il); \\ B + il &= \varphi(x + iy).\end{aligned}$$

При малых размерах координатных зон правые части этих уравнений можно разложить в ряд по формуле Тейлора по степеням малых величин  $l$  и  $y$ .

$$\begin{aligned}x + iy &= f(q + il) = f(q) + C_1(il) + C_2(il)^2 + C_3(il)^3 + \dots \\ B + il &= \varphi(x + iy) = \varphi(x) + C'_1(iy) + C'_2(iy)^2 + C'_3(iy)^3 + \dots\end{aligned}, \quad (7.49)$$

где следует иметь в виду условия (7.25) – (7.26) для поперечно-цилиндрической проекции Гаусса – Крюгера при  $m_0 = 1$ . В результате получаем уравнения связи координат

$$\begin{aligned}x &= X + C_2l^2 + C_4l^4 + \dots; & y &= C_1l + C_3l^3 + \dots \\ B &= B_x + C'_2y^2 + C'_4y^4 + \dots; & l &= C'_1y + C'_3y^3 + \dots\end{aligned} \quad (7.50)$$

Здесь коэффициенты  $C_j$  и  $C'_j$  имеют выражения с учетом знаков, получаемых при возведении в степени  $i$ :

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{c}{V} \cos B; & C_2 &= \frac{C_1}{2} \sin B; & C_3 &= \frac{C_1}{6} \cos^2 B (V^2 - \operatorname{tg}^2 B); \\ C_4 &= \frac{C_1}{24} \sin B \cos^2 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^{/2} + 4\eta^{/4}); \\ C_5 &= \frac{C_1}{120} \cos^4 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 14\eta^{/2} - 58\eta^{/2} \operatorname{tg}^2 B); \\ C_6 &= \frac{C_1}{720} \sin B \cos^4 B (61 - 58\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 270\eta^{/2} - 330\eta^{/2} \operatorname{tg}^2 B); \\ C_7 &= \frac{C_1}{5040} \cos^6 B (61 - 479\operatorname{tg}^2 B + 179\operatorname{tg}^4 B - \operatorname{tg}^6 B); \\ C_8 &= \frac{C_1}{40320} \sin B \cos^6 B (1385 - 3111\operatorname{tg}^2 B + 543\operatorname{tg}^4 B - \operatorname{tg}^6 B).\end{aligned} \quad (7.51)$$

$$\begin{aligned}
C_1' &= \frac{V_x}{c \cos B_x}; & C_2' &= -\frac{C_1'}{2N_x} V_x \sin B_x; & C_3' &= -\frac{C_1'}{6N_x^2} (1 + 2\operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2); \\
C_4' &= \frac{C_1'}{24N_x^3} V_x^2 \sin B_x (5 + 3\operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x'^2 - 9\eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x - 4\eta_x'^4); \\
C_5' &= \frac{C_1'}{120N_x^4} (5 + 28\operatorname{tg}^2 B_x + 24\operatorname{tg}^4 B_x + 6\eta_x'^2 + 8\eta_x'^2 \operatorname{tg}^2 B_x); \\
C_6' &= -\frac{C_1'}{720N_x^5} V_x^2 \sin B_x (90\operatorname{tg}^2 B_x + 61 + 45\operatorname{tg}^4 B_x + 46\eta_x'^2 - \\
&\quad - 252\eta_x'^2 \operatorname{tg}^2 B_x - 90\eta_x^2 \operatorname{tg}^4 B_x); \\
C_7' &= -\frac{C_1'}{5040N_x^6} (662\operatorname{tg}^2 B_x + 61 + 1320\operatorname{tg}^4 B_x + 720\operatorname{tg}^6 B_x); \\
C_8' &= \frac{C_1'}{40320N_x^7} V_x^2 \sin B_x (1385 + 3633\operatorname{tg}^2 B_x + 4095\operatorname{tg}^4 B_x + 1575\operatorname{tg}^6 B_x).
\end{aligned} \tag{7.52}$$

Обращаем внимание на то, что коэффициенты (7.51) вычисляются по широте каждой точки, а коэффициенты (7.52) – по широте  $B_x$  – соответствующей значению  $X=x$  на осевом меридиане. Для их вычисления использовались специальные таблицы. Заметим при этом, что коэффициенты (7.35) постоянные в пределах всей территории, изображаемой в одной координатной зоне. При размерах координатной зоны до  $8^\circ$  в формулах (7.50) можно отбросить  $C_7$  и  $C_8$ . При этом погрешность вычисления плоских прямоугольных координат не более 0.001 м, а широт и долгот –  $0.0001''$ .

### 7.8.2. Сближение меридианов в проекции Гаусса – Крюгера

Сближение меридианов используется для перехода от азимута геодезической линии эллипсоида к дирекционному углу ее изображения на плоскости. Формула для вычисления имеет вид (7.29), в которой проще вычислять частные производные (7.28) от плоских координат по долготе. В результате имеем для шестиградусной зоны после преобразований в пределах необходимой точности вычислений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial l} &= lN \sin B \cos B \left( 1 + \frac{l^2}{6} \cos^2 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta'^2 + 4\eta'^4) \right); \\
\frac{\partial y}{\partial l} &= N \cos B \left( 1 + \cos^2 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta'^2) \frac{l^2}{2} + \cos^4 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) \frac{l^4}{24} \right);
\end{aligned} \tag{7.53}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \sin B \operatorname{tg} l + \eta^{1/2} \sin B \cos^2 B l^3 \left( 1 + \frac{2}{3} \eta^{1/2} + \cos^2 B l^2 \right). \quad (7.54)$$

Можно заметить, что сближение меридианов в данной проекции имеет максимальное значение на краю зоны при  $B \rightarrow 90^\circ$ . На полюсе пересекаются все меридианы, в том числе, и осевой, поэтому здесь не может существовать понятия сближения меридианов. Для приближенных расчетов полезно помнить выражение для сближения меридианов

$$\gamma \approx l \sin B.$$

### 7.8.3. Частный масштаб длин в проекции Гаусса – Крюгера

Как уже отмечено ранее, частный масштаб длин (масштаб) имеет большое значение в геодезических проекциях и является одной из их численных характеристик. Масштаб служит для вычисления поправок в длины геодезических линий эллипсоида при вычислении длины их изображений на плоскости (7.15). Подставляя значения производных (7.53) в формулу (7.29), получаем после преобразований с удержанием необходимой точности в шестиградусной зоне:

$$m^2 = 1 + \cos^2 B (1 + \eta^{1/2}) l^2 + \cos^4 B (8 - 4 \operatorname{tg}^2 B) \frac{l^4}{12}. \quad (7.55)$$

Извлекая корень квадратный, получим с той же точностью

$$m = 1 + \cos^2 B (1 + \eta^{1/2}) \frac{l^2}{2} + \cos^4 B (5 - 4 \operatorname{tg}^2 B) \frac{l^4}{24}. \quad (7.56)$$

Полученная формула может служить для вычисления масштаба, однако на практике чаще известны плоские прямоугольные координаты точек, для которых необходимо знание масштаба. Поэтому перейдем в формуле (7.56) от разности долгот  $l$  к ординатам  $y$ . Для этого воспользуемся (7.50) и (7.51), откуда можем записать с принятой точностью

$$l = \frac{y}{C_1 - C_3 l^2} = \frac{y}{C_1 - \frac{C_3}{C_1} y^2} = \frac{y}{C_1} \left( 1 + \frac{C_3}{C_1^2} y^2 \right);$$

$$l^2 \cos^2 B = \frac{y^2}{N^2} - (1 - \operatorname{tg}^2 B) \frac{y^4}{3N^4}; \quad l^4 \cos^4 B = \frac{y^4}{N^4}.$$

Теперь выражение (7.56) может быть записано в виде

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}. \quad (7.57)$$

Здесь в третьем слагаемом принято  $N^4 = R^4$ , что допустимо с ранее принятой точностью.

Анализируя полученную формулу, замечаем, что линии равных масштабов и равных линейных искажений (изоколы) проходят симметрично и практически параллельно изображению осевого меридиана, так как значение среднего радиуса кривизны  $R$  незначительно изменяется с изменением широты.

#### 7.8.4. Кривизна изображения геодезической линии на плоскости и поправки за нее

Как видно из формул (7.13) и (7.16), для перехода от длины и направления изображенной на плоскости проекции геодезической линии эллипсоида к длине и направлению ее хорды необходимо вводить поправки за кривизну ее изображения.

Для проекции Гаусса – Крюгера уравнение Схольса (7.14) принимает вид с учетом принятой точности в выражении для масштаба (7.57)

$$\Gamma = -\frac{y}{R^2} \cos \alpha + \frac{y^3}{3R^4} \cos \alpha - \frac{e^2 \sin 2B}{R^3} y^2 \sin \alpha. \quad (7.58)$$

Здесь мы учли следующие выражения для логарифма масштаба и производных:

$$\ln m = \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \dots = \frac{y^2}{2R^2} - \frac{y^4}{12R^4} + \dots;$$

$$\frac{\partial \ln m}{\partial y} = \frac{y}{R^2} - \frac{y^3}{3R^4}; \quad \frac{\partial \ln m}{\partial x} = \frac{y^2}{2c^2} \frac{dV^4}{dB} \frac{dB}{dx} = -\frac{e^2 \sin 2B}{R^3} y^2$$

Далее вычисляем производную

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \frac{dy}{dS} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dS} = -\frac{\cos \alpha \sin \alpha}{R^2}. \quad (7.59)$$

Здесь мы имеем в виду очевидные соотношения:

$$\frac{dy}{dS} = \sin \alpha; \quad \frac{d\alpha}{dS} = \Gamma.$$

Подставляя полученные величины в уравнение (7.13), получаем поправку в горизонтальное направление, а также в дирекционный угол за кривизну изображения геодезической линии эллипсоида на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера:

$$\delta_{12} = -\frac{y_1}{2R_1^2} S \cos \alpha_{12} + \frac{y_1^3}{6R_1^4} S \cos \alpha_{12} - \frac{e^2 \sin 2B_1}{2R_1^3} y_1^2 S \sin \alpha_{12} - \frac{S^2}{6R_1^2} \sin \alpha_{12} \cos \alpha_{12}. \quad (7.60)$$

Здесь мы пренебрегли расхождениями между длиной хорды  $S$  и длиной изображения геодезической линии  $s$ , а также поправкой  $\delta_{12}$  в дирекци-

онном угле. Это допустимо при длинах сторон до 30 км и при значениях  $y_{\max} = 320$  км для шестиградусных зон на любой широте.

Далее преобразуем полученную формулу к виду, более удобному для практического применения, имея в виду соотношения:

$$S \cos \alpha_{12} = \Delta x_{12} = x_2 - x_1; \quad S \sin \alpha_{12} = \Delta y_{12} = y_2 - y_1;$$

$$y_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2); \quad y_1 = y_m - \frac{\Delta y}{2}.$$

В результате получаем формулу для вычислений поправки в триангуляции 1 класса

$$\delta_{12}'' = -\frac{\rho''}{2R_m^2} \left[ \Delta x \left( y_m - \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) + \frac{e^2 y_m^2}{R_m} \Delta y \sin 2B_m \right]. \quad (7.61)$$

Поменяв местами индексы в приращениях координат, получим приращения в принятых обозначениях с обратными знаками и для обратного направления формулу для вычислений

$$\delta_{21}'' = \frac{\rho''}{2R_m^2} \left[ \Delta x \left( y_m + \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) + \frac{e^2 y_m^2}{R_m} \Delta y \sin 2B_m \right]. \quad (7.62)$$

Точность вычислений поправок по приведенным формулам не ниже  $0.001''$  при расстояниях между точками до 60 км.

В триангуляции 2 класса поправки вычисляют с точностью не ниже  $0.01''$ , а длины сторон – не более 20 км. В этом случае применяют более простые формулы для вычислений, которые получаем из формул (7.61) – (7.62), отбросив по малости третий и четвертый слагаемые.

$$\delta_{12}'' = -\frac{\rho''}{2R_m^2} \Delta x \left( y_m - \frac{\Delta y}{6} \right) = \frac{\rho''}{6R_m^2} \Delta x (2y_1 + y_2); \quad (7.63)$$

$$\delta_{21}'' = \frac{\rho''}{2R_m^2} \Delta x \left( y_m + \frac{\Delta y}{6} \right) = \frac{\rho''}{6R_m^2} (y_1 + 2y_2). \quad (7.64)$$

В триангуляции 3 и низших классов поправки вычисляют по формулам, еще более простым. Здесь вместо ординат двух точек  $y_1, y_2$  берут среднюю ординату  $y_m$  и тогда получают из (7.63) – (7.64)

$$\delta_{12} = -\delta_{21} = -\frac{\rho''}{2R_m^2} y_m \Delta x. \quad (7.65)$$

Эту формулу можно вывести другим путем. Для этого рассмотрим рисунок 7.1.

На рисунке имеем изображение геодезической линии эллипсоида на плоскости в виде кривой 1-2. Углы между этой кривой и ее хордой являются искомыми поправками. Прямые линии 1-4 и 2-3 являются изображе-

ниями геодезических линий, проходящих на поверхности эллипсоида через точки 1 и 2 перпендикулярно осевому меридиану. Поскольку проекция конформна, углы изображаются без искажений. На поверхности эллипсоида сумма внутренних углов трапеции 1234 больше  $360^0$  на величину сферического избытка, а на плоскости – на величину поправок. Следовательно, можем записать равенства:

$$\delta_{12} - \delta_{21} = -\varepsilon; \quad \delta_{12} = -\delta_{21} = -\varepsilon / 2 .$$

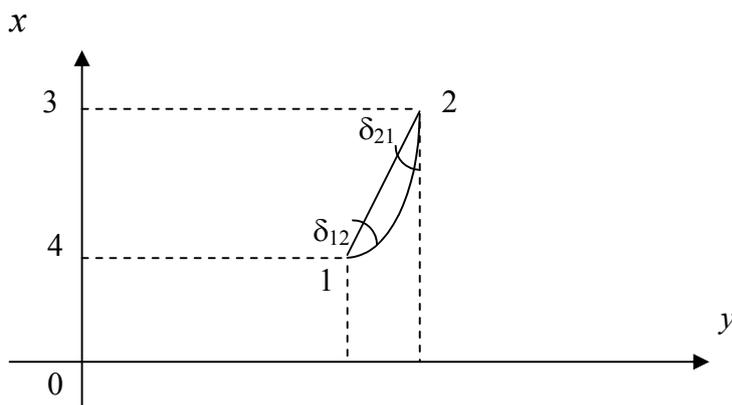


Рис. 7.1

Как известно, сферический избыток вычисляется по известной формуле

$$\varepsilon'' = \rho'' \frac{P}{R^2},$$

где  $P$  – площадь трапеции,  $R$  – радиус сферы.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований  $y_m = (y_2 + y_1)/2$  на ее высоту  $\Delta x = (x_2 - x_1)$ , следовательно, получаем формулу (7.65).

Полезно заметить предельные значения поправок, которые будут иметь место на краю координатной зоны, для направления, параллельного осевому меридиану. Для шестиградусной зоны имеем  $y_{\max} = 320$  км, в триангуляции 1 класса будет  $\Delta x_{\max} = S_{\max} = 30$  км, и значение поправки не превзойдет величины  $\delta_{\max} \approx 24''$ .

Рассчитаем поправку в длину за кривизну, которая вычисляется по формуле (7.16). Значение кривизны рассчитываем в проекции Гаусса – Крюгера по формуле (7.58), в которой достаточно учесть лишь первое слагаемое. В результате получаем для максимальной поправки в относительной мере

$$\frac{d - S}{S} = \frac{\Delta S}{S} \approx \frac{y_{\max}^2}{24R_m^4} S_{\max} .$$

Для шестиградусной зоны и триангуляции 1 класса при ранее принятых значениях получаем величину не более  $10^{-10}$ . Таким образом, видим, что эта поправка пренебрегаемо мала и может не учитываться во всех случаях геодезической практики.

### 7.8.5. Практика применения проекции Гаусса – Крюгера

Плоские прямоугольные координаты, вычисленные по геодезическим координатам в какой-либо геодезической проекции, находят самое широкое практическое применение. В данном случае существенно облегчается решение любых геодезических задач на участках земной поверхности, размеры которых допускают их изображение в одной координатной зоне. Вместе с тем, следует иметь в виду, что в проекции Гаусса – Крюгера принята международная разграфка шестиградусных зон. Так, долгота осевых меридианов рассчитывается по формуле

$$L_0 = 6n - 3,$$

где  $n$  – номер зоны. Территория Беларуси расположена в четвертой, пятой и шестой шестиградусных зонах проекции Гаусса – Крюгера с долготами осевых меридианов в  $21^0$ ,  $27^0$  и  $33^0$ .

Трапеции топографических карт в масштабе 1 : 1 000 000 образуют колонну, расположенную в соответствующей координатной зоне, номер колонны определяется выражением  $30 + n$ . Счет широт граничных параллелей, образующих пояса трапеций топографической карты в масштабе 1 : 1 000 000, ведется от экватора через четыре градуса. Территория Беларуси расположена в трех поясах международной разграфки, ограниченных параллелями с широтами в  $48^0$ ,  $52^0$ ,  $56^0$ ,  $60^0$ .

Таким образом, территория нашей страны отображается на семи трапециях топографической карты масштаба 1 : 1 000 000. В пределах каждой шестиградусной координатной зоны размещается целое число трапеций всего масштабного ряда топографических карт от 1 : 500 000 до 1 : 10 000.

Системы прямоугольных координат в каждой координатной зоне проекции Гаусса – Крюгера совершенно идентичны. Для того чтобы различать, в какой координатной зоне расположены точки, на практике принято к ординате слева приписывать номер зоны. Чтобы избежать на топографических картах отрицательных ординат, к ним прибавляют 500 км. Таким образом используют условные ординаты, связанные с истинными выражением

$$y_{\text{усл.}} = y_{\text{ист.}} + (0.5 + n) 10^6. \quad (7.66)$$

Например, если в каталоге условная ордината  $y_{\text{усл.}} = 5\,365\,421,216$  м, это означает, что точка расположена в пятой координатной зоне с долготой осевого меридиана  $27^0$ , а ее истинная ордината будет  $y_{\text{ист.}} = -134\,578,784$  м.

Абсциссы в каталогах координат приводятся истинные, отсчитанные от экватора.

Следует заметить, что линейные размеры координатных зон изменяются с изменением широты. Так, если на экваторе эти размеры максимальны и составляют 668 км, то с изменением широты эта величина изменяется по формуле

$$2(y_{\text{макс}})\text{км} \approx 668\cos B.$$

Так, для территории Республики Беларусь размеры шестиградусных зон изменяются от 420 км на широте ее южной точки до 374 км на широте ее северной точки. Максимальные удаления от осевого меридиана ( $y_{\text{макс}}$ ), влияющие на искажения в проекции, будут в два раза меньше.

Территории, на которых создана геодезическая сеть, может быть расположена в двух и более координатных зонах, следовательно, координаты исходных пунктов вычислены и приведены в каталогах в разных зонах (координатных системах). В этом случае возникает необходимость преобразования координат всех исходных пунктов в одну зону. Эта задача не вызывает каких-либо проблем, ее решение приведем дальше. Но вместе с тем это вызывает определенные неудобства и затрудняет массовые геодезические и топографические работы. Для того чтобы свести к минимуму такого рода проблемы, на практике приняты семиградусные зоны с разностью долгот осевых меридианов в  $6^0$ . В каталогах координаты пунктов государственной геодезической сети, попадающих в полосу перекрытия, приводят в двух зонах. При выборе координат из каталогов необходимо обращать внимание на то, чтобы первые цифры ординат совпадали.

На трапециях топографических карт, попадающих в зону перекрытия, наносятся выходы координатной сетки смежной зоны. Это облегчает работу с топографическими картами на объектах, расположенных в разных зонах.

Необходимость преобразования координат возникает несмотря на перекрытия зон. Например, при инженерно-геодезическом обеспечении проектирования, строительства и эксплуатации инженерных и иных объектов, когда предъявляются повышенные требования к величинам искажений отображаемых на плоскости геометрических параметров объектов. В этих случаях применяют условные системы плоских прямоугольных координат, когда в качестве осевого принимают меридиан со средней долготой объекта. В последние годы стали применяться проекции, отличные от проекции Гаусса – Крюгера. В этом случае также необходимо уметь решать задачу преобразования систем координат из одной проекции в другую. Раньше для решения этой задачи применялись самые различные по точности и сложности использования методы, от графических до аналитических, ос-

нованных на применении специальных таблиц. В настоящее время геодезические вычисления производятся, в основном, с применением современных ЭВМ. Поэтому наилучшим образом задача преобразования систем координат решается по следующей схеме:

$$\{x, y\}_A \rightarrow \{B, l_A\} \rightarrow \{B, l_B\} \rightarrow \{x, y\}_B. \quad (7.67)$$

Первое действие предполагает вычисление геодезических широт и разности долгот по плоским прямоугольным координатам данной зоны  $A$ , далее переходят к разности долгот в другой зоне  $B$ . На последнем этапе производят вычисление плоских прямоугольных координат по геодезическим в зоне  $B$ . Эта схема работает также и при переходе от одной проекции к другой.

### 7.9. Современные требования к геодезическим проекциям

С развитием измерительных технологий, прежде всего основанных на спутниковых системах позиционирования *GPS – NAVSTAR* (США) и *ГЛОНАСС* (Российская Федерация), когда на целый порядок повышается точность координатных определений по сравнению с классическими технологиями, существенно повышается оперативность работ и автоматизируются процессы формирования и математической обработки баз картографо-геодезических данных, коренным образом меняются требования к их представлению в определенной координатной среде. Естественно, в этих условиях формирование координатной среды должно производиться с учетом как новых измерительных и вычислительных возможностей, так и с учетом требований автоматизированных информационных технологий в описании и представлении пространственно распределенных объектов, несущих самую разнообразную информацию.

Для целей навигации и описания взаимного положения объектов, расположенных на больших территориях, включающих группы государств, континенты и Землю в целом, а также для решения специальных научных и технических задач геодезии применяется система геодезических пространственных координат ( $X, Y, Z$  или  $B, L, H$ ) на общеземном или референц-эллипсоиде. Такие системы координат рассмотрены нами ранее. Порядок их установления будет рассмотрен в следующем разделе курса «Высшая геодезия», который называется «Теоретическая или физическая геодезия».

Для геодезического обеспечения самых различных геоинформационных технологий удобнее и более доступна система плоских прямоуголь-

ных координат. Сформулируем общие требования, предъявляемые в современных условиях к формированию таких систем координат:

- строгое математическое обоснование и формирование систем координат на основе теории отображения поверхности земного эллипсоида и плоскости (геодезические проекции);
- математически обоснованная высокоточная взаимосвязь с системой геодезических пространственных координат;
- математически обоснованная и достаточно точная взаимосвязь между различными системами плоских прямоугольных координат;
- обеспечение государственного контроля, доступности, простоты и удобства практического применения для различных пользователей;
- обеспечение минимально возможных искажений отображаемых геометрических образов и взаимного положения объектов;
- автоматический выбор и связь различных систем координат на ЭВМ.

Следует отметить то, что в современных условиях происходит сближение понятий геодезическая и картографическая проекции, как это понималось ранее. Это имеет место, прежде всего, при создании электронно-цифровых аналогов топографических карт как картографической основы высокоточных ГИС. Такие карты в современных условиях все чаще создаются с использованием материалов дистанционного зондирования земной поверхности методами аэрокосмической съемки и их последующей обработки фотограмметрическими технологиями. Совершенствуются аэрофотосъемочные и стремительно развиваются электронно-сканирующие системы, повышается их разрешающая способность и точность. Таким образом, появляются новые возможности повышения качества и точности самых различных карт, в том числе топографических, оперативности их обновления. Известны уже в настоящее время технологии поддержания информации на специальных картах в режиме реального времени.

Как можно реализовать требования, предъявляемые с учетом сказанного и сформулированные ранее? Для этого нужно проанализировать тот опыт, который накоплен в мировой геодезической практике, и современные научные разработки в этой области. Наиболее распространенными в мире до настоящего времени являются конформные геодезические проекции: коническая Ламберта, цилиндрическая Гаусса – Крюгера, азимутальная (квазистереографическая) Руссиля. При этом нам известно, что коническая проекция наиболее приемлема для изображения территорий, вытянутых вдоль какой-либо параллели, если она принимается за стандартную параллель проекции, цилиндрическая – для территории, вытянутой вдоль осевого меридиана, азимутальная – для территорий округлой формы,

центр которых совпадает с центром проекции. Во всех этих проекциях картинная плоскость касается поверхности эллипсоида по стандартной параллели, осевому меридиану или в центральной точке соответственно.

Также известны самые различные варианты этих трех проекций на секущей плоскости. Наиболее известна из таких проекций и широко распространена на практике цилиндрическая проекция *UTM*. Ранее мы рассмотрели принцип формирования такого рода проекций, достаточно простой алгоритм вычислений в них.

Вместе с тем, ни одна из отдельно взятых проекций не может отвечать требованиям, указанным ранее, так как не может наилучшим образом подходить к изображению на плоскости различных по форме территорий. В этом случае нужно искать иные пути формирования проекций. Главным условием, как отмечалось ранее, должно быть условие обеспечения минимально возможных искажений отображаемых элементов. В картографии известен критерий, обеспечивающий такие условия. Этот критерий впервые сформулирован без доказательства в виде теоремы выдающимся российским механиком, математиком и картографом академиком П.Л. Чебышевым в 1856 году. Строгое доказательство теоремы Чебышева в 1894 году дал известный российский картограф академик Д.А. Граве. В картографии этот критерий известен как **критерий Чебышева – Граве о наилучших проекциях**. Согласно этому критерию наименьшие искажения в пределах всей изображаемой территории будут иметь место в том случае, когда значение масштаба изображения постоянно на ее контуре. Другими словами, проекция будет наилучшей, если одна из ее изогол будет совпадать с контуром изображаемой территории. Таким образом, мы пришли к выводу о том, что в современной геодезической проекции должна быть заложена алгоритмическая возможность управления формой изогол.

Форма контуров изображаемых территорий может быть в общем случае произвольна. Здесь возникает вопрос, насколько близки по своей форме должны быть изогола и изображаемый контур. Известный российский геодезист и картограф Н.А. Урмаев показал, что возможны два пути решения этой задачи. Первый путь – стремление к наилучшему совпадению контура и изоголы, при этом теряется конформность изображения. Второй путь – обобщенная аппроксимация контура изоголой в виде некоторой математической кривой при сохранении конформности изображения. При этом показано, что отличие максимальных искажений в проекциях, полученных двумя путями, несущественно и остается одного порядка. Для геодезических проекций, которые, как известно, конформны, возможен для реализации только второй путь.

Рассмотрим один из вариантов решения поставленной задачи. Как уже отмечалось ранее, основными уравнениями, определяющими конформность проекции, являются уравнения Коши – Римана в частных производных (7.11) в их алгоритмическом описании (7.28). Если взять две проекции, описанные общим алгоритмом, рассмотренным ранее, координаты в которых обозначить соответственно через  $(x, y)_1$  и  $(x, y)_2$  и получить новую проекцию с координатами  $(x, y)$ , связанными уравнениями

$$\begin{aligned} (x) &= k_1 (x)_1 + k_2 (x)_2; \\ (y) &= k_1 (y)_1 + k_2 (y)_2 \end{aligned} \quad (7.68)$$

при выполнении условия

$$k_1 + k_2 = 1, \quad (7.69)$$

то несложно убедиться в справедливости уравнений

$$(C_j) = k_1 (C_j)_1 + k_2 (C_j)_2. \quad (7.70)$$

Здесь получаются коэффициенты новой проекции, которая будет конформной потому, что ее координаты получены в виде линейных уравнений относительно координат исходных проекций и для них справедливы уравнения Коши – Римана. Следовательно, для этой проекции будет работать общий алгоритм, рассмотренный нами ранее для геодезических проекций. Отличительной характеристикой новой проекции, полученной на основе каких-либо проекций из рассмотренных ранее, является то, что, изменяя значения коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  в (7.70), можно регулировать степень участия в новой проекции одной из двух исходных. Коэффициенты (7.69) называются композиционными коэффициентами, а новая проекция – композиционной геодезической проекцией. Эта проекция имеет все свойства, присущие геодезическим проекциям, объединенным общим алгоритмом, как частные случаи включает в себя все рассмотренные ранее проекции, а также допускает формирование геодезических проекций, удовлетворяющих критерию Чебышева – Граве о наилучших проекциях.

Если взять в качестве первой цилиндрическую проекцию, а в качестве второй коническую, то при условии  $k_1 = 0$  получим коническую, при  $k_2 = 0$  – цилиндрическую, при  $k_1 = k_2 = 0.5$  – азимутальную проекции. При различных иных значениях композиционных коэффициентов, удовлетворяющих (7.69), например,  $k_1 = 0.75$ ,  $k_2 = 0.25$ , получаем проекцию с формой изоколы в виде эллипса, вытянутого вдоль осевого меридиана, при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.85$  – проекцию с формой изоколы в виде эллипса, вытянутого вдоль стандартной параллели. Если один из композиционных коэффициентов отрицательный, то получаем проекцию с изоколами в виде двух пар сопряженных гипербол с их асимптотами.

Таким образом, мы можем получить общий алгоритм формирования геодезических проекций, отвечающих современным требованиям картографо-геодезического обеспечения геоинформационных систем.

### ***Вопросы для самоконтроля по разделу 7***

1. В каких случаях применяют геодезические проекции?
2. Основные свойства конформных отображений поверхностей.
3. Виды поправок, вводимых для установления связи между полярными сфероидическими и плоскими координатами, применяемыми в геодезии.
4. Что объединяет наиболее распространенные в мире геодезические проекции?
5. Какое уравнение определяет вид геодезической проекции?
6. Что вычисляют в геодезических проекциях?
7. Какой путь позволяет создать общее алгоритмическое описание класса геодезических проекций?
8. Достоинства и недостатки известных геодезических проекций.
9. Как можно управлять распределением искажений внутри изображаемой области?
10. Что можно сказать о практике применения проекции Гаусса – Крюгера?
11. В чем отличие традиционного изложения теории проекции Гаусса – Крюгера?
12. Почему топографические карты создают в той же системе координат, что и каталоги координат пунктов государственной сети?
13. Системы координат в инженерной геодезии.
14. Что называется частным масштабом длин в проекциях?
15. Что такое сближение меридианов на плоскости и эллипсоиде?
16. Смысл поправок за кривизну изображения геодезической линии эллипсоида на плоскости.
17. Практика применения проекции Гаусса – Крюгера в нашей стране.
18. Требования к координатной основе автоматизированных технологий в проектировании, строительстве и эксплуатации инженерных сооружений.
19. Координатная основа геоинформационных технологий.

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

## 8. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ.

**Теоретическая геодезия** является завершающей частью курса «**Высшая геодезия**», ее основной задачей является **определение формы и размеров Земли** как физического и геометрического тела на основе законов механики и результатов измерений, выполненных на поверхности Земли и в околоземном пространстве.

В сфероидической геодезии мы рассмотрели методы решения задач на поверхности земного эллипсоида, параметры которого принимались известными. В теоретической геодезии рассматриваются **методы определения этих параметров**, определение **физической модели Земли – геоида**, а также изучаются методы **определения отступлений** физических и геометрических характеристик земного эллипсоида и геоида. Физической характеристикой этих отступлений служит **аномалия силы тяжести**, а геометрическими – **уклонения отвеса** и **аномалии высот**.

В теоретической геодезии изучаются основы создания **системы геопотенциальных высот** точек земной поверхности и методы их вычисления по результатам измерений, когда речь идет о **высокоточной передаче высот на большие расстояния**.

Рассматривается **проблема редуцирования измерений** с физической поверхности Земли на поверхность эллипсоида, которая в геодезии является **координатной** или **поверхностью относимости**.

**Определение параметров земного эллипсоида и ориентирование его поверхности в теле Земли** рассматривается как традиционными методами, основанными на **астрономо-геодезических и гравиметрических измерениях**, так и современными, основанными на **спутниковых системах позиционирования**. Вводится понятие **исходных геодезических дат** для геодезической основы государства и методы их установления. Рассматриваются вопросы установления государственных геодезических систем координат как классическими, так и современными способами.

Поскольку в качестве основы для решения задач геодезии вообще и теоретической геодезии в частности является государственная астрономо-геодезическая сеть первого класса, рассматриваются также **методы уравнивания этой сети** в историческом аспекте и вопросы совместного уравнивания сплошной сети первого-второго классов в современных условиях.

С развитием измерительных технологий на основе современных достижений науки и техники реализованы новые возможности **установления систем координат**. Так, на смену референцной системе координат **СК-42**

приходят современные общеземные системы координат **WGS-84** (США) и **ПЗ-90** (РФ), рекомендованные для целей навигации и решения общепланетарных задач, а также референцные **СК-95** и другие, рекомендованные для целей геодезии, картографии и топографии в масштабах государства и для решения задач геодезического обеспечения ГИС-технологий. В теоретической геодезии рассматриваются вопросы **установления параметров преобразования различных систем координат**, а также методы установления их взаимосвязи.

## 9. ОСНОВЫ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

### 9.1. Общие сведения о потенциале силы тяжести

Сила  $F$  взаимного притяжения двух точечных масс  $M$  и  $m$ , удаленных друг от друга на расстояние  $r$ , определяется законом всемирного тяготения Ньютона

$$F = f \frac{Mm}{r^2}, \quad (9.1)$$

где  $f$  – **гравитационная постоянная**, определяющая силу притяжения двух точечных единичных масс на единичном расстоянии в принятой системе мер. Если речь идет о земном притяжении, тогда для массы Земли (учитывая массу ее атмосферы)  $M$ , сосредоточенной в ее центре, имеют **геоцентрическую гравитационную постоянную Земли**, определяемую произведением  $fM$ .

Если расстояние между двумя точками увеличится на бесконечно малую величину  $dr$ , то будет совершена элементарная работа

$$dA = f \frac{Mm}{r^2} dr,$$

равная потере потенциальной энергии

$$dA = -dV.$$

Отсюда потенциальная энергия притяжения двух точечных масс определится выражением

$$V = \int_0^V dV = fMm \int_0^r \frac{dr}{r^2} = f \frac{Mm}{r}. \quad (9.2)$$

Если взять единичную массу  $m = 1$ , то пользуются скалярной функцией

$$V = f \frac{M}{r},$$

которую называют **потенциалом массы Земли  $M$**  или **геопотенциальной функцией**. Потенциал точки равен работе, затраченной гравитационной силой на перемещение единичной массы из бесконечности в данную точку. Для подтверждения этого утверждения проинтегрируем уравнение (9.2) для двух точек  $Q_0$  до  $Q$ , находящихся на конечном расстоянии. Работа по перемещению единичной массы из одной точки в другую определится разностью их потенциалов

$$A = \left| - \int_{Q_0}^Q dV \right| = V(Q) - V(Q_0).$$

Если одна из точек  $Q_0$  находится на бесконечном удалении, ее потенциал равен нулю  $V(Q_0) = 0$ .

Согласно второму закону механики сила  $F$  связана с ускорением  $g$  уравнением

$$F = mg, \quad g = \frac{F}{m} = f \frac{M}{r^2} = - \frac{dV}{dr}, \quad (9.3)$$

где получено уравнение связи потенциала силы притяжения и ускорения.

Потенциальная функция  $V$  в пространстве массы  $M$  задает поле гравитационных ускорений, разложенных по осям геоцентрической системы пространственных координат  $OXYZ$ , определяемое уравнениями

$$\overline{W}_x = - \frac{\partial V}{\partial x} \overline{i}; \quad \overline{W}_y = - \frac{\partial V}{\partial y} \overline{j}; \quad \overline{W}_z = - \frac{\partial V}{\partial z} \overline{k}. \quad (9.4)$$

При этом модуль вектора ускорения силы притяжения имеет выражение

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}.$$

При вычислении потенциала силы притяжения реальной массы, определенным образом распределенной внутри какого-либо тела, используют свойство суперпозиции отдельных точечных масс  $dm_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). В случае, когда общая притягивающая масса  $M$  объемного тела образуется суммой элементарных масс  $dm$ , ее потенциал равен сумме потенциалов элементарных масс и определяется интегральным уравнением

$$V = f \int_M \frac{dm}{\rho}. \quad (9.5)$$

В геодезии имеют дело с потенциалом Земли. В этом случае необходимо учесть две особенности: во-первых, масса и размеры Земли определяются из материалов астрономических, гравиметрических и геодезических измерений, во-вторых, Земля обращается вокруг своей оси, следова-

тельно, на материальные точки действует сила тяжести, равная сумме силы притяжения и центробежной силы.

Таким образом, потенциал силы тяжести  $W$  равен сумме потенциала силы притяжения  $V$  и потенциала центробежной силы  $U'$ .

$$W = V + U'. \quad (9.6)$$

Потенциал центробежной силы определяется суточным вращением Земли. Пусть радиус Земли равен  $R$ , а геоцентрические пространственные координаты точки определяются известными уравнениями

$$x = R \cos \Phi \cos L; \quad y = R \cos \Phi \sin L; \quad z = R \sin \Phi. \quad (9.7)$$

Найдем производные от координат по времени, для чего принимаем во внимание то, что с изменением времени изменяется только долгота  $L$ , отсчитанная от некоторого начала в пространстве.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -R \cos \Phi \sin L \omega; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = R \cos \Phi \cos L \omega; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \quad (9.8)$$

Здесь  $\omega = \frac{\partial L}{\partial t}$  – угловая скорость суточного вращения Земли. Производные выражают скорость изменения пространственных координат. Вторые производные от выражений (9.7) будут выражать соответствующие составляющие ускорения центробежной силы

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega^2 x; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \quad (9.9)$$

Потенциал центробежной силы имеет известное выражение

$$U' = \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{2}. \quad (9.10)$$

Следовательно, потенциал силы тяжести Земли согласно формуле (9.6) будет иметь выражение

$$W = f \int \frac{dm}{\rho} + \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{2}. \quad (9.11)$$

Поверхности, в каждой точке которых потенциал постоянен, называются изопотенциальными или уровенными поверхностями. Эти поверхности не пересекаются друг с другом и не касаются друг друга. Работа по перемещению точечной массы по уровенной поверхности равна нулю. Линии, касательные к которым являются нормальными к уровенным поверхностям (векторами силы тяжести), называются силовыми линиями гравитационного поля.

Уровенные поверхности, проходящие внутри Земли на разном удалении от ее центра, имеют различную форму и не параллельны друг другу потому, что распределение плотностей материи внутри Земли неоднород-

но. В геодезии выделяют одну из уровенных поверхностей, которая проходит через точку, служащую началом счета высот. Обычно эта точка совпадает со средним уровнем воды в море, прилегающем к территории государства. Эта поверхность является физической моделью Земли и называется **геоидом** при условии равенства ее массы всей массе Земли (вместе с массой атмосферы). Поверхность геоида совпадает с невозмущенным средним уровнем Мирового океана, а под материками проходит ортогонально силовым линиям гравитационного поля Земли.

Следует иметь в виду, что уровень Мирового океана подвержен колебаниям, вызванных различными внешними воздействиями (лунно-солнечное притяжение, температурные колебания и др.). В связи с этим поверхность геоида не может совпадать с реальной фигурой водной оболочки. Полезно отметить, что в зоне Панамского канала, соединяющего бассейны Тихого и Индийского океанов, отмечена разность уровней их водной поверхности, составляющая 0.6 м. Уровень Черного моря ниже на 0.7 м нуль-пункта Кронштадского футштока.

## **9.2. Нормальный и возмущающий потенциал силы тяжести. Аномалии силы тяжести**

Изучение формы и размеров Земли требует изучения ее гравитационного поля, которое характеризуется потенциалом силы тяжести. Эта задача решается на основе измерений, выполненных в реальных условиях. Как видно из выражения (9.11), потенциал силы тяжести определяется двумя составляющими: потенциалом притяжения  $V$  и потенциалом центробежной силы  $U'$ . Вторая составляющая существенно меньше первой и может быть получена без затруднений, так как скорость суточного вращения Земли определена из астрономических измерений, а координаты точек известны. Гораздо сложнее определяется первая составляющая, выражающая потенциал притяжения Земли. Здесь необходимо знать детальное распределение плотностей внутри Земли, их реальными данными мы не располагаем. В связи с этим выражение (9.11) не может служить для решения задачи определения потенциала силы тяжести без привлечения каких-либо гипотез о внутреннем строении Земли.

Из потенциала силы притяжения  $V$  можно выделить некоторую модельную часть. При условии выбора хорошей модели Земли эта часть будет составлять основную часть потенциала силы притяжения. Ее называют нормальным потенциалом и обозначают  $U$ , тогда можем записать для потенциала силы тяжести Земли

$$W = U + T, \quad (9.12)$$

где величину  $T$  называют **возмущающим потенциалом**.

За нормальный потенциал  $U$  принимают потенциал эллипсоида вращения с известными геометрическими параметрами, имеющего массу и угловую скорость, равные массе и угловой скорости реальной Земли. Такой эллипсоид называют **Нормальной Землей**. Здесь возникает проблема, как быть с внутренним распределением плотностей внутри Нормальной Земли для определения нормального потенциала или потенциала нормальной силы тяжести. Эту проблему впервые решил английский ученый Стокс, который в 1849 году доказал теорему, согласно которой потенциал силы тяжести любого тела может быть определен из вычислений однозначно как на его поверхности, так и во внешнем пространстве, если известны его внешняя уровенная поверхность, а также масса и угловая скорость вращения тела вокруг неизменной оси, независимо от распределения плотностей внутри этого тела. Если форма поверхности сложная, например, поверхность геоида, то вычисление потенциала в конечном виде проблематично. Если же поверхность простая, как сфера или эллипсоид, то задача решается по замкнутым формулам.

Таким образом, мы видим, что для Нормальной Земли потенциал может быть вычислен. Здесь отметим, что потенциал центробежной силы также вычисляется без проблем, поэтому на основе теоремы Стокса достаточно вычислять потенциал силы притяжения Нормальной Земли.

Для эллипсоида вращения итальянским ученым Сомильяно в 1929 году получено строгое уравнение для вычисления ускорения нормальной силы тяжести в точке с широтой  $B$  на его поверхности ( $H = 0$ )

$$\gamma_B = \frac{a\gamma_0 \cos^2 B + b\gamma_{90} \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad (9.13)$$

где:  $a$ ,  $b$  – большая и малая полуоси уровенного эллипсоида,  $\gamma_B$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_{90}$  – значения ускорения нормальной силы тяжести в некоторой точке с широтой  $B$ , а также на экваторе и полюсе. Последние два значения постоянны и определяются при установлении параметров Нормальной Земли. Для удобства вычислений вручную раньше формулу (9.13) преобразовывали путем разложения в ряд, принимая обозначения:

$$\begin{aligned} \text{полярное сжатие} & - \alpha = (a - b)/a; \\ \text{коэффициент} & - \beta = (\gamma_{90} - \gamma_0) / \gamma_0. \end{aligned}$$

Используя различные геометрические и физические параметры Нормальной Земли по мере их уточнения, получают различные представления уравнения (9.13) в виде разложений в ряды. Так в 1908 году немецкий ученый Гельмерт получил формулу для размеров и формы эллипсоида Бессе-

ля и массы Земли, вычисленной на основе измерений ускорения силы тяжести, выполненных на 1603 пунктах.

$$\gamma_B = 978.030(1 + 0.005302 \sin^2 B - 0.000007 \sin^2 2B). \quad (9.14)$$

Известны также формулы Кассиниса (1930 г.), Жонголовича (1952 г.), Грушинского (1962 г.) и др.

При современной вычислительной технике представление (9.13) в виде (9.14) неактуально. Вместе с тем традиционная форма представления уравнения (9.13) имеет место. Например, в системе координат ПЗ-90, полученной российскими учеными по результатам современных данных на эпоху 1990 г., это уравнение предлагается в виде

$$\gamma_B = 978.0319(1 + 0.0053024 \sin^2 B - 0.0000058 \sin^2 2B). \quad (9.15)$$

Необходимо заметить, что при поверхности Нормальной Земли в форме эллипсоида вращения с параметрами  $a$  и  $b$  на различном удалении от нее форма изопотенциальных поверхностей силы тяжести меняется. Это понятно из того, что по мере удаления от поверхности земного эллипсоида центробежная сила возрастает, а сила притяжения уменьшается.

Величина возмущающего потенциала, как было отмечено, зависит от того, насколько Нормальная Земля отличается от реальной (геоида). Из определения нормального потенциала видно, что возмущающий потенциал обусловлен только несовпадением поверхностей геоида и земного эллипсоида. На поверхности Земли значения реальных ускорений силы тяжести  $g$  могут быть получены из гравиметрических измерений. Следовательно, для каждого геодезического пункта, широта которого известна, может быть вычислено ускорение нормальной силы тяжести и измерено ускорение реальной силы тяжести, а также получены их разности  $\Delta g$ , которые называют **аномалией силы тяжести**:

$$\Delta g = g - \gamma. \quad (9.16)$$

Здесь возникает вопрос, заключающийся в том, что значение  $g$  измерено на реальной поверхности Земли ( $H \neq 0$ ), а значение  $\gamma$  вычислено на поверхности эллипсоида ( $H = 0$ ). Необходимо редуцировать ускорение нормальной силы тяжести на некоторую высоту  $H$  по нормали  $n$  к поверхности эллипсоида. В этом случае применяем разложение по формуле Тейлора

$$\gamma_B^H = \gamma_B + \frac{\partial \gamma}{\partial n} H + \dots \quad (9.17)$$

здесь частная производная называется вертикальным градиентом силы тяжести. Высоты точек земной поверхности малы по сравнению с радиусом Земли, поэтому в разложении (9.17) для решения многих задач достаточно

ограничиться только первым членом разложения, более того, при вычислении производной можно пренебречь сжатием Земли. Тогда будем иметь

$$\gamma = \frac{fM}{R^2}; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial R} = -\frac{2fM}{R^3} = -\frac{2\gamma}{R}.$$

С учетом этого формула (9.17) принимает вид

$$\gamma_B^H = \gamma_B - \frac{2\gamma_B}{R}H + \dots \quad (9.18)$$

Мы показали принцип определения аномалий силы тяжести, которые характеризуют несовпадения реального и нормального гравитационных полей. Также важной характеристикой этого несовпадения является возмущающий потенциал, значение которого необходимо знать для решения самых различных задач геодезии. Мы получили связь потенциала силы тяжести с ускорением (9.3). Следовательно, и возмущающий потенциал аналогично связан с аномалией силы тяжести (разностью ускорений). Проблемы с установлением аналитической зависимости между этими величинами обусловлены тем, что, вообще говоря, не существует аналитического выражения аномалии силы тяжести. Здесь можно предложить некоторую модель, в той или иной степени приближающуюся к реальности. Решение задачи упрощается за счет того, что аномалии силы тяжести при достаточно хорошей модели Земли имеют малые величины.

Наиболее известна модель для вычисления возмущающего потенциала некоторой сферической области  $\sigma$ , предложенная Стоксом:

$$T_\sigma = \frac{1}{4\pi R} \int_\sigma \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (9.19)$$

где  $\psi$  – сферическое расстояние от данной точки до текущей точки поверхности;  $R$  – радиус сферы, принятый равным среднему радиусу кривизны Земли;  $S(\psi)$  – функция Стокса, имеющая выражение

$$S(\psi) = 1 + \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right). \quad (9.20)$$

Для практического применения в формуле Стокса (2.19) удобнее перейти от интегрирования по поверхности  $\sigma$  к интегрированию по сферическим расстоянию  $\psi$  и азимуту  $A$ . Элемент сферической поверхности при этом имеет известное выражение

$$d\sigma = R^2 \sin \psi d\psi dA$$

и уравнение Стокса принимает вид

$$T_\sigma = \frac{R}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin \psi d\psi dA. \quad (9.21)$$

## Вопросы для самоконтроля по разделам 8 – 9

1. Что такое потенциал силы притяжения и силы тяжести Земли?
2. Что является физической моделью реальной Земли?
3. Что такое Нормальная Земля?
4. Почему введено понятие аномального гравитационного поля Земли?
5. Что такое аномалия силы тяжести Земли?
6. Как определяются аномалии силы тяжести Земли?
7. Как редуцируются ускорения нормальной силы тяжести?

## 10. УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ

### 10.1. Общие сведения

Несовпадение поверхностей геоида и эллипсоида, принятого в качестве координатной поверхности, обусловлено аномалиями силы тяжести. В каждой точке вектор нормальной силы тяжести  $n$  не равен вектору реальной силы тяжести  $o$ . Разность их модулей характеризует возмущающий потенциал силы тяжести, а разность их направлений определяет угол  $u$ , образованный отвесной линией и нормалью к поверхности эллипсоида, который называют **уклонением отвеса**. Таким образом, из рисунка 10.1 видим, что уклонения отвеса характеризуют непараллельность отсчетной уровенной поверхности (геоида) и поверхности эллипсоида. Как известно, в геодезии применяют как общеземные, так и референчные системы координат. Принято считать уклонения отвеса, отсчитанные от нормалей к поверхности общего земного эллипсоида, **абсолютными**, а от нормалей к поверхности референц-эллипсоида – **относительными**.

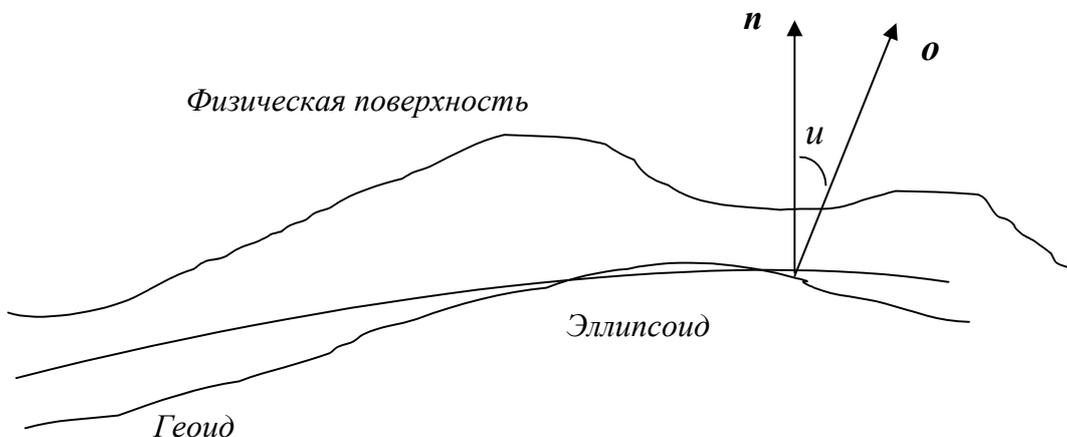


Рис. 10.1

Как правило, государственные геодезические сети определяются в референцных системах координат относительно принятых исходных геодезических дат. Из астрономических измерений на пунктах Лапласа получают астрономические координаты. На этих пунктах определяют **астрономо-геодезические уклонения отвеса**, которые являются относительными. Такой метод определения уклонений отвесных линий называют **геометрическим**.

Уклонения отвеса являются геометрическими характеристиками отступлений поверхностей геоида и эллипсоида и характеризуют их непараллельность. Как видим из рисунка, они связаны с векторами реальной и нормальной силы тяжести, следовательно, уклонения отвеса должны иметь аналитическую связь с аномалиями силы тяжести. Определение уклонений отвеса по аномалиям силы тяжести носит название **гравиметрического** и относится к **физическому** методу.

Как будет показано далее, как астрономо-геодезический, так и гравиметрический методы определения уклонений отвеса имеют свои достоинства и недостатки. Поэтому на практике применяется, в основном, **астрономо-гравиметрический метод** вывода уклонений отвеса. В этом методе сведены к минимуму недостатки обоих методов и объединены их достоинства.

В высшей геодезии уклонения отвеса играют важную роль:

- удобные и наглядные геометрические характеристики отступлений реального и нормального гравитационных полей, используются для изучения фигуры Земли (геоида);
- используются для решения задачи редуцирования измерений, выполненных на физической поверхности Земли, на поверхность земного эллипсоида, на которой определена система координат.

Уклонение отвеса  $u$  называется **полным уклонением отвеса**. Этот угол лежит в некоторой плоскости, образующей с плоскостью меридиана некоторый угол  $\theta$ , называемый азимутом полного уклонения отвеса. Для удобства решения научных и практических задач высшей геодезии полное уклонение отвеса в данной точке разлагают на две **составляющие** – в **плоскости меридиана  $\xi$**  и **плоскости первого вертикала  $\eta$** . Также определяют **составляющую уклонения отвеса в заданном направлении  $u_A$** .

Существуют простые зависимости между полным уклонением отвеса и его составляющими

$$u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}; \quad \xi = u \cos \theta; \quad \eta = u \sin \theta. \quad (10.1)$$

## 10.2. Астрономо-геодезический вывод уклонений отвеса

Пусть на физической поверхности Земли (рис. 10.2) имеется некоторая точка  $T$ , кроме того, для простоты предположим, что через эту точку проходит поверхность референц-эллипсоида (геодезическая высота точки равна нулю). Если точка  $T$  является центром астрономо-геодезического пункта Лапласа, то для нее известными являются астрономические широта  $\varphi$ , долгота  $\lambda$  и азимут  $\alpha_m$  направления, полученные из астрономических наблюдений, а также геодезические широта  $B$ , долгота  $L$ , и азимут  $A_m$  направления.

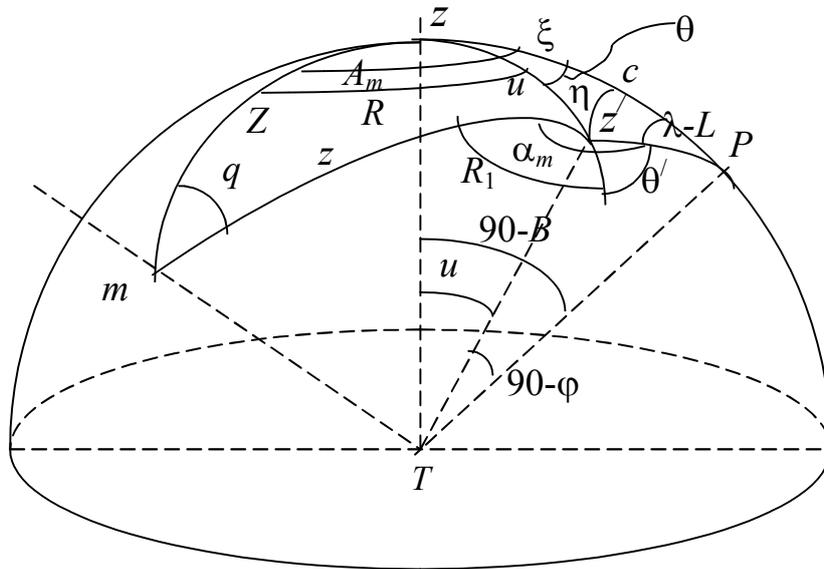


Рис. 10.2

На рисунке 10.2 имеем сферу единичного радиуса с центром в точке  $T$ , кроме того:  $P$  – полюс мира,  $TP$  – прямая, параллельная оси вращения Земли;  $Z$  – геодезический зенит точки  $T$ ,  $ZT$  – нормаль к поверхности эллипсоида;  $Z'$  – астрономический зенит,  $TZ'$  – отвесная линия;  $ZP = 90 - B$  – дуга круга единичного радиуса, равная дополнению до  $90^0$  геодезической широты  $B$ ;  $Z'P = 90 - \varphi$  – дуга круга единичного радиуса, равная дополнению до  $90^0$  астрономической широты  $\varphi$ ;  $ZZ' = u$  – полное уклонение отвеса;  $Zc$  – дуга первого вертикала, образующая прямой угол с геодезическим меридианом  $PZ$  в точке  $c$ ;  $PZ'$  – астрономический меридиан точки  $T$ ; дуги  $Zc = \xi$  и  $Z'c = \eta$  – составляющие уклонения отвеса в меридиане и первом вертикале соответственно;  $\theta$  – геодезический азимут полного уклонения отвеса;  $\theta'$  – астрономический азимут полного уклонения отвеса;  $Tm$  – направление на местный предмет,  $A_m$  и  $\alpha_m$  – его геодезический и астрономи-

ческий азимуты;  $\lambda - L$  – угол, образованный астрономическим и геодезическим меридианами, равный разности астрономической и геодезической долготы точки  $T$ ;  $Zm = Z$  и  $Z'm = z$  – дуги единичного круга, соответственно равные геодезическому и измеренному зенитным расстояниям на предмет  $m$ .

Для решения задачи определения астрономо-геодезического уклонения отвеса рассмотрим на рис. 10.2 прямоугольный сферический треугольник  $PcZ'$ , в котором угол при вершине  $c$  – прямой, катеты  $Pc = 90 - B - \xi$ ,  $Z_1c = \eta$ , а гипотенуза  $PZ' = 90 - \varphi$ . Применяя аналогии Непера для решения прямоугольных сферических треугольников (косинус любого элемента прямоугольного сферического треугольника равен произведению котангенсов смежных с ним элементов или произведению синусов несмежных с ним элементов, при этом значения катетов берется как дополнение до  $90^0$ , а прямой угол не считается элементом), имеем

$$\begin{aligned} \cos(\lambda - L) &= \operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}(B - \xi) \\ \sin \eta &= \sin(\lambda - L) \cos \varphi \end{aligned} \quad (10.2)$$

При хорошо ориентированном референц-эллипсоиде относительно геоида полное уклонение отвеса, его составляющие, а также разность астрономических и геодезических долгот в любой точке будут малыми величинами. В уравнениях (10.2) можем разложить тригонометрические функции малых аргументов в ряд Маклорена, ограничиваясь только первыми членами разложений, в результате получим с необходимой точностью

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi - B \\ \eta &= (\lambda - L) \cos \varphi \end{aligned} \quad (10.3)$$

Как видим, для определения астрономо-геодезических уклонений отвеса в каждом пункте необходимо иметь как астрономические, так и геодезические широты и долготы. В соответствии со схемой построения государственной геодезической сети это имеет место только на пунктах Лапласа. Точность астрономо-геодезических уклонений отвеса соответствует точности определения астрономических долгот и широт. Если они определены по программе астрономических наблюдений первого класса, то это составляет величину в  $0.3''$ .

Для решения задачи редуцирования измерений на поверхность эллипсоида необходимо знать составляющую полного уклонения отвеса  $\nu_A$  в заданном направлении. Для решения этой задачи спроектируем дугу  $ZZ_1$  на дугу  $Zm$ , получим прямоугольный треугольник, который по малости можно считать плоским. Один из катетов его (на дуге  $Zm$ ) равен искомой величине  $\nu_A$ , которая выражается уравнением

$$\nu_A = u \cos R = u \cos(A_m - \theta) = u \cos A_m \cos \theta + u \sin A_m \sin \theta.$$

С учетом выражений (10.1) получаем

$$v_A = \xi \cos A_m + \eta \sin A_m. \quad (10.4)$$

На практике центры  $M$  геодезических пунктов не лежат на поверхности эллипсоида, а расположены на некоторой высоте  $H$ . В связи с этим возникает задача редуцирования уклонов отвеса с физической поверхности Земли на поверхность эллипсоида. При этом следует иметь в виду, что силовая линия гравитационного поля Земли имеет кривизну, обусловленную неравномерным распределением плотностей горных пород в земной коре. Это видно из рисунка 10.3. Она лежит в плоскости меридиана, следовательно, ее кривизна не влияет на составляющую уклона отвеса в плоскости первого вертикала.

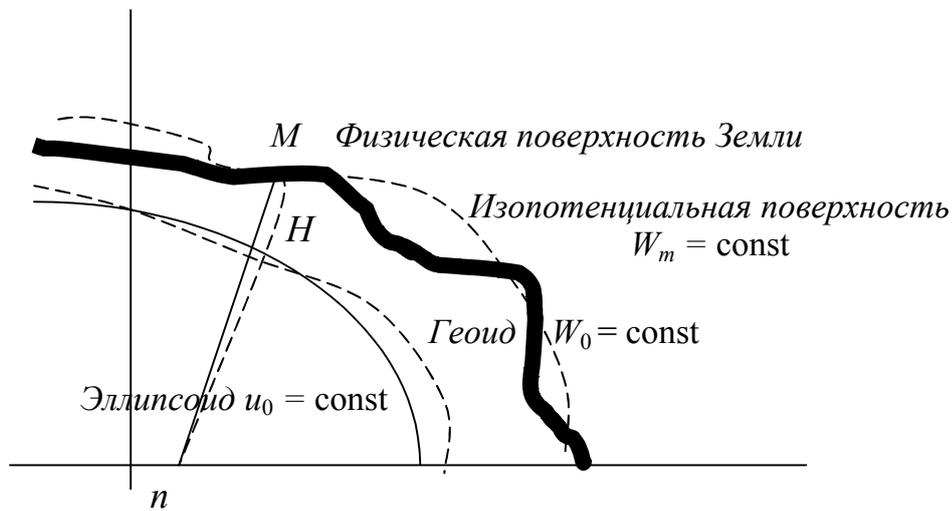


Рис. 10.3

На рисунке 10.3 показана отвесная линия  $Mn$ , проведенная в точке  $M$ , и силовая линия гравитационного поля – дуга  $Mn$ , которая ортогональна изопотенциальным поверхностям, проходящим на любом удалении от поверхности эллипсоида,  $W_m = \text{const}$ ,  $W_0 = \text{const}$  и т. д. Здесь видно, что направление отвеса на поверхности эллипсоида (касательная к силовой линии) непараллельно направлению отвеса в точке  $M$ . Это значит, что астрономическая широта  $\varphi$ , измеренная в точке  $M$ , не будет равна широте ее проекции на поверхности эллипсоида. Их разность определяется уравнением

$$(\varphi - \varphi_H)'' = (B - B_H)'' = -\rho'' \frac{H_{(км)}}{M} \left( \frac{\gamma_{90} - \gamma_0}{\gamma_{90}} \right) \sin 2B = 0.171 H_{(км)} \sin 2B.$$

Таким образом, окончательные формулы для вычисления астрономо-геодезических уклонов отвеса принимают вид

$$\begin{aligned}\xi''_{az} &= \varphi - B - 0.171'' H_{(км)} \sin 2B; \\ \eta''_{az} &= (\lambda - L) \cos \varphi.\end{aligned}\tag{10.5}$$

Как видно из формул (10.5), поправка на один километр высоты в составляющую уклонения отвеса в плоскости меридиана на широте  $B = 45^0$  равна  $-0.171''$ .

### 10.3. Уравнение Лапласа для геодезических азимутов

Если обратиться к рисунку 10.2, видны следующие уравнения:

$$\begin{aligned}A_m &= R + \theta; \\ \alpha_m &= R_1 + \theta' .\end{aligned}\tag{10.6}$$

Из треугольника  $ZZ'P$ , в котором угол при вершине  $Z'$  равен  $180 - \theta$ , можем записать по теореме косинуса угла сферической тригонометрии

$$-\cos \theta' = -\cos \theta \cos(\lambda - L) + \sin \theta \sin(\lambda - L) \sin B .$$

Учитывая то, что при хорошо ориентированном референц-эллипсоиде величина  $(\lambda - L)$  малая и можно учитывать в разложении в ряд по формуле Маклорена тригонометрических функций только первые члены разложений, как и при выводе составляющих уклонения отвеса, а также полагая  $\sin B = \sin \varphi$ , получаем

$$\cos \theta - \cos \theta' = (\lambda - L) \sin \theta \sin \varphi .$$

С учетом второй формулы (10.5), а также преобразуя разность косинусов в произведение, получаем

$$\begin{aligned}\cos \theta - \cos \theta' &= \eta \operatorname{tg} \varphi \sin \theta; \\ -2 \sin \frac{1}{2}(\theta - \theta') \sin \frac{1}{2}(\theta + \theta') &= \eta \operatorname{tg} \varphi \sin \theta.\end{aligned}$$

Учитывая то, что отличие  $\theta$  и  $\theta'$  малое и полагая  $2 \sin \frac{1}{2}(\theta - \theta') = (\theta - \theta')$ ;  $\frac{1}{2}(\theta + \theta') = \theta$ , можем записать с ранее принятой точностью

$$\theta - \theta' = \eta \operatorname{tg} \varphi \sin \theta = (\lambda - L) \sin \varphi .\tag{10.7}$$

Обращаясь на рисунке 10.2 к аналогичным элементам треугольников  $ZZ'P$  и  $ZZ'm$ , можем записать по аналогии с уравнением (10.7) для треугольника  $ZZ'P$  применительно к треугольнику  $ZZ'm$

$$R - R_1 = q \cos z .\tag{10.8}$$

Из треугольника  $ZZ'm$  по теореме синусов, учитывая малую величину  $u$ , имеем

$$\sin q = \sin u \frac{\sin R}{\sin z} = u \frac{\sin R}{\sin z}.$$

С учетом этого можем записать вместо (10.8)

$$R - R_1 = u \frac{\sin R}{\operatorname{tg} z} = u \frac{\sin(A_m - \theta)}{\operatorname{tg} z}. \quad (10.9)$$

Суммируя (10.7) и (10.9) и подставляя результат в уравнения (10.6), получаем после несложных преобразований и с учетом ранее принятых обозначений

$$A_m = \alpha_m - (\lambda - L) \sin \varphi + \frac{\eta \cos A_m - \xi \sin A_m}{\operatorname{tg} z}. \quad (10.10)$$

Полученное уравнение называют уравнением Лапласа для вычисления геодезического азимута. Из этого уравнения видно, что для вычисления геодезического азимута в астрономический азимут вводится две поправки: первая – за непараллельность астрономического и геодезического меридианов, вторая – за уклонение отвеса. На практике следует учитывать значимость этих поправок. Если первая учитывается всегда, то вторая, при хорошо ориентированном референц-эллипсоиде, когда составляющие уклонения отвеса малые величины, вводится только на тех пунктах Лапласа, когда значение  $z$  отличается от  $90^\circ$  более, чем на  $2^\circ$ . Точность азимутов Лапласа соответствует точности астрономических азимутов 1 класса и составляет величину, не более  $0.5''$ .

#### 10.4. Гравиметрические уклонения отвеса

Ранее нами приведено выражение для возмущающего потенциала через аномалии силы тяжести (9.21). Существует связь между составляющими уклонений отвеса (геометрическими характеристиками аномального гравитационного поля) и аномалиями силы тяжести (физическими характеристиками аномального гравитационного поля), выражаемая формулами, полученными голландским ученым Вейнинг-Мейнесом в 1928 году

$$\begin{aligned} \xi'' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta g Q \cos A dA d\psi; \\ \eta'' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta g Q \sin A dA d\psi, \end{aligned} \quad (10.11)$$

где  $\psi$  – сферическое расстояние от исследуемой точки до текущей;  $A$  – азимут направления, по которому взято  $\psi$ ;  $\Delta g$  – аномалия силы тяжести;  $Q$  – функция Вейнинг-Мейнеса, имеющая выражение

$$Q = \frac{\rho''}{2\gamma} \cos \frac{\psi}{2} \left( \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 12 \sin \frac{\psi}{2} - 32 \sin^2 \frac{\psi}{2} + \frac{3}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} - 12 \sin^2 \frac{\psi}{2} \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right).$$

При использовании формул (10.11) для вычисления составляющих уклонений отвеса необходимо знать аномалии силы тяжести на всей поверхности Земли. Для этого необходима мировая гравиметрическая съемка. В этом случае возможен вывод абсолютных уклонений отвеса относительно общеземного эллипсоида. Как указывалось ранее, астрономо-геодезические уклонения отвеса относительные, так как астрономо-геодезическая сеть страны вычисляется на референц-эллипсоиде. Отсюда видим, что гравиметрические уклонения отвеса не могут применяться для анализа отклонений геоида от референц-эллипсоида.

Сравнивая два независимых вывода уклонений отвеса, видим, что точные астрономо-геодезические уклонения отвеса могут быть определены только на первоклассных пунктах Лапласа. При существующей схеме построения астрономо-геодезической сети первого класса такие пункты расположены в вершинах первоклассных полигонов, и расстояние между ними составляет 200 – 250 км. Такой плотности недостаточно для изучения отступлений поверхности геоида от эллипсоида и решения редуционной проблемы для пунктов 1 – 4 класса государственной геодезической сети. Для вычисления гравиметрических уклонений отвеса необходимы данные по мировой гравиметрической съемке, что не всегда доступно.

Как видим, оба метода, несмотря на их достоинства, обладают существенными недостатками и не могут применяться на практике.

### 10.5. Астрономо-гравиметрические уклонения отвеса

Как отмечено ранее, уклонения отвеса играют важную роль при решении геодезических задач. Анализ влияния аномалий силы тяжести на составляющие гравиметрических уклонений отвеса показывает его четкую зависимость от расстояний между исследуемой и текущей точками. На этом основании возможно разделить всю поверхность Земли на кольцевые зоны с центром в исследуемой точке, при интегрировании (10.11) по  $\psi$  в зависимости от их влияния на значение уклонений отвеса. Большая работа по исследованию этого вопроса выполнена в ЦНИИГАиК (г. Москва) группой ученых под руководством М.С. Молоденского. В результате полу-

чено, что для учета влияния зон радиусом до 1 000 км можно использовать специальные палетки и гравиметрические карты. Понятно, что таким образом получают приближенные значения гравиметрических уклонов отвеса без учета влияния дальних зон. Исследования показали, что это влияние, хотя и имеет место, но сглажено и для группы геодезических пунктов, расположенных вдоль первого звена, носит систематический характер. Это обстоятельство позволило **интерполировать астрономо-геодезические уклоны отвеса** вдоль звена первого класса с использованием приближенных гравиметрических уклонов отвеса, полученных графическим путем с помощью палеток и местной гравиметрической съемки.

Рассмотрим идею такого интерполирования. Пусть на рис. 10.4 имеем звено первого класса. Здесь пункты Лапласа  $A, B, C, D$ , на которые от исходных геодезических дат страны переданы геодезические широты и долготы, а также из астрономических наблюдений определены астрономические широты и долготы.

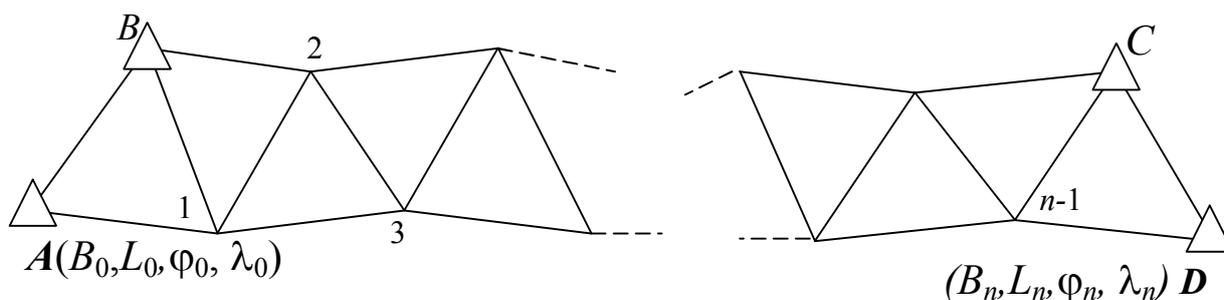


Рис. 10.4

Таким образом, например, на пунктах  $A$  и  $D$ , расстояние между которыми равно диагонали звена  $D$ , получены астрономо-геодезические уклоны отвеса  $\xi_0, \eta_0, \xi_n, \eta_n$  по формулам (10.5). Кроме того, для этих и всех пунктов звена с использованием палеток определены приближенные гравиметрические уклоны отвеса:  $\xi'_i, \eta'_i$  ( $i=0, 1, 2, 3, \dots, n$ ) по материалам местной гравиметрической съемки, выполненной на этих пунктах. Для астрономо-геодезических пунктов  $A$  и  $D$  вычисляют разности

$$\begin{aligned} \Delta\xi_0 &= \xi_0 - \xi'_0; & \Delta\eta_0 &= \eta_0 - \eta'_0; \\ \Delta\xi_n &= \xi_n - \xi'_n; & \Delta\eta_n &= \eta_n - \eta'_n. \end{aligned}$$

Далее вычисляют поправки (разности) точных астрономо-геодезических и приближенных гравиметрических уклонов отвеса, приходящиеся на один километр длины данного звена.

$$\delta\xi_{1\text{км}} = \frac{\Delta\xi_n - \Delta\xi_0}{D_{\text{км}}}; \quad \delta\eta_{1\text{км}} = \frac{\Delta\eta_n - \Delta\eta_0}{D_{\text{км}}}.$$

Поправки к приближенным значениям уклонений отвеса на пунктах звена получают по формулам линейного интерполирования.

$$\begin{aligned}\delta\xi_i &= \delta\xi_{1км} S_i; \\ \delta\eta_i &= \delta\eta_{1км} S_i,\end{aligned}\tag{10.12}$$

где  $S_i$  – расстояние от пункта  $A$  до текущего пункта звена.

Точные астрономо-гравиметрические уклонения отвеса для всех пунктов первоклассного звена получают по формулам

$$\begin{aligned}\xi_i^{a-zp} &= \xi_i' + \delta\xi_i \\ \eta_i^{a-zp} &= \eta_i' + \delta\eta_i\end{aligned}\quad (I = 1, 2, 3, \dots n)\tag{10.13}$$

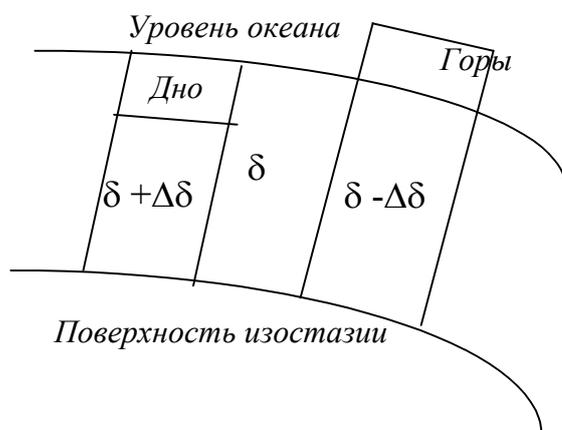
Анализ уклонений отвеса, полученных таким образом на пунктах государственной геодезической сети СССР, показывает их точность, не ниже астрономо-геодезических уклонений отвеса. Здесь возникает вопрос о том, что звено может располагаться в аномальном районе (что можно увидеть из материалов местной гравиметрической съемки) и поправки в приближенные уклонения отвеса не будут линейно зависеть от расстояния. В этом случае необходимо применять нелинейное интерполирование либо в середине звена произвести астрономические определения широты и долготы. Опыт показывает, что подобные случаи могут иметь место исключительно редко потому, что на расстояниях в 200 – 250 км резких изменений ускорения силы тяжести быть не может. Именно это обстоятельство учитывалось при разработке схемы и программы построения астрономо-геодезической сети СССР.

### **10.6. Топографические и топографо-изостатические уклонения отвеса**

Как уже рассмотрено выше, для вывода астрономо-геодезических и гравиметрических уклонений отвеса необходимо иметь как астрономо-геодезические пункты, так и материалы мировых гравиметрических измерений. В случае, когда на всей территории государства не завершены работы по построению астрономо-геодезической сети и не выполнены гравиметрические измерения, необходимо: установить исходные геодезические даты для ориентирования референц-эллипсоида; редуцировать на его поверхность измерения. Рассмотренные ранее методы определения уклонений отвеса неприемлемы. Такое положение имело место в Великобритании и других государствах в XIX в., когда метрополии не были связаны единой геодезической основой с колониями, а для освоения их территорий необходимы были точные карты и геодезическая основа. В Советском Союзе

к 30-м годам XX в. возникла проблема уточнения параметров эллипсоида Бесселя, выводов параметров и ориентировки референц-эллипсоида Красовского. При этом на территории, расположенной восточнее Урала, отсутствовала государственная геодезическая сеть, гравиметрические измерения.

Для решения задачи определения уклонений отвеса в случаях, когда недостает информации для астрономо-гравиметрического метода, используют топографо-изостатические уклонения отвеса. Идея их вычисления заключается в том, что при вычислении гравиметрических уклонений отвеса наибольшее влияние оказывают ближние зоны. Поэтому возникла мысль о том, что рельеф местности (топография), окружающей данную точку, в основном определяет уклонения отвеса. Избыток масс горных пород, заключенный в горных массивах, оказывает большее притяжение по сравнению с равнинными районами. Зная объем горных пород и их среднюю плотность, можно вычислить их притяжение и топографические уклонения отвеса. Впервые топографические уклонения отвеса вычислялись английскими геодезистами для обработки материалов астрономо-геодезических измерений в Индии. Так на одном из пунктов, расположенном на севере Индии у подножия Гималайского хребта, получили топографические уклонения отвеса, равные  $27.9''$ ; астрономо-геодезические уклонения отвеса имели значение  $5.2''$ . На побережье Индийского океана это отличие достигало еще больших значений ( $30-40''$  вместо  $5-8''$ ). Это говорит о том, что рельеф местности хотя и оказывает влияние на величину уклонений отвеса, но это влияние сглажено или компенсировано. Был предложен ряд гипотез о природе такой компенсации.



К гипотезе Пратта

Рис. 10.5



К гипотезе Венинг-Мейнеса

Рис. 10.6

Одна из таких гипотез была предложена в середине XIX в. англичанином Д. Праттом. Смысл этой гипотезы состоит в том, что масса вертикальных блоков с равными основаниями, расположенными выше поверхности полной компенсации или изостазии (греч. равновесия) одинакова для всей поверхности Земной коры. Избыточные объемы в горных районах (рис. 10.5) имеют меньшую плотность по сравнению с плотностью горных пород под морями и океанами. Однако эта гипотеза не нашла экспериментального подтверждения. Известно, что плотности горных пород не зависят от рельефа. Вместе с тем, было установлено, что изостатическая поверхность имеет место. Неизвестной оставалась природа изостатической компенсации. Выдвигались самые различные гипотезы. Например, в гипотезах Эри и Венинг-Мейнеса, появившихся почти одновременно с гипотезой Пратта, предполагается, что земная кора имеет двусторонние прогибы, симметричные относительно поверхности полной изостазии (рис. 10.6). Избыток масс горных пород над уровнем моря компенсируется их избытком ниже поверхности изостазии.

Уклонения отвеса, вычисленные с учетом указанных гипотез, называют топографо-изостатическими. Здесь необходимо определить глубину залегания поверхности изостазии относительно уровня морей и океанов. В среднем эта величина составляет примерно 100 км. При выводе параметров эллипсоида Красовского для восточной части территории Советского Союза вычислялись уклонения отвеса на основе гипотезы Пратта. Глубина изостатической компенсации принималась равной 96 км.

Отметим, что в современных условиях топографо-изостатические уклонения отвеса не применяются, однако изостатическая компенсация является важнейшей особенностью физического строения Земли.

### ***Вопросы для самоконтроля по разделу 10***

1. Дать определение уклонения отвеса.
2. Абсолютные и относительные уклонения отвеса.
3. Полное уклонение отвеса и его составляющие.
4. Какие данные необходимо иметь для астрономо-геодезического вывода уклонений отвеса?
5. Достоинства и недостатки астрономо-геодезического вывода уклонений отвеса.
6. Связь аномалий силы тяжести и уклонений отвеса.
7. Смысл вывода уклонений отвеса на основе гравиметрических данных.

8. Интерполирование астрономо-геодезических уклонений отвеса по материалам гравиметрической съемки.
9. Почему возникла задача определения изостатической компенсации топографических уклонений отвеса?
10. Значение азимутов Лапласа.
11. Какие поправки необходимо учитывать при переходе от астрономических азимутов к геодезическим?
12. Что такое уклонение отвеса в заданном направлении?

## 11. СИСТЕМЫ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫСОТ

### 11.1. Общие сведения

Высота точек земной поверхности относительно исходной отсчетной поверхности является одной из координат, характеризующей рельеф местности. Высота отсчитывается от исходной поверхности по нормали к ней. Если в качестве исходной поверхности принят земной эллипсоид, то высота, отсчитанная от нее, называется **геодезической** и обозначается  $H$ . Геодезические измерения выполняются в реальном гравитационном поле Земли, приборы устанавливаются в рабочее положение по отвесу и визирная ось нивелира перпендикулярна ему. Поэтому непосредственная передача геодезических высот из нивелирования невозможна. Уровенной поверхностью реального гравитационного поля и физической моделью Земли является геоид. Высота, отсчитанная от геоида, называется **ортометрической** и обозначается  $H^g$ . Высоту геоида над поверхностью эллипсоида называют **аномалией высоты** и обозначают  $\zeta$ . Таким образом, для геодезической высоты можно записать выражение

$$H = H^g + \zeta, \quad (11.1)$$

где  $H^g$  – гипсометрическая составляющая (рельеф над уровнем моря), получаемая из измерений,  $\zeta$  – геоидальная составляющая, характеризующая рельеф геоида над эллипсоидом и получаемая из обработки комплекса астрономо-геодезических и гравиметрических измерений.

**Геоид** – физическая модель Земли, поле силы тяжести которой совпадает с реальным, а его поверхность всюду гладкая и выпуклая, на морях и океанах совпадающая со средним невозмущенным уровнем поверхности воды. Под материками поверхность геоида продолжена так, что в каждой ее точке вектор реальной силы тяжести пересекает поверхность геоида по нормали к ней.

В земной коре плотность неоднородна, и силовая линия реального поля тяжести на промежутке от физической поверхности Земли до поверх-

ности геоида (в промежуточном слое) представляет собой кривую линию. Характер и величина неоднородностей плотности земной коры достоверно неизвестны. Можно лишь выдвигать какие-либо предположения или гипотезы об этом. Поэтому нельзя только из измерений, без привлечения гипотез однозначно определить положение поверхности геоида внутри Земли. Советский ученый М.С. Молоденский впервые в мире указал на это. Вместе с тем для практических целей необходимо знать высоты над уровенной поверхностью. Молоденский предложил вычислять **нормальные высоты  $H^N$** , отсчитанные от вспомогательной поверхности, которую он назвал **квазигеоидом**. Квазигеоид на морях и океанах совпадает с поверхностью геоида, а под материками незначительно (до 1-2 м) отступает от него. Отвесная линия в каждой точке земной поверхности пересекает поверхность квазигеоида под прямым углом. Положение отвеса в любой точке земной поверхности может быть определено, следовательно, и поверхность квазигеоида может быть определена без привлечения гипотез о распределении плотностей в промежуточном слое. Для этого достаточно отложить нормальную высоту, полученную из нивелирования.

При передаче высот нивелированием II класса и ниже такая схема работает без каких-либо проблем. Вместе с тем, при нивелировании I класса протяженность ходов может достигать сотен километров, а периметры полигонов – тысячу и более. В этом случае сумма измеренных превышений между двумя точками, полученными из разных нивелирных ходов, будет разной. Другими словами, **сумма измеренных превышений зависит от пути нивелирования**, а в замкнутом полигоне она не равна нулю и имеет место **теоретическая невязка нивелирного полигона**. Значение этой невязки зависит от периметра полигона и разности высот точек нивелирных ходов. Это видно из рисунка 4.1.

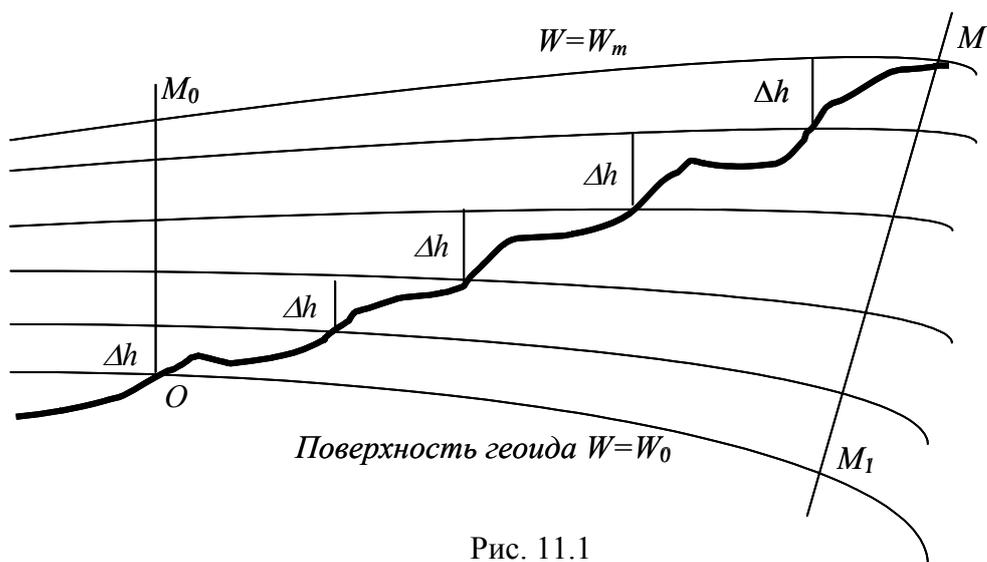


Рис. 11.1

На рисунке показан нивелирный ход от точки  $O$  до точки  $M$ , вдоль которого измерены превышения  $\Delta h$ , сумма которых дает измеренную разность отметок этих точек. Если начальная точка  $O$  расположена в начале счета высот (на поверхности геоида), получаем измеренную высоту точки  $M$

$$H_{изм} = \Sigma \Delta h. \quad (11.2)$$

Если предположить, что нивелирный ход прошел другим путем, например, по  $OM_0M$  или  $OM_1M$ , то из рисунка (11.1) видно, что суммы превышений будут другими, так как они определяются отрезками  $OM_0$  и  $M_1M$  соответственно, которые не равны между собой из-за непараллельности уровенных поверхностей  $W = \text{const}$ . На практике такое может иметь место: например, одни нивелирные ходы проложены вдоль дорог, другие вдоль рек и т. п.

Для устранения этого недостатка используют формулу, связывающую расстояние ( $dh$ ) между двумя бесконечно близкими уровенными поверхностями и разностью их потенциалов ( $dW$ )

$$dW = gdh. \quad (11.3)$$

Приращение потенциала силы тяжести в данной точке относительно потенциала начального футштока, взятое с обратным знаком, называется **геопотенциалом**. Поскольку разность потенциалов между любыми точками, лежащими на двух уровенных поверхностях, постоянна, можем записать

$$\int_{om} dW = W_0 - W_m = \Delta W = \int_{om} gdh = \text{const}. \quad (11.4)$$

Применяя теорему о среднем интегрального исчисления, запишем

$$\int_{om} gdh = \bar{g} \int_{om} dh = \bar{g}(H_m - H_0) = \bar{g}\Delta H. \quad (11.5)$$

Далее получаем для превышения, не зависящего от пути нивелирования

$$\Delta H = H_m - H_0 = \frac{W_0 - W_m}{g}. \quad (11.6)$$

Здесь числитель дроби, стоящей в правой части, определяется из геодезических и гравиметрических измерений. Проблема заключается в определении среднего интегрального значения ускорения реальной силы тяжести на отрезке  $MM_1$ . Дело в том, что для этого необходимо знать распределение плотностей горных пород в промежуточном слое, а такая информация отсутствует. В этом уравнении приращение высот вычисляется через геопотенциал, поэтому **высоты** называют **геопотенциальными** и они **не зависят от пути нивелирования**.

В зависимости от того, каким образом решается уравнение (11.6), различают системы геопотенциальных высот: **приближенные, ортометрические, нормальные и динамические.**

## 11.2. Приближенные высоты

Приближенные высоты вычисляют в нормальном гравитационном поле Земли. В этом случае пренебрегают аномалиями силы тяжести. Приближенные высоты служат одним из этапов вычисления других систем высот и вычисляются при отсутствии гравиметрической съемки.

В исходной для вычисления геопотенциальных высот формуле (11.6) следует принять вместо характеристик реального поля характеристики нормального поля

$$\Delta H_{\text{прибл}} = \frac{u_0 - u_M}{\gamma_m^M} = \frac{\int_0^M \gamma dh}{\gamma_m^M}, \quad (11.7)$$

где  $\gamma_m^M$  – среднее значение ускорения нормальной силы тяжести на отвесной линии  $MM_1$ ,  $\gamma$  – ускорение нормальной силы тяжести в точках нивелирного хода.

Получим более удобную формулу для вычисления приближенных высот, для чего правую часть уравнения (11.7) преобразуем.

$$\begin{aligned} \Delta H_{\text{прибл}} &= \frac{\int_0^M \gamma dh}{\gamma_m^M} = \frac{1}{\gamma_m^M} \int_0^M (\gamma_m^M + \gamma - \gamma_m^M) dh = \\ &= \Delta H_{\text{измер}} + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_0^M (\gamma - \gamma_m^M) dh. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Здесь видно, что измеренные высоты исправляют только за непараллельность уровенных поверхностей нормального гравитационного поля.

## 11.3. Ортометрические высоты

Ортометрические высоты отсчитываются от поверхности геоида до определяемой точки по отвесной линии. Формула (11.6) в этом случае работает следующим образом. При перемещении от  $O$  к  $M_1$  по поверхности геоида ортометрическая высота остается постоянной и равной нулю, а ортометрическая высота точки  $M$  определится отрезком  $MM_1$ . Тогда можем записать

$$W_0 - W_M = W_{M_1} - W_M = \int_0^M g dh = \int_{M_1}^M g dh .$$

Применив теорему Лагранжа о среднем значении функции, запишем

$$\int_{M_1}^M g dh = g_m^M \int_{M_1}^M dh = g_m^M \Delta H_M^g, \quad (11.9)$$

где  $g_m^M$  – среднее значение ускорения действительной силы тяжести на отрезке отвесной линии  $M_1M$ , а  $\Delta H_m^M$  – приращение ортометрической высоты. Тогда для приращения ортометрической высоты получаем выражение

$$\Delta H = \frac{W_0 - W_M}{g_m^M} = \frac{\int_0^M g dh}{g_m^M}. \quad (11.10)$$

Из-за отсутствия полной и достоверной информации о распределении плотностей внутри Земли, как уже отмечалось ранее, ортометрические высоты однозначно по результатам измерений и без привлечения гипотез не могут быть определены. По этой причине ортометрические высоты не нашли до настоящего времени практического применения. Следует заметить при этом, что с развитием новых измерительных технологий и прежде всего, основанных на спутниковых системах позиционирования, а также современных результатах гравиметрических измерений появляются новые возможности вычисления ортометрических высот. Несомненным достоинством этих высот является то, что они отсчитываются от уровенной поверхности реального гравитационного поля Земли – геоида.

#### 11.4. Нормальные высоты

В связи с невозможностью вычисления ортометрических высот советским ученым М.С. Молоденским предложены в 1951 нормальные высоты. Отсчетной поверхностью для этих высот предложена вспомогательная поверхность, на морях и океанах совпадающая с геоидом, а на материках незначительно отличающаяся от геоида (по высоте до 2 м), которую назвали **квазигеоидом**. Поверхность квазигеоида может быть получена из измерений, так как при этом не учитывают кривизну силовых линий гравитационного поля внутри Земли. Таким образом, геометрия поверхности квазигеоида определяется направлением отвесных линий на физической поверхности Земли, которые являются нормальными к нему. Геометрию гео-

ида определяют направления вектора силы тяжести на его поверхности, которые неизвестны.

На рисунке 4.2 имеем:

$O_0M_0$  – эллипсоид (Нормальная Земля);

$OM_1$  – геоид (физическая модель Земли);

$OM_3$  – квазигеоид;

$O_2M$  – уровенная поверхность потенциала реальной силы тяжести в точке  $M$ ;

$O_1M_2$  – уровенная поверхность потенциала нормальной силы тяжести, равной реальной силе тяжести в точке  $M$ ;

$MM_0$  – геодезическая высота точки  $M$ ;

$MM_1$  – ортометрическая высота точки  $M$ ;

$MM_3$  – нормальная высота точки  $M$ ;

$M_0M_1$  – аномалия высоты геоида в точке  $M$ ;

$M_0M_3$  – аномалия высоты квазигеоида в точке  $M$ .

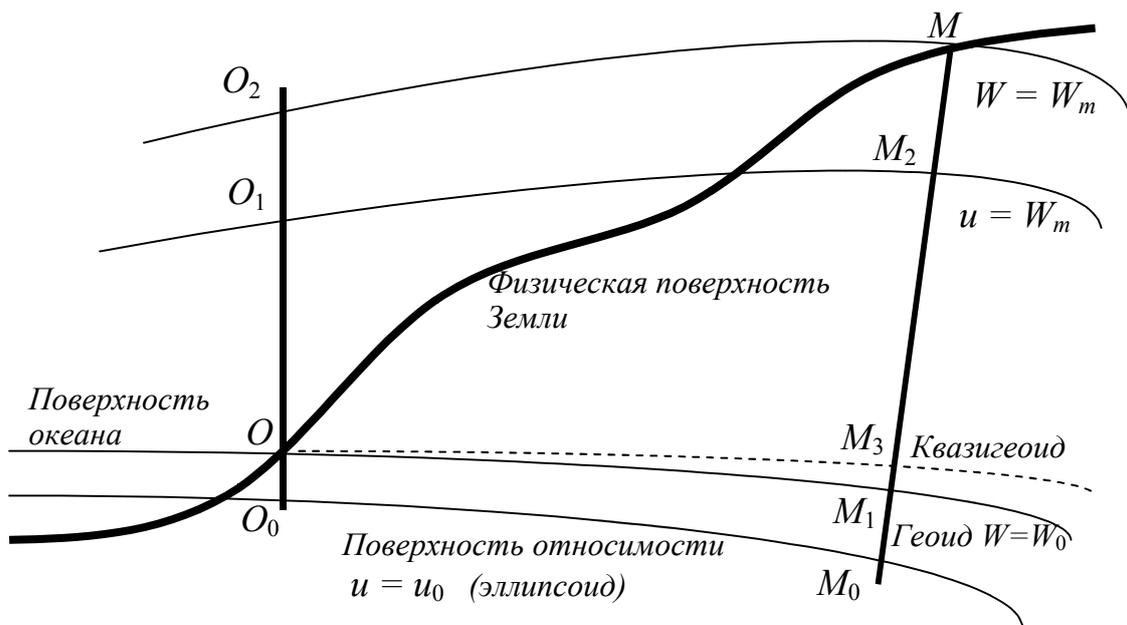


Рис. 11.2

Из условий, следуемых из построения рисунка 11.2, можем записать

$$W_0 - W_M = u_0 - u_M, \quad (11.11)$$

следовательно, имеем равенство отрезков  $MM_3 = M_0M_2 = H^r_M$

Используя формулу связи геопотенциала и высоты (11.3) и следующие из нее формулы, можем записать

$$W_0 - W_M = \int_{OM} gdh; \quad u_0 - u_{M_2} = \int_{M_0M_2} \gamma dH^\gamma. \quad (11.12)$$

Отсюда имеем

$$\int_{0M} gdh = \int_{M_0M_2} \gamma dH^\gamma = \gamma_m H_M^\gamma. \quad (11.13)$$

Формула для нормальной высоты принимает вид

$$H_M^\gamma = \frac{\int gdh}{\gamma_m^M}. \quad (11.14)$$

Полученную формулу преобразуем для удобства ее практического применения.

$$\begin{aligned} H_M^\gamma &= \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{0M} gdh = \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{0M} (g - \gamma + \gamma - \gamma_m^M + \gamma_m^M) dh; \\ H_M^\gamma &= \int_{0M} dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{0M} (g - \gamma) dh + \int_{0M} (\gamma_m^M - \gamma_m^M) dh. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Здесь первый член выражает измеренную высоту, второй – поправку за аномалию силы тяжести, третий – поправку за непараллельность уровней поверхностей.

Если ход нивелирования замкнутый, должно соблюдаться равенство

$$\int_{0M} dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{0M} (g - \gamma) dh + \int_{0M} (\gamma_m^M - \gamma_m^M) dh = 0,$$

и сумма измеренных превышений по замкнутому нивелирному ходу (**теоретическая невязка нивелирного полигона**) имеет выражение

$$f = \int_{0M} dh = -\frac{1}{\gamma_m^M} \int_{0M} (g - \gamma) dh - \int_{0M} (\gamma_m^M - \gamma_m^M) dh. \quad (11.16)$$

Для удобства вычисления нормальных высот в ЦНИИГАиК разработана специальная Инструкция и соответствующие вспомогательные таблицы.

Отметим, что в наихудшем случае для территории бывшего СССР ( $H = 4$  км,  $\Delta g = 500$  мЛг) максимальные значения отступлений поверхности геоида от квазигеоида могут достигать величины 2 м, а значение  $f$  может достигать нескольких миллиметров. При построении государственных опорных построений геопотенциальные высоты вычисляются только при нивелировании 1 класса. В более низких классах нивелирования используют измеренные высоты.

Вместе с тем, следует отметить, что территория Беларуси расположена в равнинном безаномальном районе, с высотами, не превышающими 400 м, поэтому отступления поверхности геоида от квазигеоида

незначительны, а значение  $f$  здесь пренебрегаемо мало для любого класса нивелирования.

### 11.5. Динамические высоты

Как видно из предыдущего материала, уровенные поверхности (поверхности равной силы тяжести), проходящие через точки на разных высотах, не параллельны друг другу, расстояния между ними различны. Это приводит к тому, что нормальные высоты этих поверхностей различаются. Эти различия невелики, вместе с тем, при инженерно-геодезическом обеспечении строительства это обстоятельство необходимо учитывать.

При строительстве больших водохранилищ, тоннелей большой протяженности, прецизионных сооружений задают поверхности равных высот методом высокоточного нивелирования. Например, разности высот уровня воды в крупных озерах и водохранилищах весьма существенны (озеро Байкал – 165 мм, озеро Севан – 88 мм). При этом замечено, что эти разности тем существеннее, чем больше высота над уровнем моря и разность широт водного контура.

В связи с этим при геодезическом обеспечении строительства сооружений, расположенных на больших по размеру территориях или предъявляющих особо высокие требования к точности вынесения в натуру, используют динамические высоты.

Опуская выводы, приведем формулу для вычисления динамических высот

$$H_M^{дин} = \int_{0M} dh - \frac{\beta}{2} \int_{0M} \cos 2\varphi dh + 0.3086 \frac{H_M}{2} . \quad (11.17)$$

Первый член выражает измеренную высоту, второй – поправку за широту, третий – поправку за высоту.

### 11.6. Нивелирование квазигеоида

Под нивелированием квазигеоида понимают комплекс астрономических, гравиметрических и геодезических измерений для вычисления высоты квазигеоида над поверхностью эллипсоида. Геодезическая высота определяется над поверхностью эллипсоида, принятой в качестве координатной. Поскольку государственные геодезические построения задают референцную систему координат, нивелирование производится относительно принятого референц-эллипсоида.

Высота (геоида) квазигеоида связана с отклонениями отвеса. Это видно из рисунка 11.3. Пусть в некоторой точке  $A$  поверхности эллипсоида и

геоида (квазигеоида) касаются друг друга. Вследствие непараллельности (наличия уклонения отвеса), по мере удаления от точки  $A$  на некоторое расстояние  $dS$ , эти поверхности будут отступать друг от друга на величину аномалии высоты  $d\zeta$ .

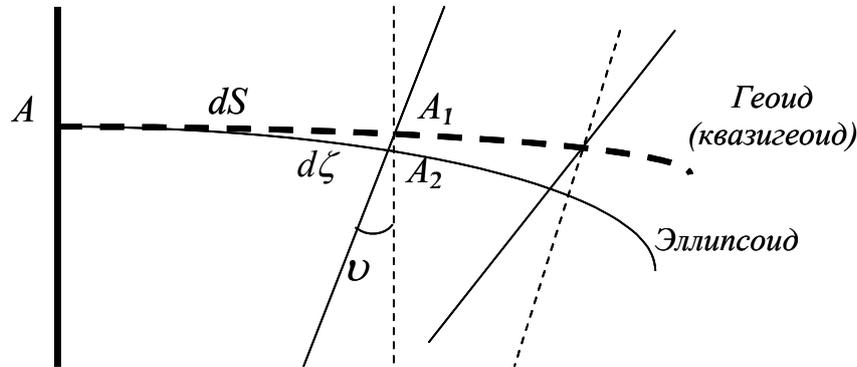


Рис. 11.3

При дифференциально малых расстояниях  $dS$  и хорошо подобранном эллипсоиде, когда  $\nu$  – малая величина, можно записать очевидное равенство, следуемое из рисунка:

$$d\zeta = -\operatorname{tg}\nu dS = -\nu dS. \quad (11.18)$$

Высота геоида (квазигеоида) над поверхностью эллипсоида в точке  $B$ , находящейся на конечном расстоянии от точки  $A$ , изменится на величину

$$\zeta_B - \zeta_A = - \int_{AB} \nu dS. \quad (11.19)$$

Данное уравнение лежит в основе вычисления аномалий высот. В зависимости от того, какие уклонения отвеса используются в формуле (11.19), различают астрономическое или астрономо-гравиметрическое нивелирование геоида (квазигеоида). В общем случае интегрирование правой части уравнения (11.19) затруднено, так как не имеется функциональной зависимости между  $\nu$  и  $S$ . На практике участок нивелирования разбивают на части, где можно допустить постоянное значение составляющей уклонения отвеса  $\nu$ . Искомая аномалия высоты получается из формулы

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{1}{\rho''} \int_{AB} \nu'' dS = (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \dots) = \\ &= -\frac{\nu_1'' + \nu_2''}{2\rho''} S_1 - \frac{\nu_2'' + \nu_3''}{2\rho''} S_1 - \frac{\nu_3'' + \nu_4''}{2\rho''} S_1 - \dots \end{aligned} \quad (11.20)$$

По результатам нивелирования составляется карта аномалий высот. Точность аномалий высот, полученных из астрономического и астрономо-

гравиметрического нивелирования, невелика и составляет 0.5 – 2 м. Этого вполне достаточно для решения редуционной проблемы.

В настоящее время широко внедряются в геодезическое производство методы, основанные на спутниковых системах позиционирования. На их основе появляются принципиально новые возможности решения задачи нивелирования геоида (квазигеоида). Идея состоит в следующем. Из результатов спутниковых измерений получают пространственные прямоугольные  $(X, Y, Z)$  и геодезические  $(B, L, H)$  координаты. Точность вычисления геодезической высоты  $H$  при этом может достигать величины 0.015 м. Нормальные высоты  $H'$  получают из высокоточного геометрического нивелирования. Разность этих высот дает искомые аномалии высот. Как видим, точность современного метода выше классических практически в сто раз. Это раскрывает перспективы расширения возможностей решения прикладных задач на основе геодезических баз данных.

По результатам нивелирования квазигеоида над общим земным эллипсоидом с параметрами Красовского получены следующие значения аномалий высот: максимальные значения, экстраполированные на экватор, достигают величины – 140 м на долготе  $70^{\circ}$  и + 125 м на долготе  $345^{\circ}$ . При этом имеют место как глобальные волны геоида над эллипсоидом, обусловленные влиянием материков и океанических впадин, так и локальные, обусловленные неравномерным распределением плотностей горных пород.

### ***Вопросы для самоконтроля по разделу 11***

1. Сущность проблемы неоднозначной передачи высот.
2. Геопотенциал силы тяжести и его связь с высотой.
3. Что такое изопотенциальные поверхности?
4. Какие высоты называют геопотенциальными?
5. Что такое квазигеоид и его отличие от геоида?
6. Какие поправки вводят в измеренные высоты для вычисления нормальных высот?
7. Понятие теоретической невязки нивелирного полигона.
8. Сущность нивелирования квазигеоида.

## **10. РЕДУКЦИОННАЯ ПРОБЛЕМА**

### **12.1. Сущность редуционной проблемы и пути ее решения**

Геодезические измерения выполняются между точками на земной поверхности, которые могут быть расположены на определенных геодезических высотах. Эти высоты могут быть получены методами, рассмотрен-

ными ранее. Вычисление координат производится на поверхности эллипсоида. Геодезические приборы ориентируются по отвесной линии, а редуцирование измеренных величин на поверхность эллипсоида производится по нормальям к нему. В связи с этим в измеренные значения необходимо ввести поправки, обусловленные как *высотой* соответствующих точек *над эллипсоидом*, так и *уклонением отвеса*.

Геодезические высоты и уклонения отвеса могут быть вычислены астрономо-гравиметрическим методом, для чего необходимо наличие астрономо-геодезической сети, нивелирования 1 класса, гравиметрической съемки на всей территории. Вместе с тем, для этого необходимо производить редуцирование измерений. Получается замкнутый круг. Для решения задачи редуцирования измерений на стадии построения государственной геодезической сети применяли единственно возможный *метод развертывания*, при котором пренебрегали отступлениями поверхности геоида и эллипсоида. Другими словами, здесь вводились поправки в измеренные величины только за нормальные высоты, а за уклонения отвеса и аномалии высот считались пренебрегаемо малыми. Измерения, редуцированные на поверхность геоида (квазигеоида), как бы развертывались без деформаций на поверхность эллипсоида. Для территорий ограниченной площади, при отсутствии аномалий силы тяжести такой метод решает задачу редуцирования на референц-эллипсоид.

Для территорий большой площади, как это имело место в Советском Союзе, метод развертывания приводил к весьма существенным погрешностям. Поэтому здесь астрономо-геодезическая сеть после завершения ее построения редуцировалась на поверхность референц-эллипсоида Красовского *по методу проектирования* с учетом всех поправок.

Принципиальным является вопрос необходимой точности вычисления редуцированных поправок. Здесь необходимо помнить, что геодезические измерения выполняются по строгим методикам, направленным на то, чтобы ошибки измерений носили случайный характер и подчинялись нормальному закону распределения. Только в этом случае математическая обработка измерений по методу наименьших квадратов приводит к вероятнейшим значениям. Ошибки округления при вычислениях, как известно, случайные, но подчиняются равномерному закону распределения. Для того, чтобы ошибки округления не налагались на ошибки измерений, в геодезии всегда вычисления производят с ошибками, на порядок меньшими ошибок соответствующих измерений. В этом случае редуцированные значения измеренных величин можно считать измеренными с точки зрения характера распределения их ошибок.

Рассмотрим выводы основных формул редуцирования по методу проектирования. При этом следует заметить, что задача редуцирования азимутов рассмотрена нами ранее, при выводе уравнения Лапласа.

## 12.2. Редукция базисных измерений

На рисунке 12.1 показана схема масштабирования первоклассного звена триангуляции. Из линейных измерений подвесным базисным прибором определяется базис  $b$  с относительной погрешностью  $1 : 1\,000\,000$ . Длина выходной стороны  $S_0$ , соединяющая пункты Лапласа, вычисляется из базисного геодезического четырехугольника, в котором измерены и уравнены за все возникающие условия углы. Для обеспечения высокой точности измерений базис располагается в наиболее благоприятных для измерений условиях, длина его, как правило, порядка 10 км. Длина выходной стороны триангуляции 1 класса составляет порядка 20 км. Из-за этого при вычислениях длины  $S_0$  существенной является ошибка геометрической связи, и длина выходной стороны вычисляется с относительной погрешностью порядка  $1 : 400\,000$ . Эта величина и определяет точность масштабирования звеньев триангуляции 1 класса.

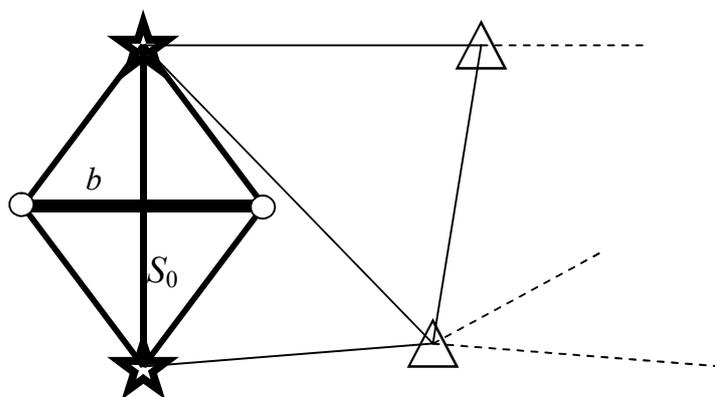


Рис. 12.1

Таким образом, точность вычисления редуциционной поправки не должна превышать относительной величины  $1 : 4\,000\,000$ . Данный метод линейных измерений ушел в историю, вместе с тем мы рассмотрим редуцирование базиса, что интересно с методической точки зрения.

Мерным элементом базисного прибора 1 класса служит комплект из четырех компарированных инварных струн, на концах которых специальные инварные шкалы с полумиллиметровыми делениями для снятия отсчетов. Общая длина прибора составляет 24 м и называется базисным проле-

том. В процессе измерений определяются превышения концов каждого пролета методом геометрического нивелирования. Схематически пролет изображен на рисунке 5.2.

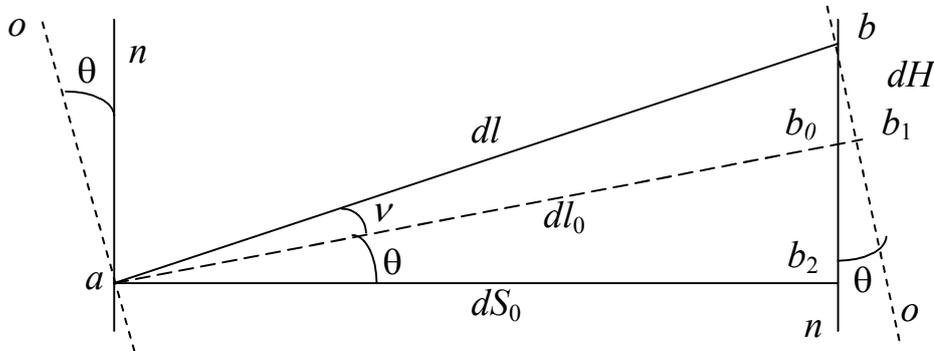


Рис. 12.2

На рисунке имеем:  $dl$  – измеренная длина пролета;  $dl_0$  – горизонтальное проложение;  $dS_0$  – эллипсоидальное проложение;  $\theta$  – составляющая уклонения отвеса в направлении базиса;  $v$  – угол наклона пролета к горизонту;  $o$  – направление отвеса;  $n$  – направление нормали;  $dH$  – превышение концов пролета. Длина пролета малая, поэтому можно считать направления отвеса на его концах параллельными. Параллельны также направления нормали. Для прямоугольного при вершине  $b_2$  треугольника  $abb_2$  запишем

$$dS_0 = dl \cos(v + \theta) = dl \cos v \cos \theta - dl \sin v \sin \theta,$$

где также имеем

$$dl_0 = dl \cos v; \quad dH = dl \sin v,$$

поэтому, учитывая малые значения  $\theta$ , разлагая тригонометрические функции этого аргумента в ряд с удержанием только первого члена, можем записать с достаточной точностью

$$dS_0 = dl_0 - \theta dH. \quad (12.1)$$

Таким образом, вычисляют эллипсоидальную длину каждого пролета  $dS_{0i}$  из уложившихся вдоль базиса. При этом получают длины, отнесенные на поверхности, параллельные поверхности референц-эллипсоида и расположенные на средней высоте  $H_i$  каждого пролета. Схематично это показано на рисунке 12.3.

Для получения проекции на поверхность эллипсоида  $dS_i$  каждого из отрезков  $dS_{0i}$  следует из рисунка формула

$$\frac{dS_i}{dS_{0i}} = \frac{R_A}{R_A + H_i}, \quad (12.2)$$

где  $R_A$  – радиус нормального сечения, проходящего в азимуте базиса.

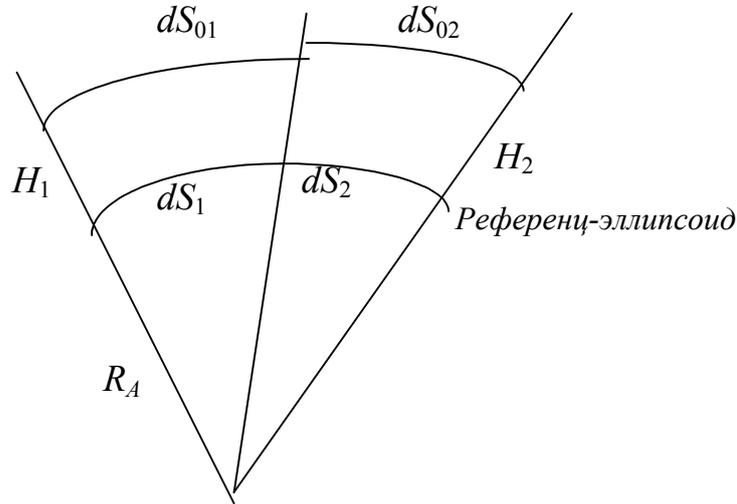


Рис. 12.3

Далее получаем для эллипсоидального проложения базисного пролета

$$dS = dS_0 \left( 1 + \frac{H}{R_A} \right)^{-1} = dS_0 \left( 1 - \frac{H}{R_A} + \left( \frac{H}{R_A} \right)^2 - \dots \right).$$

С учетом выражения (12.1) имеем

$$dS = dl_0 - \frac{H}{R_A} dl_0 + \left( \frac{H}{R_A} \right)^2 dl_0 - \theta dH. \quad (12.3)$$

Как отмечено ранее, длина базиса порядка 10 км. В этом случае можно считать поверхность эллипсоида совпадающей с поверхностью шара радиусом  $R_A$  и далее получаем для всей длины базиса, средняя высота которого равна  $H_m$ :

$$S = \int dS = l_0 - \frac{H_m}{R_A} l_0 + \left( \frac{H_m}{R_A} \right)^2 l_0 - \int_S \theta dH. \quad (12.4)$$

Выразим относительную величину поправки

$$\frac{S - l_0}{l_0} = -\frac{H_m}{R_A} + \left( \frac{H_m}{R_A} \right)^2 - \frac{\int_S \theta dH}{l_0}$$

и оценим значения поправочных членов в этой поправке. Для расчетов примем следующие значения элементов полученной формулы:  $H_m \leq 1000$  м,

$l \approx 10\,000$  м, превышения вдоль базиса  $\Delta H \leq 100$  м, отклонения отвеса  $\Theta \leq 5''$ . В этом случае первый поправочный член не превзойдет величины  $1 : 6\,400$ ; второй –  $1 : 40\,000\,000$ , третий –  $1 : 4\,000\,000$ . При этих условиях необходимую точность редуцирования ( $1 : 4\,000\,000$ ) обеспечит простая формула

$$S = l_0 - \frac{H_m}{R_A} l_0. \quad (12.5)$$

Значения средней высоты  $H_m$  и радиуса  $R_A$  достаточно вычислять с точностью, рассчитанной по известному принципу равных влияний

$$dS = \frac{dH_m R_A - H_m dR_A}{R_A^2} l_0 = l_0 \frac{dH}{R} - l_0 \frac{H}{R^2} dR;$$

$$m_S^2 = \left(\frac{l_0}{R}\right)^2 m_H^2 + \left(l_0 \frac{H}{R^2}\right)^2 m_R^2;$$

$$\left(\frac{1}{R}\right) m_H \approx \left(\frac{H}{R^2}\right) m_R \leq \frac{m_S}{S\sqrt{2}} \leq \frac{1}{6 \times 10^6};$$

$$m_H \leq \frac{R}{6 \times 10^6} \approx 1 \text{ м}; \quad m_R \leq \frac{R^2}{H \times 6 \times 10^6} \approx 6.4 \text{ км}.$$

Отсюда видно, что для решения редуциционной проблемы высоты необходимо знать с точностью до метров, а средний радиус кривизны эллипсоида – до нескольких километров. Эти требования к точности высот и радиуса невелики, что существенно облегчает решение данной задачи, в особенности на первоначальном этапе построения государственных опорных геодезических сетей.

### 12.3. Редукция свето- и радиодальномерных измерений

В настоящее время линейные измерения производятся, в основном, свето- и радиодальномерами, которые постоянно совершенствуются. Приборные погрешности измерений могут быть сведены до миллиметров, и главным сдерживающим фактором является влияние внешних условий. В спутниковых системах позиционирования реализованы радиодальномерные измерения, выполняемые вдоль направлений на геодезические спутники – носители координат из созвездий *NAVSTAR (США)* или *ГЛОНАСС (РФ)* – приемники, расположенные на пунктах, координаты которых определяются из пространственной линейной засечки. Точность координатных определений, как абсолютных, так и произведенных посредством спутни-

ковых систем, на порядок выше по сравнению с классическими наземными методами (астрономо-геодезическими). Это стало возможно за счет того, что измерения вынесены за пределы топографической рефракции в область астрономической, что позволило уменьшить влияние внешних условий на точность измерений.

Рассмотрим редуцирование наземных измерений, производимых в полигонометрии, трилатерации и масштабировании триангуляции при построении государственных опорных сетей. Здесь измеренные расстояния между смежными пунктами могут достигать от 20 до 30 километров. Относительная погрешность измерений характеризуется величиной  $1 : 400\,000$ , следовательно, редуциционные поправки необходимо вычислять с точностью на порядок выше, следовательно  $1 : 4\,000\,000$ . Это требование необходимо выполнять для того, чтобы ошибки округления при вычислениях (подчиняющиеся равномерному закону распределения) не наложились на ошибки измерений (подчиняющиеся нормальному закону распределения) и математическую обработку редуцированных величин можно было производить по методу наименьших квадратов.

На рисунке 12.4 имеем:  $H_1, H_2$  – высоты точек  $A$  и  $B$  над эллипсоидом (нормальная высота плюс аномалия высоты);  $S$  – эллипсоидальное проложение измеренного расстояния  $d$ ;  $c$  – хорда;  $\beta$  – центральный угол, стягивающий дугу  $S$ , для которой можно записать выражение

$$S = R_A \beta. \quad (12.6)$$

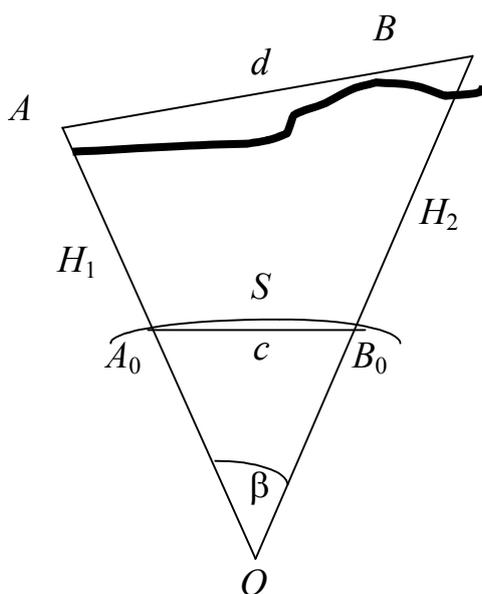


Рис. 12.4

Из треугольника  $ABO$  имеем по теореме косинусов

$$d^2 = (R_A + H_1)^2 + (R_A + H_2)^2 - 2(R_A + H_1)(R_A + H_2) \cos\beta. \quad (12.7)$$

Здесь, как и при редуцировании базисных измерений, принята поверхность эллипсоида за поверхность шара радиусом нормального сечения эллипсоида, проходящего в азимуте  $A$ , вычисляемого по формуле Эйлера, рассмотренной в разделе сфероидической геодезии. Это существенно упрощает задачу и обеспечивает необходимую точность при расстояниях до 30 км. Учитывая это, из равнобедренного треугольника  $A_0B_0O$  имеем по теореме косинусов

$$c^2 = R_A^2 - 2R_A^2 \cos\beta. \quad (12.8)$$

Подставляя выражение для  $\cos\beta$  из (5.7) в (5.8), получаем после несложных преобразований выражение для длины хорды

$$c = \frac{\sqrt{d^2 - (H_1 - H_2)^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{H_1 + H_2}{R_A}\right)}}. \quad (12.9)$$

По теореме синусов имеем из треугольника  $A_0B_0O$

$$\frac{\sin\beta}{c} = \frac{\sin\left(90 - \frac{\beta}{2}\right)}{R_A} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{R_A}; \quad \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{c} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{R_A}.$$

Разделив обе части полученного уравнения на  $\cos\frac{\beta}{2} \neq 0$ , получаем для искомой величины  $S$

$$S = 2R_A \arcsin \frac{c}{2R_A}. \quad (12.10)$$

Здесь возникает вполне уместный вопрос, почему нельзя воспользоваться более простым решением задачи, выразив из уравнения (12.7)  $\cos\beta$ , затем вычислив угол  $\beta$  по косинусу и подставив его значение в формулу (12.6). Здесь проблема заключается в том, что значение угла  $\beta$  мало при малых, по сравнению с радиусом  $R_A$ , расстояниях  $d$ , и большим изменениям искомого аргумента  $\beta$  соответствуют малые изменения косинуса. Вместе с тем, при малых значениях аргумента  $\beta$  изменение функции  $\sin\beta$  практически линейно зависит от изменений аргумента. В этом преимущество вычислений по формуле (12.10).

#### 12.4. Редуцирование горизонтальных направлений

Горизонтальные направления в геодезических построениях (триангуляции и полигонометрии) измеряют теодолитами, главная ось которых

ориентируется по отвесной линии. В этом случае коллимационная плоскость пересекает поверхность эллипсоида по прямому отвесному плоскому сечению, и для перехода к прямому нормальному сечению необходимо ввести поправку за **уклонение отвесной линии**. Эта поправка аналогична поправке за уклонение отвесной линии при вычислении азимутов Лапласа и имеет выражение

$$\delta_1'' = \frac{\eta'' \cos A - \xi'' \sin A}{\operatorname{tg} z}, \quad (12.11)$$

где  $\eta$  и  $\xi$  – составляющие уклонения отвеса в первом вертикале и меридиане соответственно для точки стояния теодолита;  $A$  и  $z$  – азимут и зенитное расстояние вдоль измеренного направления.

В государственных геодезических построениях значения зенитных расстояний близки к  $90^\circ$ , в этом случае даже при существенных значениях уклонений отвеса поправка мала. В условиях Республики Беларусь, когда местность равнинная и значения уклонений отвеса малы, эта поправка пренебрегаемо мала и ею можно пренебречь для любых классов геодезических построений. В Инструкции для построения государственных геодезических сетей СССР предусматривается учет этой поправки для тех направлений, когда зенитное расстояние отличается от  $90^\circ$  на величину более  $2^\circ$  (когда учитывают поправку за негоризонтальность алидады теодолита).

Центры геодезических пунктов государственных геодезических построений расположены на некоторой высоте над поверхностью эллипсоида. В этом случае имеем схему измерений, приведенную на рисунке 12.5.

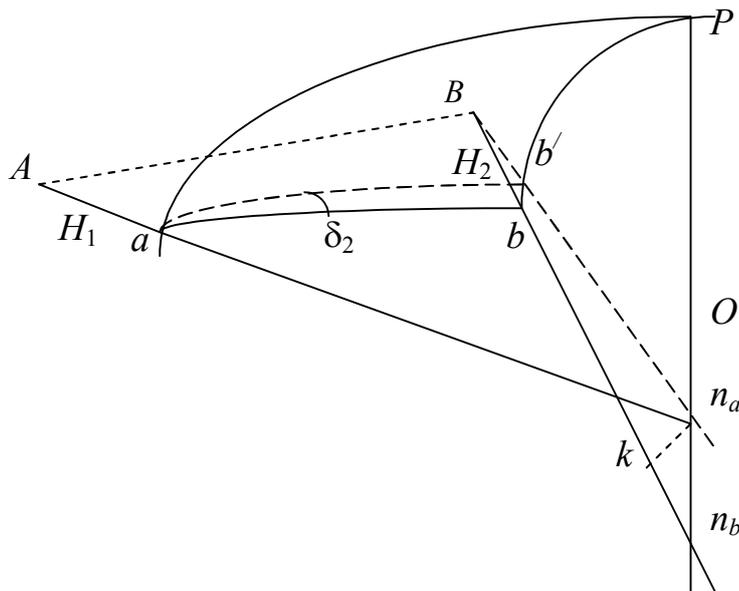


Рис. 12.5

Пусть геометрический центр теодолита находится в точке  $A$  на некоторой высоте над поверхностью эллипсоида  $H_1$  (отрезок  $Aa$ ), визирная цель  $B$  – на некоторой высоте  $H_2$  (отрезок  $Bb$ ).  $O$  – центр эллипсоида. Нормали к поверхности эллипсоида в точках  $A$  и  $B$  пересекут его поверхность в точках  $a$  и  $b$  соответственно и не лежат в одной плоскости, поэтому они пересекут ось вращения эллипсоида в точках  $n_a$  и  $n_b$  соответственно. Прямым нормальным сечением в точке  $A$  будет кривая  $ab$  эллипсоида. Коллимационная плоскость при этом пересечет поверхность эллипсоида по кривой  $ab'$ . Искомая поправка  $\delta_2$ . Из рисунка можно заметить, что эта поправка зависит только от высоты визирной цели над поверхностью эллипсоида и не зависит от высоты точки  $A$ . Поэтому она носит название **поправки за высоту наблюдаемого предмета**.

Высота и расстояния между точками  $A$  и  $B$  малы по сравнению с радиусом Земли, поэтому можем с достаточной точностью положить линии  $bb'$  и  $n_a k$  параллельными друг другу, а треугольник  $Abb'$  плоским. Тогда можем записать

$$n_a k = n_a n_b \cos B_m; \quad \frac{n_a l}{bb'} = \frac{M_m}{H_2}.$$

Отсюда получаем для  $bb'$  выражение

$$bb' = n_a n_b \frac{H_2}{M_m} \cos B_m. \quad (12.12)$$

Из треугольника  $abb'$  получаем по теореме синусов сферической тригонометрии

$$\sin \delta_2 = \frac{bb'}{S} \sin(360 - A_{21}) \approx \frac{bb'}{S} \sin A_{12}.$$

Разлагая  $\sin \delta$  в ряд, ограничиваясь первым членом разложения, получим

$$\delta_2'' = \rho'' \frac{bb'}{S} \sin A_{12}. \quad (12.13)$$

Отрезок  $n_a n_b$ , как видно из рисунка 12.5, получает выражение

$$\begin{aligned} n_a n_b &= (N_2 \sin B_2 - y_2) - (N_1 \sin B_1 - y_1) = \\ &= N_2 e^2 \sin B_2 - N_1 e^2 \sin B_1 \approx e^2 N_m (B_2 - B_1) \sin B_m. \end{aligned}$$

Здесь использовали известное выражение для ординаты точки на меридианном эллипсе  $y = N(1 - e^2) \sin B$ , учитывая малые величины.

Из уравнения для малой дуги меридиана получаем приближенное выражение для разности широт

$$B_2 - B_1 \approx \frac{S}{M_m} \cos A_{12}.$$

С учетом приведенных преобразований уравнение (12.13) получает выражение для искомой поправки

$$\delta_2'' = \rho'' \frac{H_2}{2M_m} e^2 \sin 2A_{12} \cos^2 B_m. \quad (12.14)$$

Для практики полезно заметить, что данную поправку необходимо учитывать в горных районах. В условиях Республики Беларусь, где высоты не превосходят величины в 400 м, величина этой поправки не превзойдет  $0.04''$  и ею можно пренебречь.

После учета поправок  $\delta_1$  и  $\delta_2$  в измеренных горизонтальных направлениях получаем на поверхности эллипсоида направления между прямыми нормальными сечениями. В треугольнике триангуляции в каждой вершине получают углы между взаимными нормальными сечениями. При этом получается фигура, не замкнутая измерениями, как это показано на рис. 12.6. Здесь стрелками показаны направления прямых сечений.

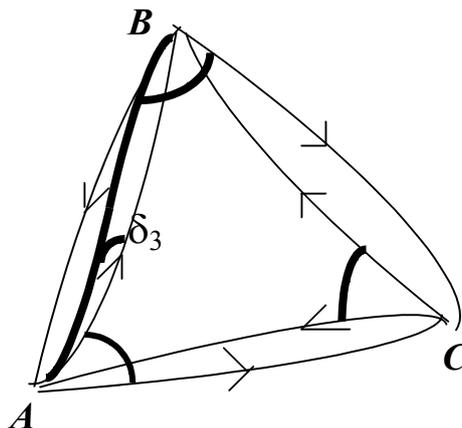


Рис. 12.6

Для того чтобы получить фигуру в виде геодезического треугольника, сторонами которого являются геодезические линии, в горизонтальных направлениях при редуцировании на поверхность эллипсоида необходимо еще учитывать поправку  $\delta_3$  за переход от направления прямого нормального сечения к направлению геодезической линии.

Геодезическая линия проходит ближе к прямому в данной точке нормальному сечению, а угол между взаимными сечениями делится геодезической линией в отношении 1 : 2. Схема взаимного положения геодезической линии (утолщенная кривая) и нормальных сечений показана на рис. 12.6 для точек A и B.

Формула для этой поправки получена известным немецким астрономо-геодезистом Ф.Р. Гельмертом и имеет вид

$$\delta_3'' = \rho'' \frac{e^2 S^2}{12 N_1^2} \sin 2A_m \cos^2 B_m. \quad (12.15)$$

Несложно убедиться в том, что эта поправка незначительна и даже при расстояниях  $S = 50$  км не превышает величины, равной  $0.006''$ . Она учитывается только при работе в высокогорных районах, когда расстояния между пунктами превышают 50 км.

### ***Вопросы для самоконтроля по разделу 12***

1. Почему возникает редуционная проблема в геодезии?
2. Пути решения редуционной проблемы.
3. Схема редуцирования базисного пролета.
4. Какими величинами можно пренебречь при редуцировании дальномерных измерений и почему?
5. Какие поправки необходимо учитывать при редуцировании горизонтальных направлений?

## **13. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМ**

### **13.1. Общие сведения о методах градусных измерений**

Как уже отмечалось ранее, в геодезии в качестве координатной принята поверхность эллипсоида вращения, параметры которого получены так, чтобы поверхность реальной Земли имела минимальные отступления от поверхности координатной. В этом случае редуционная проблема геодезии решается сравнительно просто рассмотренными ранее способами и редуционные поправки чаще всего пренебрегаемо малы.

Определение формы и размеров Земли, а также положения различных объектов на ней тесно связано с развитием и совершенствованием средств и методов измерений и составляют основную задачу геодезии. Эти основы были заложены в глубокой древности при решении задач познания окружающего мира, обеспечения навигации, а также при строительстве зданий, ирригационных, транспортных и иных сооружений. Так древнегреческий ученый Пифагор (около 571 – 497 гг. до н. э.) впервые предложил метод построения прямого угла на местности с помощью треугольника со сторонами в 3, 4 и 5 равных частей длины (теорема Пифагора) и высказал предположение о шарообразности Земли. Эратосфен в Древнем Египте впервые (276 – 196 гг. до н. э.) определил радиус земного шара путем измерения длины дуги меридиана и разности широт (градус-

ные измерения) между городами Александрия и Сиена. В Месопотамии (786 – 833 гг.) при халифе Аль-Мамуне арабскими учеными было получено значение радиуса земного шара, равное 6 406 км, точность которого была превзойдена только в XVII с применением метода триангуляции, предложенного в 1615 г. голландским ученым Снеллиусом (1591 – 1626 гг.).

В предположении, что Земля – шар определенного радиуса, задача сводилась к определению из астрономических и геодезических измерений расстояния, соответствующего одному градусу дуги меридиана или параллели. Отсюда термин – **градусные измерения методом дуг вдоль меридиана и параллели**.

$$R = \frac{S_{\text{мер}}}{\Delta\varphi} = \frac{S_{\text{пар}}}{\Delta\lambda}.$$

Здесь  $S_{\text{мер}}$  и  $S_{\text{пар}}$  – измеренные на местности расстояния вдоль меридиана или параллели соответственно,  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\lambda$  – измеренные разности широт или долгот,  $R$  – искомый радиус Земли. Для однозначного определения радиуса необходимо выполнить градусные измерения вдоль одной дуги. При большем числе градусных измерений значение радиуса получали как среднее.

С развитием науки и техники совершенствовались приборы, технология измерений и их математическая обработка, накапливался объем информации, повышалась точность измерений. Так уже, начиная с XVII столетия, методом триангуляции стали определяться длины больших дуг меридианов и параллелей. Революционным шагом в развитии градусных измерений явилось введение международной единицы линейных измерений – метра, как 1 : 40 000 000 части длины дуги Парижского меридиана. В результате определения и сравнения радиуса Земли, полученного учеными различных стран, обнаружили, что расхождения значений существенно больше, чем это может быть обусловлено ошибками измерений. Отсюда появилась гипотеза, что Земля не шар, а некоторое тело, поверхность которого ближе к поверхности эллипсоида вращения. На это указывал и закон Всемирного тяготения Ньютона, на основании которого в результате эволюции вращающийся земной шар должен принять форму эллипсоида вращения, сжатого у полюсов. Французские ученые по результатам обработки собственных градусных измерений пришли к выводу, что Земля – эллипсоид вращения, вытянутый у полюсов. Таким образом, теория Ньютона не подтвердилась. Это было вызвано тем, что дуги французских градусных измерений были небольшой длины и не могли описывать всю ее поверхность. Для устранения противоречия Французская академия наук организовала две международные экспедиции: Перуанскую (1735 – 1742 гг.) и Лапландскую (1736 – 1737 гг.). Перу расположено в экваториальной облас-

ти, а Лапландия (север современной Финляндии) – с широтой около  $66^{\circ}$ . Обработка результатов этих градусных измерений полностью подтвердили теорию Ньютона.

Для однозначного определения параметров эллипсоида: большой полуоси  $a$  и полярного сжатия  $\alpha$  необходимо выполнить градусные измерения вдоль двух дуг. При большем числе дуг значения параметров эллипсоида определяли по методу наименьших квадратов. При развитии метода триангуляции стало возможным получать градусные измерения из большого числа дуг меридианов и параллелей, связанных друг с другом общими вершинами. В этом случае дуги покрывали большие площади земной поверхности и параметры земного эллипсоида получали наиболее подходящими к данным площадям. В этом случае речь идет о **методе площадей** градусных измерений. Методы дуг и площадей основаны только на измерениях расстояний и углов (разностей широт и долгот), поэтому данные методы относят к **геометрическим методам градусных измерений**.

Если градусные измерения выполнены на всей поверхности Земли, получают параметры **общего земного эллипсоида**, центр которого совпадает с центром масс, а ось вращения – с осью вращения Земли.

В том случае, когда необходимо подобрать положение эллипсоида так, чтобы его поверхность наилучшим образом подходила к части земной поверхности, например, для территории государства, поверхность эллипсоида ориентируют в теле Земли установлением **исходных геодезических дат** в некотором астрономо-геодезическом пункте, принятом за исходный для всей государственной геодезической сети. Исходные геодезические данные определяются из выражений:

$$\begin{aligned} B_0 &= \varphi_0 - \xi_0 - 0.171'' H_0 \sin 2\varphi_0; \\ L_0 &= \lambda_0 - \eta_0 \sec \varphi_0; \\ A_0 &= \alpha_0 - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0; \\ H_0 &= H_0^y + \zeta_0. \end{aligned} \tag{13.1}$$

В этом случае определяют параметры и ориентировку **референц-эллипсоида**. При этом параметры могут совпадать с параметрами общего земного эллипсоида, а ориентировка его в теле Земли такова, что ось вращения и плоскость экватора параллельны оси вращения и плоскости экватора общего земного эллипсоида.

Условия геометрической близости поверхности референц-эллипсоида к уровенной поверхности реальной Земли определяются уравнениями.

$$\sum (\xi^2 + \eta^2) = \min \quad \text{или} \quad \sum \zeta^2 = \min. \tag{13.2}$$

В том случае, когда речь идет о референц-эллипсоиде, условия (13.2) выполняются только для части поверхности Земли; для общего земного эллипсоида – для всей ее поверхности. На практике обычно параметры определяют из градусных измерений, выполненных на всей поверхности Земли, а исходные геодезические даты для ориентировки референц-эллипсоида определяют из градусных измерений, выполненных на той территории, относительно которой определяют его ориентировку.

Для определения параметров земного эллипсоида, наряду с геометрическим, применяют **физический метод**, основанный на гравиметрических измерениях.

Геометрический метод имеет существенный недостаток, так как геодезические и астрономические измерения, в отличие от гравиметрических, могут быть выполнены только на суше, а на большей части земной поверхности, покрытой морями и океанами, такие измерения невозможны. Следует иметь в виду, что из гравиметрических измерений большая полуось определяется значительно грубее. Поэтому на практике применяют оба метода совместно. В этом случае большая полуось получается с погрешностью до 100 м, а полярное сжатие – до десятых долей знаменателя.

В последние десятилетия существенное развитие и практическое применение в геодезии находят методы, основанные на спутниковых системах позиционирования. Задача определения параметров земного эллипсоида в этом случае решается значительно оперативнее и точнее. Так, если для выполнения астрономо-геодезических и гравиметрических измерений на всей поверхности Земли потребовалось более 100 лет, то спутниковая информация и методы ее обработки сформированы за несколько десятилетий. При этом погрешность параметров земного эллипсоида характеризуется величинами: в большой полуоси 1 м, в полярном сжатии – сотые доли знаменателя.

### 13.2. Уравнения градусных измерений по меридиану

Пусть имеется звено триангуляции  $AB$ , вытянутое от исходного пункта  $A$  вдоль меридиана (рис. 13.1). В звене измерены углы треугольников, в пункте  $A$  установлены исходные геодезические даты. Производится уравнивание звена за все геометрические условия, кроме координатных (фигур, базисов, азимутов), а также решение треугольников. Последовательно решая прямую геодезическую задачу от пункта  $A$ , вычисляют геодезические координаты всех геодезических пунктов звена. Из решения обратной геодезической задачи между пунктами  $A$  и  $B$  получают длину диагонали звена  $D$  и ее прямой и обратный азимуты  $T_{AB}$  и  $T_{BA}$ . Имея несколь-

ко таких звеньев, связанных общими пунктами, получаем картину (рис. 13.2). Естественно, из-за рельефа и других факторов, диагонали реальных звеньев не будут совпадать с дугой меридиана. В этом случае проектируют по параллели точку  $B$  на меридиан точки  $A$  по формуле

$$S = D \cos T_m .$$

Здесь  $T_m$  – среднее значение из прямого и обратного азимутов звена. Погрешность, обусловленная кривизной поверхности эллипсоида, неучтенной в данной формуле, для длины звена в 250 км составит величину менее 1 м.

Для вывода уравнения градусных измерений по меридиану достаточно использовать приближенную формулу для длины дуги меридиана

$$S = \frac{a(1-e^2)}{W_m^3} \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} . \quad (13.3)$$

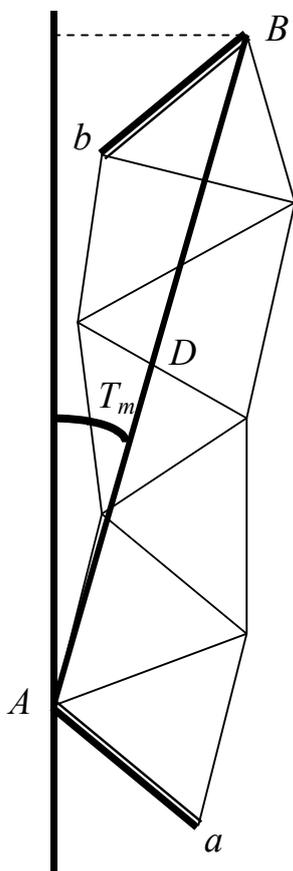


Рис. 13.1

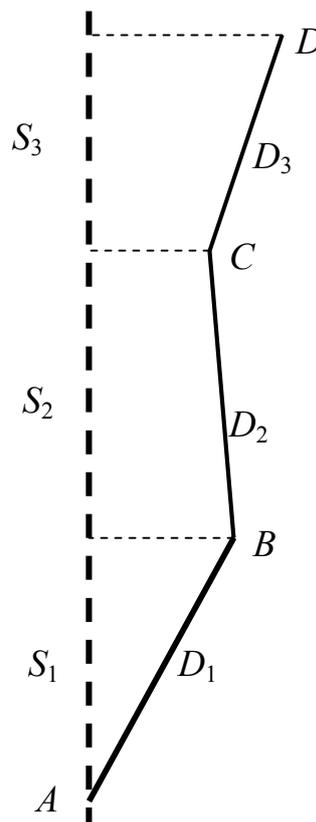


Рис. 13.2

Целью градусных измерений является определение параметров эллипсоида, поэтому формулу (13.3) преобразуем, разлагая в ряд  $W_m^{-3}$  и ограничиваясь первым членом разложения, к виду

$$S = a \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left( 1 - e^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \right). \quad (13.4)$$

Здесь геодезические широты двух точек отнесены к искомому эллипсоиду, параметры которого необходимо определить. Пусть будут известны некоторые приближенные параметры эллипсоида (например, из предыдущих определений), тогда искомые параметры выражаются как суммы приближенных параметров и некоторых поправок, определение которых производится из градусных измерений

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a; \\ e^2 &= e_0^2 + \Delta e^2. \end{aligned} \quad (13.5)$$

При необходимости определения полярного сжатия несложно перейти к нему от квадрата эксцентриситета по известной формуле

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}.$$

Подставляя выражения (13.5) в (13.4), получим уравнение

$$\begin{aligned} S &= a_0 \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left( 1 - e_0^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \right) + \Delta a \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left( 1 - e_0^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \right) - \\ &- a_0 \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \Delta e^2. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Очевидно, первый член полученного уравнения выражает длину дуги меридиана на эллипсоиде с приближенными параметрами, радиус меридиана которого определяется выражением

$$M_m^0 = a_0 \left( 1 - e_0^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \right). \quad (13.7)$$

Здесь различием геодезических широт средней точки на различных эллипсоидах, входящих в выражение с множителем  $e^2$ , можно пренебречь. Разделив почленно уравнение (13.6) на (13.7), получаем

$$\frac{S}{M_m^0} \rho'' = (B_2 - B_1)'' + (B_2 - B_1)'' \frac{\Delta a}{a_0} - (B_2 - B_1)'' \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \Delta e^2. \quad (13.8)$$

Правая часть полученного выражения представляет собой не что иное, как разность геодезических широт точек, расстояние между которыми  $S$ , на эллипсоиде с приближенными параметрами, следовательно, можем записать

$$(B_2^0 - B_1^0)'' = (B_2 - B_1)'' + (B_2 - B_1)'' \frac{\Delta a}{a_0} - (B_2 - B_1)'' \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \Delta e^2. \quad (13.9)$$

Согласно первому уравнению (6.1) можем записать

$$B_1 = \varphi_1 - \zeta_1 - 0.171'' H_1 \sin 2\varphi_1;$$

$$B_2 = \varphi_2 - \zeta_2 - 0.171'' H_2 \sin 2\varphi_2.$$

С учетом этого уравнение (6.9) может быть записано с принятой точностью

$$\xi_2 = \xi_1 + \left( (\varphi_2 - \varphi_1)'' - 0.171'' (H_2^0 \sin 2B_2^0 - H_1^0 \sin 2B_1^0) - (B_2^0 - B_1^0)'' \right) +$$

$$+ (B_2^0 - B_1^0)'' \frac{\Delta a}{a_0} - (B_2^0 - B_1^0)'' \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m^0 \right) \Delta e^2. \quad (13.10)$$

Здесь геодезические широты и высоты вычислены относительно эллипсоида с приближенными параметрами. Введем обозначения:

$$\left( (\varphi_2 - \varphi_1)'' - 0.171'' (H_2^0 \sin 2B_2^0 - H_1^0 \sin 2B_1^0) - (B_2^0 - B_1^0)'' \right) = l;$$

$$(B_2^0 - B_1^0)'' = p; \quad - (B_2^0 - B_1^0)'' \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m^0 \right) = q. \quad (13.11)$$

Тогда уравнение (13. 10) примет вид

$$\xi_2 = \xi_1 + p \frac{\Delta a}{a_0} + q \Delta e^2 + l. \quad (13.12)$$

Если дуга градусного измерения состоит из  $n$  последовательных частных дуг, выходящих из начальной точки, то для каждой из них можем записать, условно придав некоторое значение для составляющей уклонения отвеса в начальной точке,

$$\xi_1 = \xi_0;$$

$$\xi_2 = \xi_1 + p_1 \frac{\Delta a}{a_0} + q_1 \Delta e^2 + l_1;$$

$$\xi_3 = \xi_2 + p_2 \frac{\Delta a}{a_0} + q_2 \Delta e^2 + l_2;$$

$$\xi_4 = \xi_3 + p_3 \frac{\Delta a}{a_0} + q_3 \Delta e^2 + l_3;$$

.....

$$\xi_n = \xi_{n-1} + p_{n-1} \frac{\Delta a}{a_0} + q_{n-1} \Delta e^2 + l_{n-1}. \quad (13.13)$$

Поверхность эллипсоида будет наилучшим образом подходить к уровенной поверхности Земли вдоль данного меридиана, если составляющие уклонений отвеса в меридиане будут малыми величинами, и будет носить случайный характер. Выразим искомые значения составляющих уклонений отвеса  $\xi_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) через составляющую уклонения отвеса в начальной точке  $\xi_1$ . Для этого уравнения (13.13) запишем в виде

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi_1; \\
\xi_2 &= \xi_1 + p_1 \frac{\Delta a}{a_0} + q_1 \Delta e^2 + l_1; \\
\xi_3 &= \xi_1 + (p_1 + p_2) \frac{\Delta a}{a_0} + (q_1 + q_2) \Delta e^2 + (l_1 + l_2); \\
\xi_4 &= \xi_1 + (p_1 + p_2 + p_3) \frac{\Delta a}{a_0} + (q_1 + q_2 + q_3) \Delta e^2 + (l_1 + l_2 + l_3); \quad (13.14) \\
&\dots\dots\dots \\
\xi_n &= \xi_1 + (p_1 + \dots + p_{n-1}) \frac{\Delta a}{a_0} + (q_1 + \dots + q_{n-1}) \Delta e^2 + (l_1 + \dots + l_{n-1}).
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
p_1 &= P_1; (p_1 + p_2) = P_2; (p_1 + p_2 + p_3) = P_3; \dots \\
q_1 &= Q_1; (q_1 + q_2) = Q_2; (q_1 + q_2 + q_3) = Q_3; \dots \\
l_1 &= L_1; (l_1 + l_2) = L_2; (l_1 + l_2 + l_3) = L_3; \dots
\end{aligned}$$

Получим уравнения (13.14) в виде

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi_1; \\
\xi_2 &= \xi_1 + P_1 \frac{\Delta a}{a_0} + Q_1 \Delta e^2 + L_1 \\
\xi_3 &= \xi_1 + P_2 \frac{\Delta a}{a_0} + Q_2 \Delta e^2 + L_2 \\
\xi_4 &= \xi_1 + P_3 \frac{\Delta a}{a_0} + Q_3 \Delta e^2 + L_3 \quad (13.15) \\
&\dots\dots\dots \\
\xi_n &= \xi_1 + P_{n-1} \frac{\Delta a}{a_0} + Q_{n-1} \Delta e^2 + L_{n-1}
\end{aligned}$$

Уравнения (13.15) можно рассматривать как параметрические уравнения поправок, в которых роль искомым параметров будут играть составляющая уклонения отвеса в начальном пункте  $\xi_1$ , а также поправки к приближенным параметрам эллипсоида  $\Delta a$  и  $\Delta e^2$ . Для однозначного решения задачи необходимо иметь три дуги. При  $n > 3$  данную систему уравнений решают под условием

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \min. \quad (13.16)$$

Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений (6.14) под условием (6.16), что приводит к решению трех нормальных уравнений с тремя неизвестными параметрами.

$$\begin{aligned}
 n\xi_1 + \left(\sum_{i=1}^n P_i\right) \frac{\Delta a}{a_0} + \left(\sum_{i=1}^n Q_i\right) \Delta e^2 + \left(\sum_{i=1}^n L_i\right) &= 0; \\
 \left(\sum_{i=1}^n P_i\right) \xi_1 + \left(\sum_{i=1}^n P_i^2\right) \frac{\Delta a}{a_0} + \left(\sum_{i=1}^n P_i Q_i\right) \Delta e^2 + \left(\sum_{i=1}^n P_i L_i\right) &= 0; \\
 \left(\sum_{i=1}^n Q_i\right) \xi_1 + \left(\sum_{i=1}^n P_i Q_i\right) \frac{\Delta a}{a_0} + \left(\sum_{i=1}^n Q_i^2\right) \Delta e^2 + \left(\sum_{i=1}^n Q_i L_i\right) &= 0.
 \end{aligned} \quad (13.17)$$

Уравнения (6.17) представляют собой уравнения градусных измерений по меридиану, полученные методом развертывания. Это объясняется тем, что в свободном члене уравнения (6.12) величина  $(B_2^0 - B_1^0)$  вычисляется по расстоянию  $S$ , редуцированному на уровенную поверхность (геоид), а не на поверхность эллипсоида.

### 13.3. Уравнения градусных измерений по параллели

Пусть в звене триангуляции 1 класса, вытянутого вдоль параллели (рис. 13.3), аналогично тому, как это рассмотрено в предыдущем случае, вычислена длина диагонали  $D$ , ее прямой и обратный азимуты. Не представляет труда вычислить длину дуги параллели  $S_k$  на средней широте точек  $A$  и  $B$ .

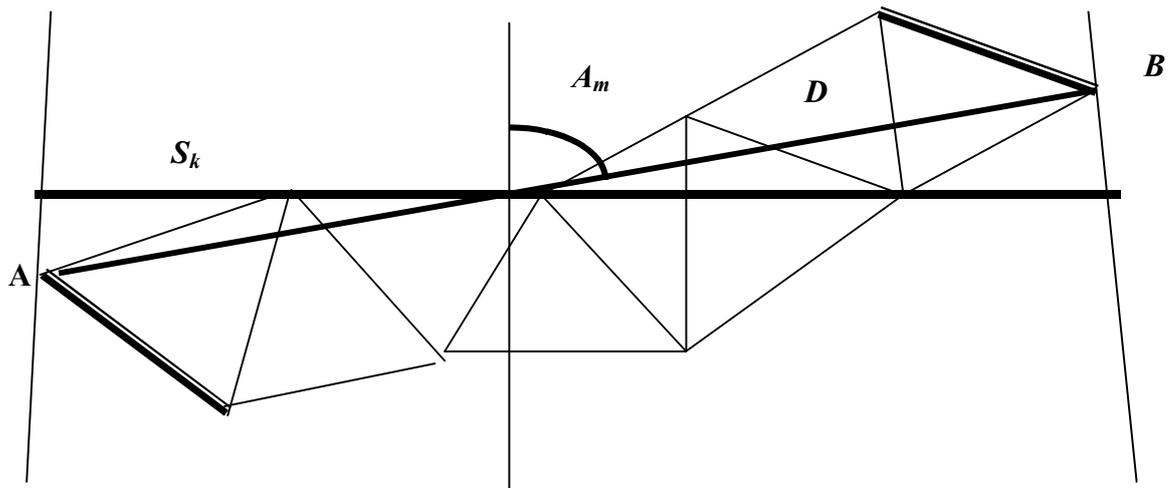


Рис. 13.3

Имея несколько последовательных звеньев, связанных общими пунктами Лапласа, получают картину (рис. 13.4).

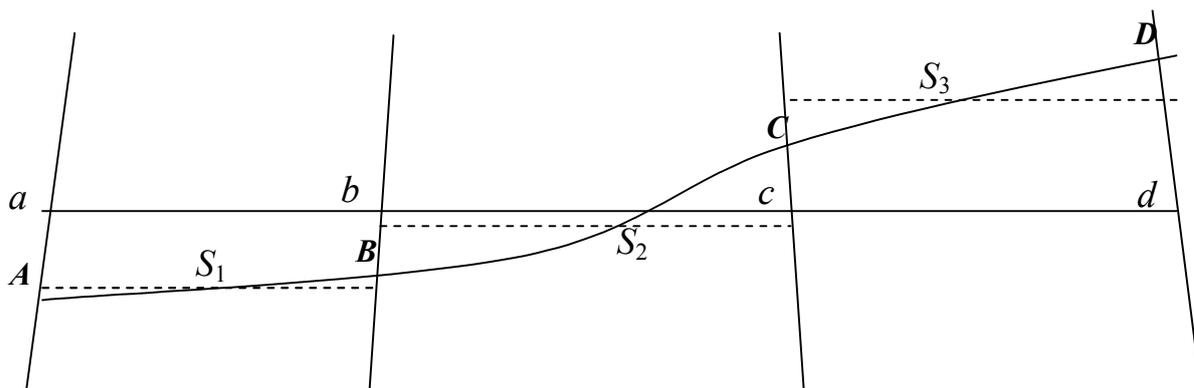


Рис. 13.4

Здесь проекции диагоналей звеньев  $S_i$  представляют собой длины дуг параллелей на средней широте соответствующей диагонали. Для вычисления длины дуги параллели между точками  $a$  и  $b$  находят отрезки дуги параллели  $S_i^0$  на средней широте всех звеньев (точек  $A$  и  $D$ ), участвующих в градусном измерении, из соотношения

$$S_i^0 = S_i \frac{W_i \cos B_0}{W_0 \cos B_i}.$$

Таким образом, имеют уравнение длины дуги параллели  $ab$

$$S = \frac{a(L_2 - L_1)''}{\rho''} \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 B_0\right). \quad (13.18)$$

Вводя обозначения (13.5), а также учитывая уравнения исходных геодезических дат для долготы

$$\begin{aligned} L_1 &= \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1; \\ L_2 &= \lambda_2 - \eta_2 \sec \varphi_2, \end{aligned} \quad (13.19)$$

получаем аналогично тому, как это сделано в выводе уравнений по меридиану, параметрические уравнения

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_1; \\ \eta_2 &= \eta_1 + P_1' \frac{\Delta a}{a_0} + Q_1' \Delta e^2 + L_1'; \\ \eta_3 &= \eta_1 + P_2' \frac{\Delta a}{a_0} + Q_2' \Delta e^2 + L_2'; \\ &\dots \dots \dots \\ \eta_n &= \eta_1 + P_{n-1}' \frac{\Delta a}{a_0} + Q_{n-1}' \Delta e^2 + L_{n-1}'. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Решая систему (13.20) под условием

$$\sum_{i=1}^n \eta_i^2 = \min,$$

получают нормальные уравнения вида, аналогичного (13.17).

На практике системы (13.15) и (13.20) решают совместно под условием

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) = \min. \quad (13.21)$$

В результате получают поправки к приближенным параметрам эллипсоида и составляющие уклонений отвеса в исходном пункте при условии их наилучшего соответствия дугам меридианов и параллелей, участвующих в градусных измерениях.

#### 13.4. Уравнения градусных измерений по методу площадей

Рассмотренные методы градусных измерений применялись, когда в них участвовали разрозненные дуги. При реализации программы построения государственной геодезической сети 1 класса в СССР диагонали звеньев позволяли формировать взаимосвязанные дуги меридианов и параллелей, покрывающие огромные площади земной поверхности. В этом случае целесообразнее искать параметры эллипсоида и составляющие уклонений отвеса в исходном пункте так, чтобы его ориентировка и параметры наилучшим образом подходили к площади уровенной поверхности Земли. То есть говорят о градусных измерениях по методу площадей. Кроме того, здесь возможно применение строгого **метода проектирования**, в отличие от метода развертывания, рассмотренного выше.

В данном случае имеется некоторый референц-эллипсоид с параметрами  $a_0$ ,  $\alpha_0$ , ориентировкой, определяемой исходными геодезическими датами  $B_0$ ,  $L_0$ ,  $A_0$ ,  $\zeta_0$ . В России и затем в Советском Союзе до 1946 года применялся референц-эллипсоид Бесселя с исходными геодезическими датами, установленными для центра главного пункта Пулковской астрономической обсерватории. В принципе эти параметры и исходные даты можно получить, применяя рассмотренные выше способы градусных измерений по методу развертывания.

Таким образом, имеют некоторые ранее принятые параметры и ориентировку референц-эллипсоида:  $a_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $B_0$ ,  $L_0$ ,  $A_0$ ,  $\zeta_0$ . Необходимо определить из градусных измерений, выполненных на территории государства,

поправки к ранее принятым параметрам, а также уточнить ориентировку референц-эллипсоида. Следует заметить, что параметры общего земного эллипсоида могут быть определены только из обработки мировых градусных измерений.

Координаты в исходном геодезическом пункте государства определяются выражениями (13.1), которые можем записать в виде:

$$\begin{aligned} B_0 + \delta B_0 &= \varphi_0 - \xi_0 - 0.171'' H_0 \sin 2\varphi_0; \\ L_0 + \delta L_0 &= \lambda_0 - \eta_0 \sec \varphi_0; \\ A_0 + \delta A_0 &= \alpha_0 - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0; \\ \zeta_0' + \delta \zeta_0 &= \zeta_0. \end{aligned} \quad (13.22)$$

Для произвольного астрономо-геодезического пункта сети будем иметь для геодезических координат на искомом эллипсоиде (широт, долгот, азимутов и аномалий высот):

$$\begin{aligned} B + \delta B &= \varphi - \xi - 0.171'' H \sin 2\varphi; \\ L + \delta L &= \lambda - \eta \sec \varphi; \\ A + \delta A &= \alpha - \eta \operatorname{tg} \varphi; \\ H' + \delta H &= H. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Положение любой точки на поверхности эллипсоида также может быть определено пространственными прямоугольными координатами

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L; \\ Z &= N(1 - e^2) \sin B + H \sin B. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Если система координат референцная, то начало этой системы относительно центра масс Земли определяется величинами  $X_0, Y_0, Z_0$ .

Пусть необходимо найти новую референцную систему из градусных измерений, в которой пространственные прямоугольные координаты точек получат новые значения:

$$X + \delta X, Y + \delta Y, Z + \delta Z.$$

Изменения прямоугольных координат  $\delta X, \delta Y, \delta Z$  при сохранении параллельности оси вращения и плоскости экватора одинаковы для всех пунктов сети и вызваны изменениями параметров эллипсоида  $\delta a, \delta \alpha$  и геодезических координат  $\delta B, \delta L, \delta H$ .

Это может быть выражено дифференциальными уравнениями, в которых дифференциалы параметров эллипсоида и геодезических координат заменены их конечными и малыми приращениями:

$$\begin{aligned}
\delta X &= \frac{\partial X}{\partial B} \delta B + \frac{\partial X}{\partial L} \delta L + \frac{\partial X}{\partial \zeta} \delta H + \frac{\partial X}{\partial a} \delta a + \frac{\partial X}{\partial \alpha} \delta e^2; \\
\delta Y &= \frac{\partial Y}{\partial B} \delta B + \frac{\partial Y}{\partial L} \delta L + \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \delta H + \frac{\partial Y}{\partial a} \delta a + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \delta e^2; \\
\delta Z &= \frac{\partial Z}{\partial B} \delta B + \frac{\partial Z}{\partial L} \delta L + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \delta H + \frac{\partial Z}{\partial a} \delta a + \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \delta e^2.
\end{aligned} \tag{13.25}$$

Имея формулы связи между сжатием и эксцентриситетом

$$e^2 = 1 - (1 - \alpha)^2; \quad \alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2},$$

при необходимости несложно получить связь между их дифференциалами или поправками

$$de^2 = 2(1 - \alpha)^2 d\alpha; \quad d\alpha = 1 + \frac{de^2}{2\sqrt{1 - e^2}}. \tag{13.26}$$

Частные производные в (13.25) вычисляем из уравнений (13.24), имея в виду выражение для радиуса первого вертикала

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}.$$

Производя вычисление частных производных и заменяя дифференциальные приращения переменных конечными приращениями – поправками, получаем:

$$\begin{aligned}
\delta X &= \left( \frac{\cos B}{W} \delta a + \frac{a \cos B}{2W^3} \sin^2 B \delta e^2 - (M + H) \sin B \delta B + \cos B \delta H \right) \cos L - \\
&- (N + H) \sin L \cos B \delta L; \\
\delta Y &= \left( \frac{\cos B}{W} \delta a + \frac{a \cos B}{2W^3} \sin^2 B \delta e^2 - (M + H) \sin B \delta B + \cos B \delta H \right) \sin L + \\
&+ (N + H) \cos L \cos B \delta L; \\
\delta Z &= (1 - e^2) \frac{\sin B}{W} \delta a - (\cos^2 B + W^2) \frac{N \sin B}{2W^2} \delta e^2 + \\
&+ (M + H) \cos B \delta B + \sin B \delta H.
\end{aligned} \tag{13.27}$$

Здесь несложно заметить выражения соответствующих частных производных для (13.25), полученных дифференцированием (13.24) по соответствующим переменным.

Решим уравнения (13.27) относительно изменений геодезических координат  $\delta B$ ,  $\delta L$ ,  $\delta H$ . Для этого из первых двух уравнений находим

$$\begin{aligned}\delta X \sin L - \delta Y \cos L &= -(N + H) \cos B \delta L; \\ \delta X \cos L + \delta Y \sin L &= \frac{N}{a} \cos B \delta a + \frac{N \sin^2 B}{2W^2} \cos B \delta e^2 - \\ &- (M + H) \sin B \delta B + \cos B \delta H.\end{aligned}\quad (13.28)$$

Из первого уравнения (13.28) находим поправку  $\delta L$ . Для определения поправок  $\delta B$  и  $\delta H$  решаем совместно второе уравнение (13.28) с третьим уравнением (13.27):

$$\begin{aligned}\delta Z \cos B - (\delta X \cos L + \delta Y \sin L) \sin B &= (M + H) \delta B - \\ - \frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \delta a - (1 + W^2) \frac{N}{2W^2} \sin B \cos B \delta e^2;\end{aligned}\quad (13.29)$$

$$\delta Z \sin B + (\delta X \cos L + \delta Y \sin L) \cos B = \delta H + W \delta a - \frac{N \sin^2 B}{2} \delta e^2.$$

Выражая в явном виде поправки  $\delta B$ ,  $\delta L$ ,  $\delta H$ , получаем:

$$\begin{aligned}\delta B &= \frac{1}{(M + H)} (\delta Z \cos B - (\delta X \cos L + \delta Y \sin L) \sin B + \\ &+ \frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \delta a + \left( \frac{1}{W^2} + 1 \right) N \sin B \cos B \frac{\delta e^2}{2}); \\ \delta L &= - \frac{(\delta X \sin L - \delta Y \cos L)}{(N + H) \cos B}; \\ \delta H &= \delta Z \sin B + (\delta X \cos L + \delta Y \sin L) \cos B - W \delta a + \\ &+ \frac{N \sin^2 B}{2} \delta e^2.\end{aligned}\quad (13.30)$$

Если уравнения (13.27) применить для исходного пункта, на котором устанавливаются исходные геодезические даты, то будем иметь

$$\begin{aligned}\delta X_0 &= \left( \frac{\cos B_0}{W_0} \delta a + \frac{a \cos B_0}{2W_0^3} \sin^2 B_0 \delta e^2 - (M_0 + H_0) \sin B_0 \delta B_0 + \cos B_0 \delta H_0 \right) \cos L_0 - \\ &- (N_0 + H_0) \sin L_0 \cos B_0 \delta L_0; \\ \delta Y_0 &= \left( \frac{\cos B_0}{W_0} \delta a + \frac{a \cos B_0}{2W_0^3} \sin^2 B_0 \delta e^2 - (M_0 + H_0) \sin B_0 \delta B_0 + \cos B_0 \delta H_0 \right) \sin L_0 + \\ &+ (N_0 + H_0) \cos L_0 \cos B_0 \delta L_0; \\ \delta Z_0 &= (1 - e^2) \frac{\sin B_0}{W_0} \delta a - (\cos^2 B_0 + W_0^2) \frac{N_0 \sin B_0}{2W_0^2} \delta e^2 + \\ &+ (M_0 + H_0) \cos B_0 \delta B_0 + \sin B_0 \delta H_0\end{aligned}\quad (13.31)$$

Здесь величины  $\delta X_0, \delta Y_0, \delta Z_0$  представляют собой поправки в координаты центра референц-эллипсоида, наиболее подходящего для данной территории.

Из (13.23) выражаем в явном виде составляющие уклонения отвеса и аномалию высоты

$$\begin{aligned}\xi &= -\delta B + \varphi - B - 0.171'' H \sin 2\varphi ; \\ \eta &= -\delta L + (\lambda - L) \cos \varphi; \\ \zeta &= \delta H.\end{aligned}$$

Выражения для поправок в геодезические координаты берем из (13.30), в результате получаем уравнения градусных измерений в методе площадей, в которых роль неизвестных параметров играют поправки к приближенным значениям параметров эллипсоида  $\delta a, \delta e^2$  и приближенным координатам его центра  $\delta X_0, \delta Y_0, \delta Z_0$ . Составляющие уклонений отвеса и аномалии высот при хорошо подобранном эллипсоиде должны носить случайный характер.

$$\begin{aligned}\xi_i'' &= \rho'' \frac{\sin B_i \cos L_i}{(M_i + H_i)} \delta X_0 + \rho'' \frac{\sin B_i \sin L_i}{(M_i + H_i)} \delta Y_0 - \rho'' \frac{\cos B_i \sin L_i}{(M_i + H_i)} \delta Z_0 - \\ &- \rho'' \frac{e^2}{a} \sin B_i \cos B_i \delta a - \rho'' (e^2 \sin^2 B_i + 2) \sin B_i \cos B_i \delta e^2 + \\ &+ (\varphi_i - B_i) - 0.171'' H_i \sin 2B_i; \\ \eta_i'' &= \rho'' \frac{(\delta X_0 \sin L_i - \delta Y_0 \cos L_i)}{(N_i + H_i) \cos B_i} + (\lambda_i - L_i)'' \cos B_i; \\ \zeta_i'' &= \delta Z_0 \sin B_i + (\delta X_0 \cos L_i + \delta Y_0 \sin L_i) \cos B_i - W_i \delta a + \\ &+ \frac{N_i \sin^2 B_i}{2} \delta e^2.\end{aligned}\tag{13.32}$$

Таких уравнений будет столько, сколько астрономо-геодезических пунктов участвует в градусных измерениях ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Решают первые два уравнения под условием

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) = \min,$$

а третье уравнение – под условием

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i^2 = \min.$$

Рассмотренный метод строгий и может применяться при выводе параметров земного эллипсоида с использованием спутниковых измерений.

### 13.5. Исходные геодезические даты и методы их установления

Как уже отмечалось ранее, исходные геодезические даты определяются выражениями (13.1) и задают ориентировку референц-эллипсоида в теле Земли так, чтобы его поверхность наилучшим образом подходила к части поверхности геоида соответствующей территории. Этой частью может быть территория государства или группы государств.

$$B_0 = \varphi_0 - \xi_0 - 0.171'' H_0 \sin 2\varphi_0;$$

$$L_0 = \lambda_0 - \eta_0 \sec \varphi_0;$$

$$A_0 = \alpha_0 - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0;$$

$$H_0 = H_0^y + \zeta_0.$$

Здесь на некотором пункте, принятом за начальный для государственной геодезической сети, выполнены высокоточные астрономические измерения широты, долготы и азимута, из высокоточного нивелирования и гравиметрических измерений определена нормальная высота. Необходимо определить для этого пункта составляющие уклонений отвеса и аномалию высоты. Другими словами, необходимо выполнить ориентирование поверхности референц-эллипсоида с параметрами, полученными из градусных измерений, в теле Земли так, чтобы имели место минимально возможные и случайные отступления поверхности эллипсоида от геоида на территории государства. При этом, определяя исходные геодезические даты, сохраняют параллельность оси вращения и плоскости экватора референц-эллипсоида по отношению к оси вращения и плоскости экватора реальной Земли на некоторую эпоху. Это имеет принципиально важное значение потому, что в процессе суточного вращения Земли ее ось совершает колебательные периодические движения (движение полюсов). Имеют место вековые, обусловленные глобальными изменениями в земном теле, и короткопериодические движения полюсов (период около 430 суток, амплитуда до  $0.3''$ ), обусловленные геодинамическими и атмосферными явлениями.

Принцип организации вычислений для установления исходных геодезических дат такой же, как и при градусных измерениях. Отличие состоит в том, что для вывода параметров земного эллипсоида учитывают градусные измерения, выполненные на всей поверхности Земли, а для установления исходных геодезических дат – только градусные измерения, вы-

полненные на той территории, относительно которой производят ориентирование референц-эллипсоида.

Так, например, параметры эллипсоида Красовского получены в СССР в 40-е годы XX столетия из совместной обработки градусных измерений, выполненных к тому времени во всем мире. Следует отметить, что к этому времени были известны и другие результаты определений параметров земного эллипсоида, полученные в США и ведущих европейских странах. Но для установления исходных геодезических дат для территории СССР необходимо было решить задачу ориентирования референц-эллипсоида. Эта задача была решена по методу площадей из астрономо-геодезической сети 1 класса, построенной на территории СССР с использованием материалов гравиметрической съемки по европейской части страны. Для территории СССР, расположенной восточнее Урала, определялись топографо-изостатические уклонения отвеса.

Для государств, расположенных в безаномальных районах и имеющих сравнительно небольшие по площади территории, ориентирование референц-эллипсоида может быть выполнено только по одному пункту, принятому за исходный, в котором исходные геодезические даты имеют выражения, следуемые из (13.1):

$$\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0; \quad B_0 = \varphi_0; \quad L_0 = \lambda_0; \quad A_0 = \alpha_0; \quad H_0 = H_0^Y.$$

В данном случае поверхность референц-эллипсоида в исходном пункте касается поверхности геоида, ось его вращения параллельна оси вращения Земли. Для малых территорий и в случае отсутствия больших аномалий силы тяжести отступление поверхности референц-эллипсоида от поверхности геоида будут незначительными и редуцирование измеренных величин на поверхность эллипсоида производится с достаточной точностью методом развертывания.

### ***Вопросы для самоконтроля по разделу 13***

1. Сущность и задачи, решаемые из градусных измерений.
2. Геометрические методы градусных измерений.
3. Основные этапы развития методов градусных измерений.
4. Что выражает уравнение градусных измерений?
5. Как используют метод наименьших квадратов в градусных измерениях?
6. Постановка вопроса градусных измерений в современных условиях.
7. Что определяют исходные геодезические даты:

## 14. УРАВНИВАНИЕ ГОСУДАРСТВЕННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

### 14.1. Постановка задачи и пути ее решения

В соответствии со схемой и программой построения государственной геодезической сети СССР в качестве главной плановой геодезической основы, закрепляющей на земной поверхности принятую систему координат (СК-42), является астрономо-геодезическая сеть полигонов первого класса. Каждый полигон, как известно, состоит из четырех звеньев треугольников триангуляции (иногда трилатерации или полигонометрии). Каждое звено длиной от 200 до 250 км опирается на пункты Лапласа, базисные стороны и состоит из 16 треугольников. Размеры территорий, покрываемых первоклассными полигонами, могут достигать значительных величин, их отображение на плоскости проекции Гаусса – Крюгера в одной координатной зоне невозможно с необходимой точностью. Поэтому астрономо-геодезические сети первого класса уравнивают на поверхности земного эллипсоида, а не на плоскости геодезической проекции.

Государственная геодезическая сеть Республики Беларусь является фрагментом сети СССР, поэтому полезно проследить, как решалась задача построения и уравнивания государственной астрономо-геодезической сети (АГС) СССР. При этом следует отметить, что по своим размерам и точности построения эта сеть не имела мировых аналогов.

Выдающаяся роль в решении задачи уравнивания АГС принадлежит коллективу советских ученых под руководством Ф.Н. Красовского. При этом был использован самый передовой мировой опыт, в частности, исследования выдающегося немецкого ученого астрономо-геодезиста Ф.Р. Гельмерта. Здесь необходимо было решить две основные проблемы: во-первых, редуцировать измеренные величины без существенных деформаций с физической поверхности Земли на поверхность эллипсоида; во-вторых, сократить объем вычислений без существенных нарушений требований метода наименьших квадратов. Первая проблема решалась применением метода проектирования на достаточно хорошо ориентированный референц-эллипсоид, а вторая – применением полигонального метода уравнивания на основе математически обоснованного перехода от измеренных величин (базисных сторон и углов треугольников, азимутов, широт и долгот на пунктах Лапласа) к длинам и азимутам диагоналей звеньев.

Переход к уравниванию не самих измеренных величин, а их функций, был вынужденной мерой, существенно сокращающей объем вычислений. Следует помнить, что вычисления выполнялись либо с помощью ло-

гарифмических таблиц, либо на арифмометрах. В настоящее время с использованием высокопроизводительных ЭВМ и соответствующего программного обеспечения проблемы объема и трудоемкости вычислений практически не существует. При уравнивании АГС СССР реализовано три программы.

**Первая программа** разработана Ф.Н. Красовским и применена к уравниванию первых девяти первоклассных полигонов в 1930 – 32 гг. Уравнивание проводилось на поверхности эллипсоида Бесселя с исходными геодезическими датами в Пулково. Редукционная проблема вынужденно решалась по методу развертывания (не учитывались поправки за отклонения отвеса и аномалии высот из-за отсутствия информации о них).

**Вторая программа** также носит имя Красовского и реализована в 1941 – 46 гг. для уравнивания 87 полигонов АГС, включавших 310 первоклассных звеньев. Здесь уравнивание проводилось на поверхности референц-эллипсоида Красовского, параметры и ориентировка в теле Земли были получены к этому времени из градусных измерений. Редуцирование измерений производилось по строгому методу проектирования. Центры порядка 6 000 пунктов АГС 1 класса после уравнивания закрепляли на земной поверхности новую систему геодезических координат, известную как СК-42.

**Современная программа** уравнивания АГС СССР разрабатывалась на основе анализа качества построения полигонов 1 и сплошных сетей 2 класса, реализована в 90-х годах прошлого столетия и принципиально отличается от двух предыдущих. Прежде всего, на всей территории СССР завершены работы по созданию не только полигонов первого класса АГС, но и полностью завершены работы по созданию сплошной сети второго класса, заполняющей первоклассные полигоны. Выполнены принципиально новые определения базисов большой протяженности методами спутниковой геодезии. Разработаны методы и алгоритмы уравнивания на ЭВМ обширных геодезических построений с учетом особенностей и специфики создания АГС СССР. Здесь уравниванию подлежали порядка 164 000 пунктов 1 – 2 классов, объединенных в 277 первоклассных полигонов. Эти пункты закрепляют на земной поверхности модернизированную референцную систему координат СК-42, которую называли СК-95. По нашему мнению, более корректно было бы ее назвать СК-42', потому что в ней координатной поверхностью служит референц-эллипсоид Красовского, исходные геодезические даты в Пулково также сохранены. Это не совсем понятно потому, что к этому времени были известны параметры земного эллипсоида и общеземные системы координат, полученные спутниковыми методами в США (*WGS-84*) и в РФ (*ПЗ-90*).

В настоящее время актуальной является задача модернизации существующих АГС с использованием новых спутниковых технологий координатных определений. При этом следует иметь в виду, что точность взаимного положения пунктов 1 – 2 классов после уравнивания АГС СССР составляет в среднем порядка 7 – 10 см. Современные спутниковые технологии позволяют определять взаимное положение пунктов, удаленных друг от друга до 20 км, с точностью 0.7 – 1.0 см. Таким образом, видим, что в настоящее время существуют предпосылки и возможности для создания более высокоточной государственной геодезической основы, чем это было возможно наземными классическими методами. Здесь весьма важным элементом является согласование общеземной системы координат спутникового позиционирования и референцной системы координат СК-95.

#### 14.2. Полигональное уравнивание сети 1 класса

Как уже отмечено ранее, **первая программа** полигонального уравнивания применена к уравниванию 9 полигонов триангуляции 1 класса. Эта программа предполагала три этапа уравнивательных вычислений.

**На первом этапе** производилось уравнивание за все условия, возникающие в отдельном звене: фигур, полюсов, горизонтов, а также азимутов, базисов. Координатные условия (широт и долгот) в уравнивание не включались из-за низкой точности ( $0.3''$  в определении широты и долготы дает ошибку в положении пункта Лапласа порядка 10 – 12 м). В результате уравнивания на первом этапе получали предварительно уравненные углы треугольников.

Решая по исходной длине и предварительно уравненным углам треугольники триангуляции 1 класса (по теореме Лежандра или способу аддитаментов), вычисляли длины всех сторон. Последовательно решая прямую геодезическую задачу от начального пункта Лапласа (для которого установлены исходные геодезические даты) до конечных пунктов в звеньях, получают их широты и долготы. По мере удаления от геодезического пункта с исходными датами в качестве исходного пункта принимали ранее определенный. Затем, решая обратную геодезическую задачу между начальным и конечным пунктами каждого звена, вычисляли длину и азимуты его диагонали. Результатом первого этапа получали сеть полигонометрии, стороны которой – диагонали звеньев, порядка 200 – 250 км, а углы – разности их азимутов. Ошибки в длинах и углах поворота этой полигонометрии не являются независимыми и случайными ошибками измерений, хотя зависят от них.

**На втором этапе** уравнивают систему образовавшихся полигонов за возникающие условия (координатные и азимутальные). Получают уравненные значения длин и азимутов геодезических линий – сторон полигонов, по которым вычисляют окончательные значения координат вершин полигонов (пунктов Лапласа). Здесь нарушается требование метода наименьших квадратов, т. к. уравниваются не измеренные величины, а их функции.

**На третьем этапе** производят вставку отдельных звеньев между пунктами Лапласа с уравненными координатами, с присоединением азимутального и базисного условий. Результатом являлись окончательные координаты всех пунктов звена первого класса. Здесь проблема состояла в том, что углы треугольников, образующих центральную систему в местах пересечения звеньев, получали разные поправки из разных звеньев. Для устранения этого противоречия каждая такая центральная система уравнивалась отдельно, и значения углов в ней считались окончательными.

Анализ материалов уравнивания 9 полигонов по указанной методике показал вполне удовлетворительные результаты. Вместе с тем, уже к началу 40-х годов XX столетия существенно возрос объем выполненных измерений на значительно большей территории страны. Были выполнены градусные измерения, по результатам которых были получены новые параметры эллипсоида, произведена его ориентировка в теле Земли (референц-эллипсоид Красовского). Существенно пополнился банк данных гравиметрических маятниковых измерений, что позволило на значительной части территории страны вычислить астрономо-гравиметрические отклонения отвеса. Применяя гипотезу изостазии, вычислили топографо-изостатические отклонения отвеса для удаленных от центра восточных территорий. Все это позволило применить строгий метод развертывания при редуцировании измерений.

В новых условиях существенно большего объема измерительной информации обнаружили, что уравнивание в полном соответствии с первой программой не может принести удовлетворительных результатов. Нужно было каким-то образом объяснить и избавиться от существенных значений невязок азимутальных условий, которые преимущественно приближались к предельно допустимым значениям или даже их превышали. Здесь явно имело место наличие систематических ошибок азимутальных определений на пунктах Лапласа.

**Вторая программа уравнивания** была разработана с учетом опыта первого уравнивания. 87 первоклассных полигонов, из которых только 11 полигонов образовывали узкую цепь от Красноярска до Хабаровска, уравнивались также полигональным методом, как и в первой программе, толь-

ко первый этап разделили на три, чтобы избавиться от больших невязок азимутальных условий.

**На первом этапе** производилось уравнивание звеньев за условия фигур, полюсов и базисов, в результате получали предварительно уравненные углы.

**На втором этапе** составлялись азимутальные уравнения по каждому звену по предварительно уравненным на первом этапе углам, совместно решались все азимутальные условия с нахождением поправок в астрономические азимуты и долготы на пунктах Лапласа.

**На третьем этапе** производилось вторичное уравнивание звеньев триангуляции по непосредственно измеренным направлениям за условия фигур, полюсов, базисов и азимутов. Здесь при составлении азимутальных условий астрономические долготы и азимуты исправляются поправками, вычисленными на втором этапе. В результате вычисляют длину и азимут геодезической линии для каждого звена триангуляции первого класса.

**На четвертом этапе** производят уравнивание полигонов и окончательное вычисление координат их вершин.

**На пятом этапе** производят вставку звеньев между вычисленными координатами их вершин, исходными азимутами Лапласа и базисными сторонами (уравнивание звена за все возникающие в нем условия: фигур, полюсов, базисов, азимутов и координат).

### **14.3. Современное уравнивание астрономо-геодезической сети 1 – 2 классов**

По мере заполнения полигонов первого класса сплошными сетями второго класса возникла проблема их уравнивания. На первоначальном этапе сети второго класса уравнивались как опирающиеся на исходные пункты первого класса. В отдельном полигоне насчитывалось более 500 определяемых пунктов второго класса, при уравнивании приходилось решать системы с 1000 и более нормальных уравнений. Здесь применялся многогрупповой метод уравнивания И.Ю. Пранис-Праневича, идея которого была предложена еще Ф. Гельмертом. Суть этого метода состоит в том, что преобразованные нормальные уравнения при последовательном исключении неизвестных в алгоритме Гаусса эквивалентны исходным, и при соответствующем разделении на группы их можно решать отдельно. При этом не нарушается строгость решения задачи уравнивания и к уравнительным вычислениям можно привлекать параллельно столько вычислителей, сколько образовано групп уравнений.

В процессе уравнивания обнаружилось, что поправки в измеренные величины на пунктах второго класса распределялись не случайно, а по вполне определенным закономерностям. В середине полигона поправки соответствовали точности измерений и носили случайный характер, а по мере приближения к исходным пунктам первого класса они возрастали и достигали величин, существенно превышающих возможные ошибки измерений. Это говорило о том, что пункты первого класса по точности не могут служить исходными для сети второго класса. Действительно, средние квадратические ошибки измерения углов в триангуляции 1 и 2 класса соответственно равны  $0,7''$  и  $1,0''$ , что практически одно и то же, но сплошные сети второго класса гораздо более жесткие по сравнению с полигонами первого класса. Это подтверждалось и тем, что при уравнивании сетей второго класса как свободных, поправки из уравнивания получали случайные значения, соответствующие точности измерений.

Для устранения такого противоречия необходимо было производить совместное уравнивание сети из пунктов 1 – 2 классов как сплошной с соответствующими весами измерений. Это впервые было обосновано профессором К.Л. Проворовым.

Но буквально до 80-х годов XX столетия в геодезических вычислениях оставалась проблема объема вычислений из-за отсутствия соответствующей вычислительной техники. Поэтому предлагались различные варианты упрощенных методов решения задачи. Один из них основан на усовершенствовании первого этапа полигонального метода путем усиления первоклассных звеньев смежными треугольниками второго класса и их совместное уравнивание (сдвоенных, строенных и т. д. рядов треугольников). Обсуждался метод, предложенный венгерским геодезистом Регеци. Суть метода состоит в замене сплошной сети треугольников триангуляции треугольниками, образованными из замыкающих первоклассных звеньев и диагоналей полигонов, уравнивании такой сети глобальных треугольников, результатом которого являются уравненные координаты пунктов, являющихся вершинами этих треугольников. Эти предложения не были реализованы в полной мере на практике по следующим причинам: во-первых, из-за большого объема вычислений; во-вторых, из-за существенных отступлений от требований метода наименьших квадратов; в-третьих, не было отдано предпочтение какому-либо одному методу. Вместе с тем, следует отметить результаты практической апробации полигонального уравнивания с усилением первоклассных звеньев треугольниками второго класса, приведенные в таблице 14.1. Здесь были обработаны к 1964 году 402 полигона с 978 звеньями, включающими 40 000 пунктов. Полигоны включали 2 434 азимута Лапласа и 1 600 базисов.

Таблица 14.1

Тип построения	Средняя длина звена (км)	Средняя невязка треугольника (″)	СКО угла по невязкам (″)	СКО из уравнивания		
				Угла (″)	Азимута (″)	Относительная ошибка стороны
Ряды 1 кл	207	0.80	0.58	0.64	0.60	1:296000
Ряды 1 кл, усиленные треугольн. 2 класса	217	0.86	0.62	0.71	0.61	1:364000
Ряды из центральных систем	186	1.09	0.82	1.05	0.70	1:325000

Результаты сравнения координат пунктов АГС СССР, уравненных по второй программе Красовского в 40-е годы и с усилением первоклассных звеньев треугольниками 2 класса в 60-е годы, показали расхождения до 20 метров на Востоке страны. Это можно объяснить систематическими ошибками редуцирования по методу развертывания, применяемого в 40-е годы, ошибкой в исходном азимуте в Пулково, ошибками долготных определений, слабой геометрической жесткостью рядов 1 класса. Однако более детальный анализ изменения координат по всей территории страны показал неравномерность распределения этих разностей и их привязку к геологическим разломам и сейсмически активным районам. Следовательно, наиболее вероятной причиной и наиболее значимой составляющей изменения координат могут быть геодинамические явления.

Первым опытом уравнивания АГС 1 – 2 классов, как сплошной сети, было уравнивание астрономо-геодезической сети стран Варшавского договора (ЕАГС), расположенной на территории СССР западнее первоклассного ряда Пулково – Николаев, далее на территории Польши, Болгарии, Восточной Германии, Венгрии, Чехословакии, Румынии (частично). Всего в данной сети насчитывалось 11 737 пунктов. Работы выполнялись в 1973 – 1983 гг. Было два предложения по методам решения нормальных уравнений при строгом уравнивании: польского ученого Банахевича и сопряженных градиентов. Апробация этих методов проводилась на опытной сети, состоящей из 865 пунктов. Были получены идентичные результаты, и для уравнивания всей сети был избран метод сопряженных градиентов с исходным пунктом в Пулково. В уравнивание был включен полигометрический траверс Пулково – София – Потсдам – Пулково. Уравнивание ЕАГС выполнялось на большой ЭВМ ЕС-1033 в АГП № 7 (г. Москва).

По материалам уравнивания были получены характеристики *ЕАГС*, приведенные в таблице 14.2.

Таблица 14.2

Показатели ЕАГС	Страны					
	ВНР	ГДР	НРБ	ПНР	СССР	ЧССР
Число пунктов	139	125	416	1830	8960	128
СКО измеренного направления (″)	0.41	0.41	0.76	0.47	0.70	0.36
Максимальная поправка в угол (″)	1.36	1.65	3.26	3.37	4.38	1.44
СКО азимута (″)	0.82	0.82	0.61	1.00	1.17	0.82
СКО линии (относительная)	1:427000	1:427000	1:342000	1:470000	1:300000	1:427000

Ошибка взаимного положения между смежными пунктами этой сети на территории СССР составляла порядка 4 – 5 см. Здесь впервые было обнаружено, что исходный азимут для АГС СССР Саблино – Бугры, определенный в 1926 году, имеет ошибку порядка 4″ – 5″, что являлось недопустимо грубой величиной и получило подтверждение из повторных высокоточных астрономических определений этого азимута в 1981 г.

Имея такой опыт уравнивания, а также с появлением быстродействующих ЭВМ, способных оперативно обрабатывать, хранить и выдавать большие объемы информации, а также с разработкой и апробацией современных методов математической обработки больших геодезических построений стало возможным решить задачу совместного уравнивания всей АГС СССР 1 – 2 классов как сплошной сети. При решении этой задачи использовались также базисы большой протяженности, полученные методами космической геодезии. Здесь уравниванию подлежали порядка 164 000 пунктов 1 – 2 классов, объединенных в 277 первоклассных полигонов. Интересно привести данные по структуре АГС СССР: 1 класс (ряды, объединенные в полигоны) – 4.0 %, 2 класс – 45.3 %, 3 класс (вставки) – 49.0 %, 4 класс (вставки) – 1.7 %. Средние квадратические ошибки измерений углов, вычисленные по невязкам треугольников (формула Ферреро), составили: 1 класс – 0.55″, 2 класс – 0.83″, 3 класс – 1.1″.

При таком огромном объеме исходной информации были решены организационные вопросы. Вся АГС СССР была разбита на отдельные блоки (порядка 20), информацию по которым готовили соответствующие аэрогеодезические предприятия (АГП) по единой методике, разработанной инженером Г.Н. Ефимовым в Московском АГП № 7. Информация передавалась в вычислительный центр этого предприятия, где она анализировалась, проверялась и, наконец, производились уравнивательные вычисления.

Больше всего времени потребовалось на процессы сбора и представления исходной информации от различных АГП в едином формате и по единой форме.

К концу 90-х годов XX столетия уравнивание АГС СССР было завершено. Полученные результаты показали, что АГС СССР по своим размерам, точности построения не имеет мировых аналогов. Это объясняется тем, что при разработке схемы и программы ее построения использован лучший мировой и отечественный опыт. Решение редуционной проблемы выполнено строгим методом проектирования, для чего комплексно использовались результаты геодезических, астрономических, гравиметрических и спутниковых измерений с учетом их точности и взаимосвязи.

Представляют интерес характеристики АГС СССР, покрывающей всю территорию страны, которую уравнивали.

Всего пунктов сети – 164 306, из них 340 пунктов полигонометрии, 280 пунктов трилатерации, 162 пункта из наблюдений спутниковой системой «Транзит». 12 425 пунктов рядов триангуляции 1 класса, 3 584 азимута Лапласа, 7 882 базиса. Общее число треугольников в рядах 1 класса составило 18 034, в заполняющей сети 2 класса – 113 676.

Уравнивание выполнено параметрическим способом по измеренным направлениям на поверхности земного эллипсоида с параметрами Красовского и исходными геодезическими датами в Пулково. При редуцировании измерений по методу проектирования использовались астрономо-гравиметрические уклонения отвеса и аномалии высот. Вычислительный комплекс состоял из 10 основных и 5 сервисных программ, разработанных под руководством Г.Н. Ефимова в АГП № 7 для ЭВМ ЕС-1061. Уравнивание производилось на ЭВМ Хабаровского АГП.

Основные характеристики АГС по материалам уравнивания следующие:

- число избыточных измерений 591 466 (52 %);
- СКО единицы веса 1.061;
- СКО направления в рядах 1 класса 0.52<sup>''</sup>;
- СКО направления в сети 2 класса 0.75<sup>''</sup>;
- СКО азимута 1.27<sup>''</sup>;
- СКО (относительная) стороны ряда 1: 377 000;
- СКО (относительная) стороны сети 1: 246 000;
- СК поправка в азимут 1.36<sup>''</sup>;
- СК поправка в длину стороны 1: 269 000;
- Средняя длина стороны 12.5 км;
- СКО взаимного положения смежных пунктов в среднем 5 см, в рядах 7 см.

В результате уравнивания получили однородную по точности сеть пунктов АГС, закрепляющих на всей территории систему геодезических координат СК-95. От Пулково до Берингова пролива координаты переданы со средними квадратическими ошибками по оси абсцисс – 1.02 м, а по оси ординат – 1.10 м. Эти данные подтверждены спутниковыми определениями.

Высокие качественные показатели АГС СССР, построенной за сравнительно короткий срок в сложных физико-географических и климатических условиях на огромной территории, не имеют мировых аналогов и отражают высокий профессионализм советских астрономо-геодезистов, выполнявших полевые измерения.

### ***Вопросы для самоконтроля по разделу 14***

1. В чем отличие уравнивания астрономо-геодезических полигонов 1 класса?
2. Смысл полигонального уравнивания.
3. Пути совершенствования полигонального уравнивания в СССР.
4. Особенности современной программы уравнивания обширных астрономо-геодезических сетей.
5. Основные качественные показатели астрономо-геодезической сети СССР.
6. Что закрепляет на территории государства систему геодезических координат?
7. Что является основой системы координат СК-42?
8. Что является основой системы координат СК-95?

## **15. МЕТОДЫ УСТАНОВЛЕНИЯ СВЯЗИ СИСТЕМ КООРДИНАТ**

### **15.1. Референционные системы координат СК-2 и СК-5**

Как известно, референционные системы координат отнесены к поверхности референц-эллипсоида, параметры которого, как правило, совпадают с общеземным эллипсоидом, а ориентировка в теле Земли произведена установлением соответствующих исходных геодезических дат на одном из пунктов государственной геодезической основы. Референционные системы координат вводят для упрощения решения редуccionной проблемы высшей геодезии. Ориентирование поверхности референц-эллипсоида производится соответствующим параллельным переносом его оси вращения и плоскости экватора.

В Советском Союзе с 1946 года Постановлением Правительства введена референсная система геодезических координат *СК-42*. В качестве координатной поверхности в этой системе служит поверхность эллипсоида Красовского, параметры которого выведены по методу площадей в ЦНИИГАиК (г. Москва) из обработки градусных измерений, накопленных к этому времени во всем мире. Заслуга Ф.Н. Красовского заключается в том, что он осуществлял общее руководство работами, определял методы решения задачи, сделал обоснованный анализ качества градусных измерений, выполненных в различных странах и в разное время. По представлению коллектива ЦНИИГАиК эллипсоиду было присвоено имя Красовского (после его смерти).

Исходные геодезические даты установлены для главного астрономо-геодезического пункта в Пулковской астрономической обсерватории по результатам обработки по методу площадей градусных измерений, выполненных только на территории Советского Союза. Исходные астрономические широта, долгота и азимут определены из многолетних астрономических определений с учетом данных службы широты и долготы на эпоху 1942 г. Как уже отмечалось ранее, в исходном азимуте была допущена грубая ошибка порядка 4 – 5 угловых секунд, что было обнаружено при уравнивании АГС значительно позже. Однако это не привело к существенным проблемам, так как при обработке градусных измерений участвовало значительное число азимутов на концах звеньев 1 класса.

От исходных геодезических дат в Пулково необходимо было распространить и закрепить систему координат *СК-42* на всей огромной территории страны. Эту задачу решали центры геодезических пунктов 87 полигонов АГС 1 класса после их полигонального уравнивания по второй программе Красовского. Недостатком государственной геодезической основы, закрепляющей *СК-42*, являлось то, что на значительной части территории страны (от Иркутска до Хабаровска) измерения только начались и полигоны триангуляции 1 класса образовывали узкую цепочку, вытянутую с запада на восток. Это, конечно, являлось слабым местом *СК-42*.

По мере накопления результатов измерений росло число перво-классных полигонов, все более равномерно покрывающих всю территорию страны. Параллельно наращивались объемы измерений в сплошных сетях триангуляции 2 класса, заполняющих полигоны 1 класса. При этом наращивалось число геодезических пунктов, закрепляющих *СК-42* на земной поверхности. Эта задача решалась последовательным уравниванием и согласованием новых измерений с ранее уравненными координатами. Для уменьшения объемов вычислений вся АГС СССР в 1969 году была разбита на перекрывающие друг друга блоки, каждый из которых уравнивался от-

дельно. Всего выделили пять блоков: «Урал» – от западных границ страны до меридиана вблизи Тюмени; «Западная Сибирь»; «Сибирь»; «Восточная Сибирь»; «Восток» – включая остров Сахалин. После уравнивания по перекрывающимся блокам получили пять различных систем пунктов, несущих координаты в системе *СК-42*. Здесь имели место как разворот, так и разномасштабность, приведенные в таблице 15.1.

Эти данные показывают различные по значимости величины несогласованности блоков между собой. По сути дела это говорит о том, что в результате на территории страны получили пять различных систем координат. В связи с этим возникла необходимость совместного уравнивания *АГС СССР* на всей территории страны, чтобы иметь единую систему координат.

Таблица 15.1

Вид деформаций	Блоки			
	Урал – Зап. Сибирь	Зап. Сибирь – Сибирь	Сибирь – Вост. Сибирь	Вост. Сибирь – Восток
Разворот	+0.10 <sup>''</sup>	-0.09 <sup>''</sup>	-0.50 <sup>''</sup>	+0.27 <sup>''</sup>
Разномасштабность	+1:690 000	-1:1 190 000	-1:600 000	-1:72 200 000

В результате тщательного анализа накопленного опыта и результатов различных методов уравнивания было принято решение о совместном уравнивании *АГС 1 – 2* классов как сплошной сети. В результате этого получили сеть из 164 306 пунктов, являющихся исходными в системе координат *СК-95*. В этой системе координаты на всей территории страны от Пулково до Берингова пролива переданы со средними квадратическими ошибками: по оси  $X$  – 1,02 м, а по оси  $Y$  – 1,10 м.

## 15.2. Общеземные системы координат *ПЗ-90* и *WGS-84*

С развитием методов решения геодезических задач на основе систем спутникового позиционирования стало возможным создать сеть опорных геодезических пунктов, закрепляющей на земной поверхности общеземную систему геодезических координат. Классическими методами триангуляции, полигонометрии и трилатерации эта задача не может быть решена достаточно точно потому, что все измеренные величины редуцируются на поверхность референц-эллипсоида. Системы спутникового позиционирования работают в геоцентрической системе координат, центром которой является центр масс Земли.

Общеземная система координат «Параметры Земли 1990 года» (*ПЗ-90*) получена по результатам наблюдений геодезических спутников *ГЕОИК*, включая доплеровские, дальномерные радиотехнические и лазерные измерения высот спутника над поверхностью моря и фотографирование космического аппарата на фоне звездного неба. При выводе *ПЗ-90* использовались также радиотехнические и лазерные измерения дальностей до спутников *ГЛОНАСС* и *ЭТАЛОН*, гравиметрические данные на суше и Мировом океане.

Спутники *ГЕОИК* оснащены радиовысотомерами, доплеровскими передатчиками, уголковыми отражателями, радиодальномерной системой и системой импульсной световой сигнализации, обеспечивающими определение высот *ИСЗ* над уровнем моря с точностью 0.5 – 1.0 м, их радиальной скорости с точностью 1 см/с, дальности – 0.1 – 1.0 м, направления на спутник – 1.5 ″. Эти спутники запускались на близкруговую орбиту с высотой над поверхностью Земли около 1 500 км и наклоном 74° и 83°.

В системах координат *ПЗ-90* (*WGS-84*) приняты следующие фундаментальные геодезические постоянные:

- большая полуось эллипсоида  $a = 6\,378\,136\text{ м}$  (6 378 137м);
- полярное сжатие  $\alpha = 1 : 298.257\,839$  (1:298.257 224);
- геоцентрическая гравитационная постоянная (с учетом атмосферы)  $fM = 398\,600.44 * 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$ ;
- угловая скорость вращения Земли  $\omega = 7\,292\,115 * 10^{-11} \text{ рад/с}$ .

Общеземная система координат *ПЗ-90* является Российским аналогом общеземной системы координат *WGS-84*, базирующейся на спутниковой системе *NAVSTAR* (США). Эти две системы в пределах точности их определения имеют одни и те же параметры и рекомендованы к практическому использованию в международной навигации.

На земной поверхности система *ПЗ-90* закреплена 33-мя постоянными пунктами космической геодезической сети (*КГС*), в основном, расположенными на территории бывшего Советского Союза, из них 7 пунктов расположены в Антарктиде. Средние квадратические ошибки положения системы координат относительно центра масс Земли составляют 1 – 2 м, взаимное положение пунктов постоянной геодезической сети, закрепляющих на земной поверхности *ПЗ-90*, составляет около 0.3 м при среднем расстоянии между ними 1.5 – 2.0 тыс. км, что в относительной мере составляет менее единицы 7-го знака.

Все пункты *КГС* на территории России определены также в референционной системе координат *СК-42*. Численные значения элементов ориентирования координат *СК-42* относительно *ПЗ-90* соответственно составляют:

– координаты центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли:

$$dX_0 = + 25 \text{ м}; dY_0 = - 141 \text{ м}; dZ_0 = - 80 \text{ м};$$

– развороты осей координат:  $W_x = 0.00''$ ,  $W_y = - 0.35''$ ,  $W_z = - 0.66''$ ;

– масштабный коэффициент:  $dm = (0.00 \pm 0.25) \cdot 10^{-6}$ .

### 15.3. Параметры связи систем координат

Как видно из вышеизложенного, для установления связи двух пространственных систем координат необходимо знать семь параметров связи: координаты центра одной системы относительно другой:  $dX_0, dY_0, dZ_0$ ; развороты осей координат:  $W_x, W_y, W_z$ ; масштабный коэффициент  $dm$ . Мы будем полагать, что на земной поверхности имеются **связующие пункты**, центры которых получили координаты в обеих системах. Классические методы получения референчных координат рассмотрены нами ранее. Методы получения координат на основе спутниковых технологий рассматриваются в дисциплине «Космическая геодезия».

Для каждой связующей точки, имеющей координаты в двух системах, можно записать три уравнения с семью неизвестными

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{II} \\ Y_{II} \\ Z_{II} \end{bmatrix} = f(dX_0, dY_0, dZ_0, m, W_x, W_y, W_z). \quad (15.1)$$

Для однозначного решения задачи необходимо иметь три связующие точки, при большем их числе задача определения параметров связи решается по методу наименьших квадратов разностей, характеризующих рассогласование координат после их трансформирования.

Перевычисление координат из системы I в систему II производится по формуле

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{II} = (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & +W_z & -W_y \\ -W_z & 1 & +W_x \\ +W_y & -W_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_I + \begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix}. \quad (15.2)$$

Обратное преобразование производится по формуле

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_I = (1 - m) \begin{pmatrix} 1 & -W_z & +W_y \\ +W_z & 1 & -W_x \\ -W_y & +W_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{II} - \begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix}. \quad (15.3)$$

Здесь угловые элементы трансформирования выражены в радианной мере.

При необходимости преобразования геодезических широт, долгот и высот из одной системы в другую используются формулы связи пространственных прямоугольных координат с геодезическими, которые мы рассмотрели раньше.

Приведем в табл. 15.2 численные значения параметров связи различных систем координат с системой *ПЗ-90*.

Таблица 15.2

Система координат	Наименование параметров						
	$dX_0$	$dY_0$	$dZ_0$	$W_x$	$W_y$	$W_z$	$dm$
<i>СК-42</i>	25	-141	-80	0.00	-0.35	-0.66	$(0.00 \pm 0.25)10^{-6}$
<i>СК-95</i>	25.90	-30.94	-81.76	-	-	-	-
<i>WGS-84</i>	-1.08	-0.27	-0.90	0	0	-0.16	$(-0.12 \pm 0.06)10^{-6}$

Высота поверхности физической модели Земли – геоида относительно поверхности общего земного эллипсоида в системе координат *ПЗ-90* определена с погрешностью, меньшей 1,5 м для всей поверхности Земли, а на акваториях Мирового океана  $-0,7 - 1,0$  м. Максимальная высота геоида составляет +85,8 м в точке с географическими координатами  $4^{\circ}$  ю. ш.,  $139^{\circ}$  в. д., минимальная высота  $-104,8$  м в точке  $5^{\circ}$  с. ш.,  $80^{\circ}$  в. д. Высота геоида на Северном полюсе +16,0 м, на Южном  $-28,9$  м.

По мере накопления материалов спутниковых измерений и их обработки появляются возможности уточнения параметров различных систем координат.

### ***Вопросы для самоконтроля по разделу 15***

1. Современные общеземные и референчные системы координат.
2. Параметры связи систем координат.
3. Обосновать необходимое число параметров связи систем координат.
4. Пояснить смысл преобразования систем пространственных прямоугольных координат.
5. Пояснить смысл преобразования систем геодезических координат.
6. Современные методы установления общеземных систем координат, а также для отдельного государства.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Завершающие разделы курса «Высшая геодезия», изложенные в настоящем учебном пособии, раскрывают теоретические основы и методологию решения различных геодезических задач. Здесь показана связь высшей геодезии с другими науками, а также пути формирования государственных баз геодезических данных на основе астрономических, геодезических и гравиметрических методов измерений.

Следует понимать, что пути и методы решения основных задач высшей геодезии формировались как по мере накопления результатов измерений, выполненных на физической поверхности Земли, так и на основе развития науки и техники, обеспечивающих определенный уровень приборостроения и средств вычислений.

Учебный график изучения дисциплины учитывает знания и навыки студентов, полученные при изучении других дисциплин учебного плана подготовки инженеров-геодезистов. Изложенный материал и содержание лабораторных работ в разном объеме достаточны для студентов специальности «Геодезия» и всех специализаций, предусмотренных государственным образовательным стандартом.

Курс лекций изложен с использованием учебных и научных изданий, опубликованных к настоящему времени, включая материалы по современным методам геодезических измерений и их математической обработки.

Учебно-методический комплекс будет полезен как студентам, так и магистрантам и аспирантам, занимающимся проблемами формирования баз картографо-геодезических данных в современных условиях.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

### Длина дуги меридиана и параллели. Размеры рамок трапеций топографических карт

Для выполнения лабораторной работы № 1 необходимо изучить «Введение» и разделы 1-4 лекционного курса.

#### Длина дуги меридиана и параллели

Для вычислений длины дуги меридиана земного эллипсоида, принятого в системах координат WGS-84 или ПЗ-90, применяют формулу (4.29), в которой коэффициенты вычисляют по параметрам соответствующего эллипсоида.

Для упрощения вычислений на определенном эллипсоиде можно использовать известные значения коэффициентов, например, для эллипсоида Красовского, принятого в качестве координатной поверхности в системе координат СК-42, можно использовать рабочую формулу, приведенную к виду, удобному для вычислений:

$$X = 6367558.4969B - \sin B \cos B \left[ 32005.7801 + (133.9213 + 0.7032 \sin^2 B) \sin^2 B \right],$$

где широта  $B$  берется в радианной мере, при этом ошибка вычисления длины дуги меридиана от экватора до точки с широтой  $B$  не более 0.0001 м. Если необходимо вычислить длину дуги меридиана  $\Delta X = X_2 - X_1$ , заключенной между двумя точками с широтами, соответственно  $B_2$  и  $B_1$ , то ее получают как разность длин дуг меридианов от экватора до этих точек. По формуле (4.29) сразу вычисляется эта разность, для вычисления длины дуги меридиана от экватора следует принять  $B_1 = 0$ .

При выполнении работы полезно вычисления произвести двумя способами для контроля.

На практике часто возникает необходимость вычисления малой длины меридиана, а в этом случае можно считать его радиус постоянным и равным радиусу меридиана, вычисленному по средней широте его дуги

$$B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2); \quad \Delta X = M_m \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} = \frac{c}{V_m^3} \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''}.$$

Если длина меридиана не превышает 45 км, то ошибка вычислений по этой формуле не более 0.001 м.

Параллель является окружностью радиуса  $r$ :

$$r = N \cos B = \frac{c}{V} \cos B,$$

длина ее вычисляется по строгой формуле

$$\Delta Y = \frac{c}{V} \cos B \frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''}.$$

Учитывая то, что в вычислительных средствах, как правило, имеется значение  $\pi$ , удобнее использовать формулы перехода:

– если необходимо перейти из градусной меры в радианную,

$B = B^0 \pi / 180^0$ , где  $B$  выражено в долях градусов;

– для обратного перехода

$B^0 = B 180^0 / \pi$ .

**Задание 1:** Вычислить длины дуг меридианов от экватора до заданных широт двух точек, а также длины дуг меридиана и параллели между двумя точками с заданными координатами:

$$B_1 = 53^0 35' 22.352'' + 2\kappa' 0.125\kappa'';$$

$$B_2 = 58^0 30' 12.135'' + 2\kappa' 0.125\kappa'';$$

$$L_1 = 26^0 35' 32.135'' + 2\kappa' 0.125\kappa'';$$

$$L_2 = 29^0 30' 51.415'' + 2\kappa' 0.125\kappa'';$$

Параллель находится на широте  $B = 51^0 45' 35'' + \kappa^0$ ,

$\kappa$  – номер варианта, заданный преподавателем.

### Размеры рамок трапеций топографических карт

Рамки трапеций топографических карт различных масштабов являются изображениями на плоскости меридианов и параллелей эллипсоида. В основе разграфки всего номенклатурного ряда лежит трапеция карты масштаба 1:1 000 000, ограниченная меридианами с разностью долгот в  $6^0$  и параллелями с разностью широт в  $4^0$ . Номера меридианных зон обозначаются арабскими цифрами от 1 до  $\pm 30$ , счет ведется от Гринвича, а широтные пояса обозначаются буквами латинского алфавита, счет ведется от экватора. На топографических картах указываются номера колонн, полученных как номер зоны плюс 30 (для того, чтобы избежать отрицательных номеров зон в западном полушарии). Зная номер зоны или колонны и название пояса, довольно просто найти геодезические широты и долготы вершин рамок трапеций.

Пусть, например, дана трапеция топографической карты масштаба 1:100 000 с номенклатурой N-35-100. Здесь номер зоны будет  $35 - 30 = 5$  (восточная), а номер пояса 14 (порядковый номер буквы  $N$  в латинском алфавите). Следовательно, трапеция масштаба 1:1 000 000 будет ограничена параллелями с широтой  $52^\circ$  и  $56^\circ$  и меридианами с долготой  $24^\circ$  и  $30^\circ$ .

Указанная трапеция масштаба 1:100 000 будет ограничена меридианами с долготой  $25^\circ 30'$  и  $26^\circ$  и параллелями с широтой  $31^\circ$  и  $31^\circ 20'$ .

Формулы для вычислений длин рамок трапеций

$$\left. \begin{aligned} S_{(cm)} &= \frac{c_{(m)}}{V_m^3} \frac{(B_2 - B_1)^\circ}{180^\circ} \frac{100}{m} \pi \\ S_{1(cm)} &= \frac{c_{(m)}}{V_1} \frac{(L_2 - L_1)^\circ}{180^\circ} \cos B_1 \frac{100}{m} \pi \\ S_{2(cm)} &= \frac{c_{(m)}}{V_2} \frac{(L_2 - L_1)^\circ}{180^\circ} \cos B_2 \frac{100}{m} \pi \end{aligned} \right\}$$

где  $m$  – знаменатель масштаба карты.

Для обеспечения необходимой точности вычислений размеров рамок (0.1 мм) достаточно ограничиться четырьмя значащими цифрами для всего масштабного ряда топографических карт.

**Задание 2:** Определить номенклатуру и вычислить размеры рамок трапеций топографических карт масштабов 1 : 1 000 000 и 1 : 100 000, в которые попадает точка с координатами:  $B = 53^\circ 15' + \kappa^0$ ;  $L = 25^\circ 12' + \kappa'$ .

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

### Решение геодезических треугольников

Для выполнения лабораторной работы № 2 необходимо изучить раздел 5 лекционного курса.

Основным видом геодезических построений являются триангуляция и трилатерация, в треугольниках которых измерены либо углы, либо длины сторон. После редуцирования на поверхности эллипсоида получаем сфероидический треугольник, длины сторон которого не превышают 60 км (на территории Беларуси, не более 20 км). В пределах необходимой точности вычисления поверхность эллипсоида можно заменить сферой радиусом, равным среднему радиусу кривизны поверхности эллипсоида для средней широты  $B_0$  геодезического построения.

$$R_0 = \sqrt{M_0 N_0} = \frac{c}{1 + e'^2 \cos^2 B_0}.$$

Следовательно, треугольники в пределах такой области можно решать как сферические по формулам сферической тригонометрии. Как известно, здесь длины сторон выражаются в частях радиуса, что для практики неудобно, поэтому в геодезии малые сферические треугольники (длины сторон которых не превосходят 90 км) решают по формулам плоской тригонометрии с введением поправок в сферические углы (способ Лежандра) либо в длины сторон (способ аддитаментов).

### Способ Лежандра

Основан на теореме Лежандра, согласно которой в сферическом и плоском треугольнике с соответственно равными длинами сторон каждый угол сферического треугольника больше соответствующего угла плоского треугольника на одну треть сферического избытка. Сферический избыток любой фигуры определяется формулой

$$\varepsilon'' = \frac{P}{R^2} \rho'',$$

где  $P$  – площадь фигуры;  $R$  – радиус сферы.

Площадь треугольника может быть вычислена по одной из формул

$$2P = ab \sin C = bc \sin A = ac \sin B; \quad P = a^2 \frac{\sin B \sin C}{2 \sin A};$$

$$P = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)},$$

где  $a, b, c$  – длины сторон треугольника,  $A, B, C$  – его углы, лежащие против соответствующих сторон (против стороны  $a$  лежит угол  $A$  и т. д.),

$S = \frac{1}{2}(a+b+c)$  – полупериметр треугольника.

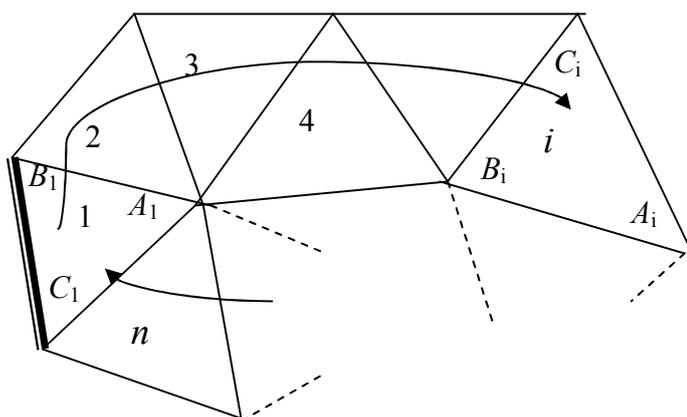
Заметим, что для максимально возможных в триангуляции I класса длин сторон в 60 км имеем сферический избыток не более 8.5'', что является малой величиной и его вычисления можно выполнять с четырьмя значащими цифрами. Формула для его вычисления может быть записана в виде

$$\varepsilon'' = 2 \cdot f \cdot P,$$

где величина  $f = \frac{\rho''}{2R^2}$  может быть принята для территории Республики

Беларусь постоянной и равной  $f = 2.530 \cdot 10^{-9}$  (если длины сторон выражать в метрах).

По способу Лежандра можно решать любое число треугольников, для чего вначале необходимо на схеме сети определить последовательность их решения, в соответствии с которой пронумеровать треугольники. При этом удобнее через  $A_i$  обозначать угол, лежащий против исходной (или вычисленной из предыдущего треугольника) стороны, а угол  $C_i$  – против стороны, смежной с последующим решаемым треугольником.



Решение треугольников ведется последовательно (от номера 1 до  $n$ ) по единой схеме. В триангуляции вычисления ведутся следующим образом.

1. По теореме синусов плоской тригонометрии выполняют приближенное решение треугольника, с контролем вычисляют длины сторон  $b_i, c_i$ .

$$b_i = a_i \frac{\sin B_i}{\sin A_i}; \quad c_i = a_i \frac{\sin C_i}{\sin A_i} = b_i \frac{\sin C_i}{\sin B_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Для этой цели достаточно углы треугольника округлять до целых минут, вычисления вести с четырьмя значащими цифрами.

2. Вычисляются сферические избытки треугольников по формуле

$$\varepsilon'' = fa_i b_i \sin C_i.$$

3. Для каждого треугольника вычисляется одна треть сферического избытка и вычитается из измеренных углов треугольников, в результате получают измеренные плоские углы. В триангуляции 1-2 классов вычисления ведут с округлением до  $0.01''$ .

4. Вычисляются невязки в треугольнике и вычитается одна треть их из каждого угла, получают уравненные плоские углы.

5. По исходной стороне и уравненным плоским углам последовательно решают с контролем по теореме синусов треугольник, в результате чего получают искомые длины сторон. Значения длин сторон округляют до  $0.001$  м, с той же точностью должны совпасть контрольные вычисления стороны  $c_i$ .

6. Приступают к решению следующего треугольника по той же схеме, при этом производят замену обозначений смежной стороны  $c_i = a_{i+1}$ .

При решении треугольников трилатерации следует иметь в виду, что в каждом треугольнике измерены длины сторон, необходимо вычислить сфероидические углы. Подготовительные действия выполняют аналогично триангуляции. Последовательность решения треугольников определяется также:

1) по теореме косинусов плоской тригонометрии вычисляют все три угла треугольника:

$$\left. \begin{aligned} \cos A'_i &= \frac{b_i^2 + c_i^2 - a_i^2}{2b_i c_i} \\ \cos B'_i &= \frac{a_i^2 + c_i^2 - b_i^2}{2a_i c_i} \\ \cos C'_i &= \frac{a_i^2 + b_i^2 - c_i^2}{2a_i b_i} \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

2) вычисляют сферические избытки треугольников;

3) сферические углы треугольников получают путем добавления к плоским углам  $A', B', C'$  одной трети сферического избытка.

Результаты вычислений необходимо оформить в виде таблицы.

Вершина тр-ка	Измеренные углы тр-ка	Уравненные сферические углы тр-ка	Уравненные плоские углы	Sin уравненных плоских углов	Длины сторон
$C_i$	82°37'42.67"	82°37'42.40"	82°37'41.58"	0.99173447	42837.260
$A_i$	60 02 17.42	60 02 17.15	60 02 16.33	0.86635570	37421.614
$B_i$	37 20 03.18	37 20 02.91	37 20 02.09	0.60645914	26195.568
$\Sigma$	180 0003.27	180 00 02.46	180 00 00.00		
$\varepsilon''$	+2.46				
$w''$	+0.81				

### Способ аддитантов

Как известно, способ основан на теореме синусов сферической тригонометрии, в которой тригонометрические функции малых аргументов представляют в виде ряда с удержанием двух членов разложений. В результате получают теорему синусов плоской тригонометрии

$$\frac{a'}{\sin A} = \frac{b'}{\sin B} = \frac{c'}{\sin C} ,$$

где  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  – приведенные длины сторон треугольника, вычисляемые по формулам

$$\left. \begin{aligned} a' &= a - ka^3 = a - Aa \\ ba &= b - kb^3 = b - Ab \\ c' &= c - kc^3 = c - Ac \end{aligned} \right\}.$$

Величина  $k = \frac{1}{6R_c^2} = 4.09 \cdot 10^{-15}$  для всей территории Беларуси, если длины

сторон брать в метрах;  $A_a$ ,  $A_b$ ,  $A_c$  – аддитаменты сторон.

Порядок решения треугольников триангуляции:

1. Вычисляется аддитамент исходной стороны и вычитается из ее длины, получается приведенная длина исходной стороны.

$$A_{S_0} = kS_0^3, \quad S_0' = S_0 - A_{S_0}.$$

2. По приведенной длине исходной стороны из решения треугольников по теореме синусов плоской тригонометрии последовательно вычисляются приведенные длины сторон треугольников (с контролем). Углы в треугольниках берут сферические уравненные (из способа Лежандра)

$$c_i' = a_i' \frac{\sin C_i}{\sin A_i}, \quad b_i' = a_i' \frac{\sin B_i}{\sin A_i} = c_i' \frac{\sin B_i}{\sin C_i}.$$

3. Вычисляются аддитаменты по приведенным длинам сторон и путем сложения с ними получают точные значения сторон треугольника

$$S_i = S_i' + A_{S_i}.$$

При большом числе треугольников триангуляции или трилатерации их решение производится последовательно. В триангуляции, как известно, может быть измеренной или вычисленной длина одной стороны, соединяющая исходные пункты. Вначале решается треугольник, включивший исходную сторону, а затем решаются другие треугольники, смежные с уже решенным. В трилатерации решение треугольников может производиться в любой последовательности.

При вычислении аддитаментов предварительные значения длин сторон достаточно вычислять с округлением до десятков метров. Результаты вычислений необходимо оформить в виде таблицы.

В практике геодезических вычислений решение треугольников производят с контролем, применяя для этой цели оба способа. Расхождение в длинах сторон не должно превышать 0.001 м, а в углах – 0.01" в сетях 1-2 классов.

### Задание на выполнение работы

Решить три треугольника звена триангуляции 1 класса по способу Лежандра и способу аддитаментов.

Исходные данные для выполнения лабораторных работ № 2 – 4.

Названия углов треугольников	Измеренные углы	$B, L$ – широта, долгота пункта $A$ $A$ – азимут выходной стороны $AB$ $S$ – длина выходной стороны $AB$
$C_1$	$67^{\circ} 56' 33.41''$	$B = 53^{\circ} 06' 59.8567'' + \kappa' \kappa''$ $L = 24^{\circ} 15' 23.2078 + \kappa' \kappa''$ $A = 42^{\circ} 42' 10.513 + \kappa^{\circ} \kappa' \kappa''$ $S = (23\ 580.591 + 1.211\kappa)$ м $\kappa$ – номер варианта
$A_1$	$56\ 38\ 20.76$	
$B_1$	$55\ 25\ 07.20$	
$C_2$	$59\ 49\ 38.18$	
$A_2$	$39\ 02\ 33.10$	
$B_2$	$81\ 07\ 48.64$	
$C_3$	$57\ 13\ 27.94$	
$A_3$	$59\ 20\ 17.84$	
$B_3$	$63\ 26\ 16.97$	

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

#### Решение главной геодезической задачи на поверхности земного эллипсоида

Для выполнения лабораторной работы № 3 необходимо изучить раздел 6 лекционного курса.

Как отмечено, положение точек на поверхности земного эллипсоида определяется широтами и долготами, декартовыми прямоугольными координатами в геодезической проекции. После редуцирования измеренных линий на поверхности эллипсоида получают геодезические линии (кратчайшие кривые на поверхности, соединяющие две любые точки). Длина геодезической линии  $S_{12}$  и угол, образованный ею с меридианом точки, называемый геодезическим азимутом  $A_{12}$ , называются полярными сфероидическими координатами.

Главная геодезическая задача связывает системы координат и включает в себя прямую задачу, когда по данным широте, долготе одной точки, расстоянию и азимуту до другой точки необходимо определить широту и долготу другой точки и обратный азимут. В обратной задаче по данным широтам и долготам двух точек требуется определить длину, прямой и обратный азимуты геодезической линии между ними.

Заметим, что для обеспечения необходимой точности при решении геодезических задач широты и долготы вычисляются с округлением до  $0.0001''$ , геодезические азимуты до  $0.001''$ , а в каталогах помещают их зна-

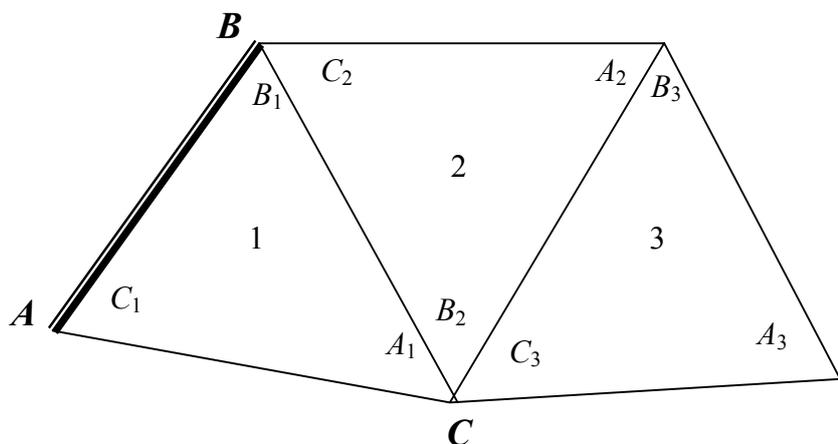
чения, округленные до  $0.001''$  и  $0.01''$  соответственно, расстояния вычисляют до  $0.001$  м.

При использовании спутниковых систем позиционирования получают пространственные прямоугольные координаты точек, по которым можно вычислить геодезические широты, долготы и высоты по формулам раздела 3. 2 лекционного курса. Здесь актуальным является решение обратной геодезической задачи, когда расстояния между смежными пунктами могут быть от 20 до 20 000 км. Поэтому применяют способ Бесселя. Формулы для решения главной геодезической задачи по способу Бесселя приведены в разделах 6.7 – 6.8 лекционного курса.

При выполнении данной работы главная геодезическая задача решается в триангуляции 1 класса, поэтому используем формулы со средними аргументами, приведенные в разделах 6.4 – 6.6 лекционного курса.

### Задание на выполнение работы

По исходным данным, приведенным в задании на выполнение лабораторной работы № 2, составляем схему геодезической сети.



**Прямую геодезическую задачу** решаем, используя сферические уравненные углы и длины сторон сферических треугольников из работы № 2. Для решения используем формулы (6.18) по методике, описанной в разделе 6.5 лекционного курса. Точность вычисления широт и долгот не ниже  $0.0002''$ , азимутов –  $0.001''$ .

В процессе решения задачи следует обратить внимание на передачу геодезических азимутов, используя сферические уравненные углы треугольников:

$$A_{AC} = A_{AB} + C_1; \quad A_{BC} = A_{BA} - B_1; \quad A_1 = A_{CB} - A_{CA}.$$

Прямую геодезическую задачу необходимо решить по всем трем треугольникам.

**Обратную геодезическую задачу** решаем, используя формулы, приведенные в разделе 6.6 лекционного курса. Решение производится для всех пунктов сети, геодезические широты и долготы которых определены при решении прямой задачи. Для контроля необходимо сравнить полученные значения азимутов и расстояний из решения обратной задачи с исходными данными и результатами вычислений при решении прямой задачи. Сходимость результатов должна быть не хуже  $0.0002''$  в широтах и долготах,  $0.001''$  – в азимутах и  $0.001$  м – в расстояниях.

#### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4 Решение задач проекции Гаусса – Крюгера

Для выполнения лабораторной работы № 4 необходимо изучить раздел 7 лекционного курса.

Система геодезических координат обладает несомненным достоинством как единая система для поверхности земного эллипсоида, позволяет решать научные и практические задачи при различных удалениях между точками земной поверхности и околоземного пространства. При решении инженерно-геодезических задач, а также при математической обработке измерений, выполненных на ограниченных территориях, целесообразно применение громоздких сфероидических формул. В этих целях наиболее удобной, наглядной и простой является система прямоугольных координат на плоскости геодезической проекции. В настоящее время на территории Республики Беларусь применяют геодезическую проекцию Гаусса – Крюгера.

Изыскать проекцию для обработки геодезических измерений – это значит установить связь плоских прямоугольных координат  $x$ ,  $y$  с геодезическими  $B$ ,  $L$ , а также получить формулы для редуцирования длин геодезических линий, их азимутов и углов между ними на плоскость проекции. Точность формул должна быть на порядок выше точности измерений.

Для инженерно-геодезического обеспечения строительства вводят местные системы координат; осевой меридиан таких зон, как правило, совпадает с серединой объекта, в этом случае размеры зоны невелики и искажениями в них пренебрегают. Это создает удобство при проектировании объектов, при их выносе на местность.

При выполнении лабораторной работы вычисления производим для шестиградусных зон, поэтому формулы, приведенные в разделе 7 лекционного курса, работающие для девятиградусных зон, можно упростить.

## Вычисление плоских прямоугольных координат по геодезическим

При выполнении этого задания можно использовать формулы (7.50) – (7.51), приведенные в курсе лекций, однако, если вычисления вести на поверхности эллипсоида, параметры которого известны, то можно использовать рабочие формулы с заранее вычисленными значениями коэффициентов, например для эллипсоида Красовского имеем рабочую формулу, удобную для вычислений:

$$\left. \begin{aligned} x &= 6367558.497B - (((a_{28}l^2 - a_{26})l^2 + a_{24})l^2 + 0.5)l^2N - a_0) \sin B \cos B \\ y &= (((b_{17}l^2 + b_{15})l^2 + b_{13})l^2 + 1)lN \cos B \end{aligned} \right\},$$

где  $l = L - L_0$  – разность долгот точки и осевого меридиана в радианной мере (зональная долгота точки);  $B, l$  – задаются в радианной мере;

$$N = ((0.605 \sin^2 B + 107.155) \sin^2 B + 21346.142) \sin^2 B + 6378245;$$

$$a_0 = (0.7032 \cos^2 B - 135.3277) \cos^2 B + 32140.4046;$$

$$a_{24} = ((0.0000076 \cos^2 B + 0.0025269) \cos^2 B + 0.25) \cos^2 B - 0.0416667;$$

$$a_{26} = ((0.00562 \cos^2 B + 0.16358) \cos^2 B - 0.08333) \cos^2 B + 0.00139;$$

$$a_{28} = ((0.125 \cos^2 B - 0.104) \cos^2 B + 0.014) \cos^2 B;$$

$$b_{13} = (0.00112309 \cos^2 B + 0.33333333) \cos^2 B - 0.16666667;$$

$$b_{15} = ((0.004043 \cos^2 B + 0.196743) \cos^2 B - 0.166667) \cos^2 B + 0.008333;$$

$$b_{17} = ((0.1429 \cos^2 B - 0.1667) \cos^2 B + 0.0361) \cos^2 B - 0.0002.$$

Для проекции Гаусса – Крюгера значения коэффициентов следующие, обеспечивающие необходимую точность вычислений для шестиградусных зон.

Для шестиградусной координатной зоны координаты  $x, y$  вычисляются по этим формулам с точностью до 0.001 м.

### Редуцирование измеренных величин на плоскость проекции Гаусса – Крюгера

Геодезические измерения (угловые и линейные) после их редуцирования на поверхность эллипсоида дают длины геодезических линий  $S$ , углы между ними  $\beta$ . Для перехода на плоскость проекции вычисляют длины прямоугольных отрезков, соединяющих изображения точек, а также углы между ними.

Для редуцирования расстояний применяется формула

$$d = S_m \left( 1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} \right),$$

а в измеренные направления вычисляются поправки по формулам

$$\left. \begin{aligned} \delta_{12}'' &= -\frac{1}{3} f (x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) \\ \delta_{21}'' &= \frac{1}{3} f (x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) \end{aligned} \right\},$$

где  $f = \frac{\rho''}{2R_m^2}$  – величина, постоянная для всей территории Республики

Беларусь и равна 0.002530, если координаты в формулах (4.8) выражают в километрах;  $R_m = \sqrt{M_m N_m}$  – средний радиус кривизны эллипсоида, вычисленный по средней широте, для территории Республики Беларусь тоже можно считать постоянной величиной и равной  $6.385 \cdot 10^3$  км.

Если необходимо редуцировать углы треугольников сети триангуляции, то поправка в угол получается как разность поправок в направления (правое минус левое). Например, для данной сети имеем

$$\delta_{C_1} = \delta_{AC} - \delta_{AB}.$$

Заметим, что максимальное значение поправок имеет место на краю зоны, и на территории Республики Беларусь для шестиградусной зоны составляет  $\delta_s \leq 11$  м,  $\delta \leq 3''$  для длин сторон не более 20 км.

Поправки в длины линий обусловлены масштабом изображения в проекции, а поправки в горизонтальные направления обусловлены кривизной изображения геодезических линий эллипсоида на плоскость проекции.

Для перехода от геодезического азимута  $A_{12}$  на поверхности эллипсоида к дирекционному углу  $\alpha_{12}$  на плоскости применяется формула

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta'_{12}.$$

Здесь  $\gamma_1$  – сближение меридианов, выражающее угол между изображением меридиана данной точки на плоскость проекции с прямой, параллельной изображению осевого меридиана, вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \gamma = \sin B \operatorname{tg} l + \eta^2 \sin B \cos^2 B \left( 1 + \frac{2}{3} \eta^2 + l^2 \cos^2 B \right) l^3.$$

Для параметров эллипсоида Красовского имеем рабочую формулу

$$\operatorname{tg} \gamma = (((l^2 + 0.045) \cos^2 B + 1) 0.00674 l^3 \cos^4 B + \operatorname{tg} l) \sin B.$$

### Вычисление геодезических координат по плоским

На практике может возникнуть задача обратного перехода, когда известны плоские прямоугольные координаты точек и необходимо вычис-

лить их геодезические широты и долготы. В этом случае используются формулы (7.52) курса лекций. Для эллипсоида Красовского имеем рабочую формулу, удобную для вычислений.

$$B = B_x + (((A_{28}z^2 - A_{26})z^2 + A_{24})z^2 - 1)z^2 A_{22};$$

$$l = (((B_{17}z^2 + B_{15})z^2 + B_{13})z^2 + 1)z; \quad L = L_0 + l,$$

где принято:

$$\beta = x_{(M)} / 6367558.497;$$

$$B_x = ((2382 \cos^2 \beta + 293609) \cos^2 \beta + 50221747) \sin \beta \cos \beta \times 10^{-10} + \beta;$$

$$A_{22} = (0.003369263 \cos^2 B_x + 0.5) \sin B_x \cos B_x;$$

$$A_{24} = ((0.0056154 - 0.0000151 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x + 0.1616128) \cos^2 B_x + 0.25;$$

$$A_{26} = ((0.00389 \cos^2 B_x + 0.04310) \cos^2 B_x - 0.00168) \cos^2 B_x + 0.125;$$

$$A_{28} = ((0.013 \cos^2 B_x + 0.008) \cos^2 B_x - 0.031) \cos^2 B_x + 0.078;$$

$$B_{13} = (0.16666667 - 0.00112309 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x - 0.33333333;$$

$$B_{15} = ((0.008783 - 0.000112 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x - 0.166667) \cos^2 B_x + 0.2;$$

$$B_{17} = (0.1667 - 0.0361 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x - 0.1429;$$

$$N_x = ((0.605 \sin^2 B_x + 107.155) \sin^2 B_x + 21346.142) \sin^2 B_x + 6378245;$$

$$z = y / (N_x \cos B_x).$$

Отметим, что широты и долготы вычисляются по приведенным формулам в радианной мере.

### **Задание на выполнение работы**

Редуцировать на плоскость проекции Гаусса – Крюгера сеть триангуляции, предложенную в предыдущей работе. Для решения этой задачи необходимо:

1. Определить номер шестиградусной координатной зоны, в которую попадает геодезическая сеть, и долготу осевого меридиана.

2. Вычислить плоские прямоугольные координаты всех пунктов.

3. Вычислить геодезические широты и долготы исходных пунктов.

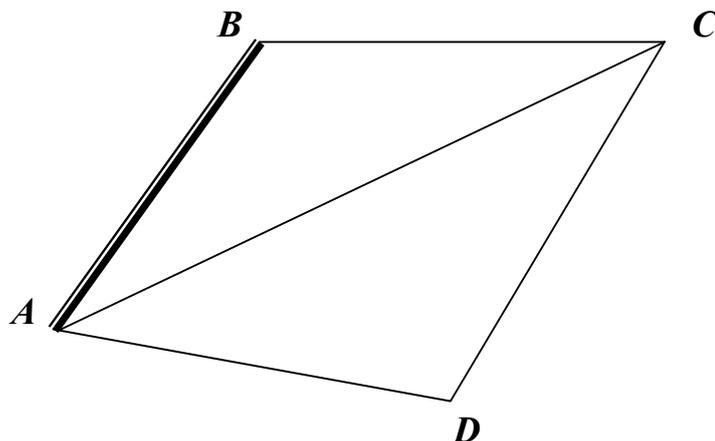
4. Вычислить расстояния, редуцированные на плоскость проекции, между пунктами сети, проконтролировав путем решения обратной геодезической задачи на плоскости.

5. Вычислить поправки в измеренные направления и углы треугольников, проконтролировать их значения по сферическим избыткам треугольников.

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5**  
**Редуцирование измерений в геодезической сети 1 класса**  
**на поверхность эллипсоида**

Для выполнения лабораторной работы № 5 необходимо изучить разделы 8-11 лекционного курса.

Дана геодезическая сеть триангуляции 1 класса.



В сети произведены измерения горизонтальных направлений и зенитных расстояний.

Названия пунктов	Названия направлений	Измеренные зенитные расстояния	Измеренные направления, приведенные к центрам пунктов
<b>A</b>	B	89° 21' 05''	0° 00' 00.00''
	C	89 42 19	84 10 05.95
	D	90 39 21	152 24 46.07
<b>B</b>	C	90 41 13	0° 00' 00.00''
	A	90 38 45	50 25 12.79
	---		
<b>C</b>	D	90 51 33	0° 00' 00.00''
	A	90 39 21	54 13 59.42
	B	89 18 37	99 38 43.02
<b>D</b>	A	89 20 18	0° 00' 00.00''
	C	89 09 21	57 31 19.51
	---		

Также даны астрономические широта, долгота пункта **A**, дальномерное расстояние и азимут направления **AB**, приведены составляющие отклонения отвеса в меридиане и первом вертикале, аномалия высоты.

Астрономические широта, долгота и азимут	Уклонения отвеса, аномалия высоты	Измеренная длина исходной стороны	Нормальные высоты
$\varphi_A = 52^{\circ}25'03.59''$ $\lambda_A = 24^{\circ}12'34.55''$ $\alpha_{AB} = 20^{\circ}15'25.32''$	$\xi = +2.85'' + 0.1'' \kappa$ $\eta = +3.02'' + 0.1'' \kappa$ $\zeta = +1.2\text{м} + 0.1 \kappa_{\text{м}}$	$S_{AB} = 21\,233.242 \text{ м} + \kappa$	$H_A^{\gamma} = 250.2 \text{ м}$ $H_B^{\gamma} = 261.9 \text{ м}$

Астрономические широту, долготу и азимут для варианта  $k$  принять с поправками  $+ \kappa' \kappa''$

Рабочие формулы для редуционных вычислений следующие:

– для вычисления геодезических широты, долготы, высоты и азимута используем формулы, следуемые из (10.5, 10.10) лекционного курса.

$$B = \varphi - \xi'' - 0.171'' H_{(км)} \sin 2\varphi,$$

$$L = \lambda - \eta'' \sec \varphi,$$

$$H = H^y + \zeta,$$

$$A_m = \alpha_m - (\lambda - L) \sin \varphi + \frac{\eta \cos A_m - \xi \sin A_m}{\operatorname{tgz}};$$

– для редуцирования светодальномерного измерения (наклонной дальности) используем формулы (12.9 – 12.10)

$$c = \sqrt{\frac{d^2 - (H_1 - H_2)^2}{\left(1 + \frac{H_1 + H_2}{R_A}\right)}}, \quad S = 2R_A \arcsin \frac{c}{2R_A},$$

где радиус кривизны нормального сечения, проходящего в азимуте  $A$ , вычисляется по рабочей формуле, следуемой из (4.17):

$$R_A = \frac{c_{\text{эллипс.}}}{V(1 - e^2 \sin^2 B \cos^2 A)};$$

– для редуцирования измеренных горизонтальных направлений вводят три поправки: за уклонения отвеса, за высоту наблюдаемой цели и за переход от направления прямого нормального сечения к направлению геодезической линии, для чего используют формулы (12.11, 12.14 и 12.15) лекционного курса

$$\delta_1'' = \frac{\eta'' \cos A - \xi'' \sin A}{\operatorname{tgz}},$$

$$\delta_2'' = \rho'' \frac{H_2}{2M_m} e^2 \sin 2A_{12} \cos^2 B_m,$$

$$\delta_3'' = \rho'' \frac{e^2 S^2}{12N_1^2} \sin 2A_m \cos^2 B_m.$$

### Задание на выполнение работы

1. Произвести расчеты необходимой точности редуционных вычислений, сделать вывод о значимости высот инструментального столика и верха визирного барабана над центрами пунктов (высоты пунктов не превышают 30 м).

2. Вычислить геодезические широту, долготу пункта  $A$ , геодезические азимут и расстояние вдоль стороны  $AB$  треугольника.

3. Вычислить поправки в измеренные направления, составить сводку редуцированных на поверхность эллипсоида направлений.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6 Установление связи систем координат

Для выполнения лабораторной работы №6 необходимо изучить разделы 12-14 лекционного курса.

На территории Республики Беларусь имеется государственная геодезическая сеть триангуляции, координаты пунктов которой определены в референцной системе СК-42, а также производится модернизация этой сети с использованием систем спутникового позиционирования, которые позволяют определять пространственные геоцентрические координаты, отнесенные к общему земному эллипсоиду WGS-84 или ПЗ-90. Параметры связи систем координат приведены в табл. 15.2, связь пространственных прямоугольных координат производится по формулам (15.2 – 15.3) лекционного курса. Если имеются значения пространственных прямоугольных координат в одной системе (например, в WGS-84), можно вычислить пространственные прямоугольные координаты в другой системе, используя соответствующие параметры связи.

В том случае, когда необходимо произвести связь пространственных прямоугольных координат с геодезическими широтами, долготами и высотами, используют уравнения (3.16, 3.17, 3.20 и 3.21).

$$x = (N + H) \cos B \cos L;$$

$$y = (N + H) \cos B \sin L;$$

$$z = [N(1 - e^2) + H] \sin B;$$

$$\operatorname{tg} L = \frac{y}{x};$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( z + \frac{ae^2 \operatorname{tg} B}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 B}} \right);$$

$$H = \frac{z}{\sin B} - N(1 - e^2); \quad H = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos B} - N.$$

При переходе из одной системы координат в другую поправки в геодезические широты, долготы и высоты можно вычислить для каждого пункта по формулам (13.30) лекционного курса.

$$\delta B'' = \frac{\rho''}{(M + H)} (\delta Z \cos B - (\delta X \cos L + \delta Y \sin L) \sin B +$$

$$+ \frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \delta a + \left( \frac{1}{W^2} + 1 \right) N \sin B \cos B \frac{\delta e^2}{2});$$

$$\delta L'' = -\rho'' \frac{(\delta X \sin L - \delta Y \cos L)}{(N + H) \cos B};$$

$$\delta H = \delta Z \sin B + (\delta X \cos L + \delta Y \sin L) \cos B - W \delta a +$$

$$+ \frac{N \sin^2 B}{2} \delta e^2.$$

Параметры земного эллипсоида:

$a = 6\,378\,137$  м,  $\alpha = 1:298.257\,224$  – в системе *WGS-84*;

$a = 6\,378\,136$  м,  $\alpha = 1:298.257\,839$  – в системе *ПЗ-90*;

$a = 6\,378\,245$  м,  $\alpha = 1:298.3$  – в системе *СК-42*.

Если необходимо связать поправки в полярное сжатие и квадрат первого эксцентриситета меридианного эллипса, используют формулы:

$$\delta \alpha = \frac{\delta e^2}{2\sqrt{1-e^2}}; \quad \delta e^2 = 2(1-\alpha)\delta \alpha,$$

которые получают дифференцированием уравнения связи этих параметров, приведенных в разделе 2 лекционного курса.

### Задание на выполнение работы

Имеется сеть триангуляции 1 – 2 классов, референционные геодезические координаты пунктов которой в системе СК-42 приведены в таблице.

Названия пунктов	Широта	Долгота	Высота
А	53° 21' 33.524''	27° 31' 39.352''	190.152м
В	54 33 12.121	28 21 34.523	188.213
С	53 30 35.240	27 41 37.728	199.561
Д	55 12 53.345	29 25 43.521	197.687
Е	56 01 42.781	53 21 33.524	170.364

Широту и долготу для варианта  $k$  принять с поправками  $+k'$   $k''$ , высоту  $+k_m$

Произвести вычисления для пунктов сети:

- 1) пространственных прямоугольных координат в системе *СК-42*;
- 2) пространственных прямоугольных координат в системах *WGS-84* и *ПЗ-90*;
- 3) геодезических широт, долгот и высот в системах *WGS-84* и *ПЗ-90* с контролем.

Произвести анализ полученных результатов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### Основная

1. Закатов, П.С. Курс высшей геодезии / П.С. Закатов. – М.: Недра, 1976. – 512 с.
2. Морозов, В.П. Курс сфероидической геодезии / В.П. Морозов. – М.: Недра, 1979. – 296 с.
3. Подшивалов, В.П. Теоретические основы формирования координатной среды для геоинформационных систем: научное издание / В.П. Подшивалов. – Новополоцк: ПГУ, 1998. – 126 с.
4. Яковлев, Н.Б. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы): учебное пособие для вузов / Н.Б. Яковлев. – М.: Недра, 1982. – 368 с.

### Дополнительная

1. Бугаевский, Л.М. Математическая картография / Л.М. Бугаевский. – М.: Златоуст, 1998. – 400 с.
2. Галазин, В.Ф. Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90): справочный документ / В.Ф. Галазин [и др.]. – М., 1998. – 40 с.
3. Генике, А.А. Глобальные спутниковые системы определения местоположения и их применение в геодезии / А.А. Генике, Г.Г. Побединский. – М.: Картгеоцентр, 2004. – 352 с.
4. Кашин, Л.А. Построение классической астрономо-геодезической сети России и СССР (1816 – 1991 г.г.) / Л.А. Кашин. – М.: Картгеоцентр-Геодезиздат, 1999. – 192 с.
5. Пеллинен, Л.П. Высшая геодезия / Л.П. Пеллинен. – М.: Недра, 1978. – 264 с.
6. Подшивалов, В.П. Формулы для редуцирования измеренного отрезка прямой на поверхность эллипсоида / В.П. Подшивалов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – М., 1984. – № 1. – с. 30 – 37.
7. Урмаев, Н.А. Сфероидическая геодезия / Н.А. Урмаев. – М.: РИО ВТС, 1955. – 250 с.

### **Перечень наглядных и других пособий, методических указаний и методических материалов к техническим средствам обучения**

1. Схема построения государственной геодезической сети СССР.
2. Карта аномалий высот квазигеоида.
3. Методическое пособие по решению задач сфероидической геодезии / сост. В.П. Подшивалов, А.В. Лапина. – Новополоцк: ПГУ, 1993.
4. Комплекс программ для геодезических вычислений на ЭВМ / сост. С.В. Маковский, В.И. Мицкевич. – Новополоцк: ПГУ, 1988. – 2004.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Здесь приводятся основные математические формулы, которые применяются при решении задач высшей геодезии.

### 1. Тригонометрические функции:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x; \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \quad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y};$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}; \quad \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y};$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x};$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}};$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(-\cos 2x + 1); \quad \sin^3 x = \frac{1}{4}(-\sin 3x + 3 \sin x);$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8} \left( \cos 4x - 4 \cos 2x + \frac{6}{2} \right); \quad \sin^5 x = \frac{1}{16} (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x);$$

$$\sin^6 x = \frac{1}{32} \left( -\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x + \frac{20}{2} \right);$$

$$\sin^7 x = \frac{1}{64} (-\sin 7x + 7 \sin 5x - 21 \sin 3x + 35 \sin x);$$

$$\sin^8 x = \frac{1}{128} \left( \cos 8x - 8 \cos 6x + 28 \cos 4x - 56 \cos 2x + \frac{70}{2} \right) \dots$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1);$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x);$$

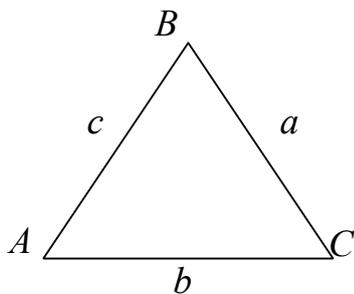
$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos 4x + 4 \cos 2x + \frac{6}{2}\right); \quad \cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x);$$

$$\cos^6 x = \frac{1}{32}\left(\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + \frac{20}{2}\right);$$

$$\cos^7 x = \frac{1}{64}(\cos 7x + 7 \cos 5x + 21 \cos 3x + 35 \cos x);$$

$$\cos^8 x = \frac{1}{128}\left(\cos 8x + 8 \cos 6x + 28 \cos 4x + 56 \cos 2x + \frac{70}{2}\right) \dots$$

## 2. Формулы плоской тригонометрии:



Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C};$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

Площадь треугольника:

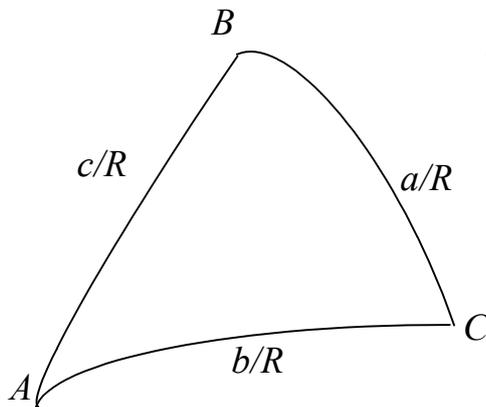
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

где  $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$  – полупериметр треугольника.

## 3. Формулы сферической тригонометрии:

Если обозначить стороны сферического треугольника в частях радиуса сферы, то получаем длины этих сторон на сфере единичного радиуса (сферические расстояния):



$$\alpha = \frac{a}{R}; \quad \beta = \frac{b}{R}; \quad \gamma = \frac{c}{R}.$$

Теорема синусов:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$$

Теорема косинусов:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A; \\ \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha.\end{aligned}$$

Для решения прямоугольного сферического треугольника удобно применять аналогии Непера (если катеты брать как дополнение до  $\pi/2$ , а прямой угол не считать элементом): косинус любого элемента треугольника равен произведению синусов двух несмежных с ним элементов или произведению котангенсов смежных с ним двух элементов. Например, пусть угол  $B$  треугольника равен  $\pi/2$ , тогда получаем:

$$\begin{aligned}\cos C &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \sin A = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{ctg} \beta; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin A \sin \beta = \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} C.\end{aligned}$$

Сумма углов сферического треугольника:  $A + B + C = 180^\circ + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – сферический избыток, вычисляемый по формуле

$$\varepsilon'' = \rho'' S_{\Delta} / R^2.$$

#### 4. Разложение дифференцируемых функций в ряды: Ряд Тейлора

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + f''(x_0)\frac{\Delta x^2}{2} + \dots + f^n(x_0)\frac{\Delta x^n}{n!} + \Delta f.$$

Погрешность вычисления значения функции  $\Delta f$  оценивают с помощью остаточного члена в форме Лагранжа. Если, например, учтено  $n$  степеней разложения, то погрешность

$$\Delta f \leq f^{n+1}(\chi) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где  $\chi$  – значение аргумента из области определения  $x$ , приводящее к максимально возможному значению производной.

Если применить формулу Тейлора для некоторых наиболее часто встречающихся функций, получим:

**Формула Маклорена** ( $x_0 = 0$ ) применяется для вычисления функций малых аргументов

$$f(\Delta x) = f(0) + f'(0)\Delta x + f''(0)\frac{\Delta x^2}{2} + \dots + f^n(0)\frac{\Delta x^n}{n!} + \Delta f$$

**Тригонометрические функции:**

$$\sin(\Delta x) = \Delta x - \frac{\Delta x^3}{3!} + \frac{\Delta x^5}{5!} - \dots;$$

$$\cos(\Delta x) = 1 - \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\Delta x^4}{4!} - \dots;$$

$$\operatorname{tg}(\Delta x) = \Delta x + \frac{\Delta x^3}{3} + \frac{2\Delta x^5}{15} + \frac{17\Delta x^7}{315} + \frac{62\Delta x^9}{2835} + \dots;$$

$$\operatorname{ctg}(\Delta x) = \frac{1}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{3} - \frac{\Delta x^3}{45} - \frac{2\Delta x^5}{945} - \frac{\Delta x^7}{4725} - \frac{\Delta x^9}{467775} - \dots$$

**Биномиальное разложение** ( $n$  – любое, как положительное, так и отрицательное, как целое, так и дробное):

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots + (\pm 1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k + \dots$$

## ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

### ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ЗА СЕДЬМОЙ СЕМЕСТР

1. Основные определения и задачи сфероидической и теоретической геодезии.
2. Параметры земного эллипсоида и связь между ними.
3. Системы координат на меридианном эллипсе и связь между ними.
4. Пространственные координаты.
5. Классификация кривых на поверхности эллипсоида.
6. Координатные линии на поверхности эллипсоида.
7. Главные радиусы кривизны поверхности эллипсоида.
8. Радиус произвольного нормального сечения эллипсоида. Средний радиус кривизны поверхности эллипсоида.
9. Длина дуги меридиана.
10. Длина дуги параллели.
11. Площадь сфероидической трапеции. Размеры рамок трапеций топографических карт.
12. Система дифференциальных уравнений геодезической линии.
13. Уравнение Клеро для геодезической линии.
14. Общие сведения о решении треугольников.
15. Теорема Лежандра.
16. Порядок решения треугольников по теореме Лежандра.
17. Способ аддитаментов и порядок решения треугольников.
18. Общие сведения о решении главной геодезической задачи.
19. О точности вычислений при решении главной геодезической задачи.
20. Разложение разностей широт, долгот и азимутов в ряды с «начальными аргументами».
21. Разложение разностей широт, долгот и азимутов в ряды со «средними аргументами».
22. Порядок решения прямой геодезической задачи по формулам со «средними аргументами».
23. Порядок решения обратной геодезической задачи.
24. Способ Бесселя для решения главной геодезической задачи.
25. О современных требованиях к решению главной геодезической задачи.

## ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ЗА ВОСЬМОЙ СЕМЕСТР

1. Общие сведения из теории конформных отображения поверхностей.
2. Связь полярных координат на поверхности эллипсоида и плоскости.
3. Характеристические уравнения геодезических проекций.
4. Общее алгоритмическое описание геодезических проекций.
5. Поперечно-цилиндрические проекции.
6. Конические проекции.
7. Азимутальные проекции.
8. Выбор значения масштаба в геодезических проекциях.
9. Проекция Гаусса – Крюгера в традиционном изложении.
10. Формулы для вычисления координат в проекции Гаусса – Крюгера.
11. Сближение меридианов в проекции Гаусса – Крюгера.
12. Частный масштаб длин в проекции Гаусса – Крюгера.
13. Кривизна изображения геодезической линии и поправки за нее.
14. Практика применения проекции Гаусса – Крюгера.
15. Современные требования к геодезическим проекциям.
16. Краткая история развития методов изучения фигуры Земли.
17. Сведения о строении Земли.
18. Нормальное и реальное гравитационное поле Земли.
19. Аномалии силы тяжести.
20. Общие сведения об отклонениях отвеса.
21. Астрономо-геодезический вывод отклонений отвеса.
22. Общие сведения о гравиметрическом выводе отклонений отвеса.
23. Астрономо-гравиметрические отклонения отвеса.
24. Топографические и топографо-изостатические отклонения отвеса.
25. Проблема неоднозначности в высокоточной передаче высот на большие расстояния.
26. Геопотенциал и его связь с высотой.
27. Система геопотенциальных высот.
28. Приближенные высоты.
29. Ортометрические высоты.
30. Нормальные высоты.
31. Динамические высоты.
32. Нивелирование квазигеоида.
33. Редукционная проблема. Сущность, пути и методы решения.
34. Уравнение Лапласа для геодезических азимутов.
35. Влияние отклонения отвеса на измеренные зенитные расстояния.

36. Об учете влияний уклонения отвеса при топографических и инженерно-геодезических работах.
37. Редукция базисных измерений.
38. Редуцирование свето- и радиодальномерных расстояний.
39. Редуцирование измеренных горизонтальных направлений.
40. Общие сведения о методах градусных измерений.
41. Уравнения градусных измерений по меридиану.
42. Уравнение градусных измерений по параллели.
43. Уравнения градусных измерений по методу площадей.
44. Исходные геодезические даты и методы их установления.
45. Об уравнивании астрономо-геодезической сети 1 класса.
46. Постановка задачи и пути ее решения.
47. Первая программа полигонального уравнивания сети 1 класса Ф.Н. Красовского.
48. Вторая программа полигонального уравнивания сети 1 класса Ф.Н. Красовского.
49. Точностные характеристики полигонов 1 класса.
50. Современное уравнивание астрономо-геодезической сети 1 – 2 классов.
51. Точностные характеристики сплошной сети 1 класса по материалам современного уравнивания.
52. Современные методы установления связи систем координат. Определение параметров связи.
53. Современные методы установления связи систем координат. Определение поправок в геодезические координаты.
54. Референцные системы координат СК-42 и СК-95.
55. Общеземные системы координат ПЗ-90 и WGS-84.
56. О современных возможностях геодезических и картографических технологий.

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
РАБОЧАЯ ПРОГРАММА .....	5
ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС. СФЕРОИДИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ.....	10
ВВЕДЕНИЕ .....	10
1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЗАДАЧИ СФЕРОИДИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ.....	12
2. ПАРАМЕТРЫ ЗЕМНОГО ЭЛЛИпсоИДА И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ .....	14
3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ .....	16
3.1. Связь координат на меридианном эллипсе .....	17
3.2. Пространственные координаты .....	19
4. ГЕОМЕТРИЯ ЗЕМНОГО ЭЛЛИпсоИДА .....	21
4.1. Классификация кривых на поверхности .....	21
4.2. Координатные линии на поверхности эллипсоида .....	26
4.3. Главные радиусы кривизны поверхности эллипсоида .....	27
4.4. Радиус произвольного нормального сечения эллипсоида. Средний радиус кривизны поверхности эллипсоида .....	28
4.5. Длина дуги меридиана .....	30
4.6. Длина дуги параллели .....	33
4.7. Площадь сфероидической трапеции. Размеры рамок трапеций топографических карт .....	33
4.8. Система дифференциальных уравнений геодезической линии. ....	35
4.9. Уравнение Клеро для геодезической линии .....	36
5. РЕШЕНИЕ СФЕРОИДИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ .....	38
5.1. Общие сведения о решении треугольников .....	38
5.2. Теорема Лежандра .....	39
5.3. Порядок решения треугольников по теореме Лежандра .....	43
5.4. Способ аддитантов и порядок решения треугольников .....	44
6. ГЛАВНАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА .....	46
6.1. Общие сведения о решении главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида .....	46
6.2. О точности вычислений при решении главной геодезической задачи .....	49
6.3. Разложение разностей широт, долгот и азимутов в ряды с начальными аргументами .....	50
6.4. Разложение разностей широт, долгот и азимутов в ряды со средними аргументами..	52
6.5. Порядок решения прямой геодезической задачи по формулам со средними аргументами .....	55
6.6. Порядок решения обратной геодезической задачи .....	56
6.7. Способ Бесселя для решения главной геодезической задачи .....	56
6.8. О современных требованиях к решению главной геодезической задачи .....	60
7. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ .....	63
7.1. Применение плоских координат в геодезии .....	63
7.2. Общие сведения из теории конформного отображения поверхностей .....	65
7.3. Связь полярных координат на поверхности эллипсоида и плоскости .....	67
7.4. Характеристические уравнения геодезических проекций .....	68
7.5. Общее алгоритмическое описание геодезических проекций .....	70
7.6. Характеристические уравнения некоторых геодезических проекций .....	72
7.6.1. Поперечно-цилиндрические проекции .....	72
7.6.2. Конические проекции .....	74
7.6.3. Азимутальные проекции .....	76
7.7. Выбор значения масштаба в геодезических проекциях .....	77

7.8. Проекция Гаусса – Крюгера в традиционном изложении .....	78
7.8.1. Формулы для вычисления координат в проекции Гаусса – Крюгера .....	78
7.8.2. Сближение меридианов в проекции Гаусса – Крюгера .....	80
7.8.3. Частный масштаб длин в проекции Гаусса – Крюгера .....	81
7.8.4. Кривизна изображения геодезической линии и поправки за нее .....	82
7.8.5. Практика применения проекции Гаусса – Крюгера .....	85
7.9. Современные требования к геодезическим проекциям .....	87
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ .....	92
8. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ .....	92
9. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ .....	93
9.1. Общие сведения о потенциале силы тяжести .....	93
9.2. Нормальный и возмущающий потенциал силы тяжести. Аномалии силы тяжести .....	96
10. УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ .....	100
10.1. Общие сведения .....	100
10.2. Астрономо-геодезический вывод уклонений отвеса .....	102
10.3. Уравнение Лапласа для геодезических азимутов .....	105
10.4. Гравиметрические уклонения отвеса .....	106
10.5. Астрономо-гравиметрические уклонения отвеса .....	107
10.6. Топографические и топографо-изостатические уклонения отвеса .....	109
11. СИСТЕМЫ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫСОТ .....	112
11.1. Общие сведения. ....	112
11.2. Приближенные высоты .....	115
11.3. Ортометрические высоты .....	115
11.4. Нормальные высоты .....	116
11.5. Динамические высоты .....	119
11.6. Нивелирование квазигеоида .....	119
12. РЕДУКЦИОННАЯ ПРОБЛЕМА .....	121
12.1. Сущность редуccionной проблемы и пути ее решения .....	121
12.2. Редукция базисных измерений .....	123
12.3. Редукция свето- и радиодальномерных расстояний .....	126
12.4. Редуccionирование горизонтальных направлений .....	128
13. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМ .....	132
13.1. Общие сведения о методах градусных измерений. ....	132
13.2. Уравнения градусных измерений по меридиану .....	135
13.3. Уравнение градусных измерений по параллели. ....	140
13.4. Уравнения градусных измерений по методу площадей. ....	142
13.5. Исходные геодезические даты и методы их установления .....	147
14. УРАВНИВАНИЕ ГОСУДАРСТВЕННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ .....	149
14.1. Постановка задачи и пути ее решения .....	149
14.2. Полигональное уравнивание сети 1 класса .....	151
14.3. Современное уравнивание астрономо-геодезической сети 1 – 2 классов .....	153
15. МЕТОДЫ УСТАНОВЛЕНИЯ СВЯЗИ СИСТЕМ КООРДИНАТ .....	158
15.1. Референцные системы координат СК-42 и СК-95 .....	158
15.2. Общеземные системы координат ПЗ-90 и WGS-84. ....	160
15.3. Параметры связи систем координат .....	162
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	164
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ .....	165
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	182
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ .....	183
ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ .....	187

*Учебное издание*

ПОДШИВАЛОВ Владимир Павлович

**ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ**  
СФЕРОИДИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ  
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Учебно-методический комплекс  
для студентов специальности 1-56 02 01 «Геодезия» и слушателей ИПК  
УО «ПГУ» специальности 1-56 02 71 «Прикладная геодезия  
и геодезическое обеспечение кадастра»

Редактор *А. Э. Цибульская*

Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

---

Подписано в печать 18.05.10. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Ризография. Усл. печ. л. 11,14. Уч.-изд. л.10,03. Тираж 90 экз. Заказ 957 .

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009

ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29