МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ВИЛЬНЮССКОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА им. ГЕДЕМИНАСА

БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (УКРАИНА)

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ г. ЛЕЙРИИ (ПОРТУГАЛИЯ)

АРИЭЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (ИЗРАИЛЬ)

ПЕРМСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОССИЯ)

ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОССИЯ)

АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС: ПРОБЛЕМЫ, ПЕРСПЕКТИВЫ, ИННОВАЦИИ

Электронный сборник статей
международной научной конференции,
посвященной 50-летию Полоцкого государственного университета

(Новополоцк, 5-6 апреля 2018 г.)

Под редакцией
канд. техн. наук, доцента А. А. Бакатовича;
канд. техн. наук, доцента Л. М. Парфеновой

Новополоцк
Полоцкий государственный университет
2018

УДК 72:624/628+69(082)

АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС: ПРОБЛЕМЫ, ПЕРСПЕКТИВЫ, ИННОВАЦИИ [Электронный ресурс] : электронный сборник статей международной научной конференции, посвященной 50-летию Полоцкого государственного университета, Новополоцк, 5–6 апр. 2018 г. / Полоцкий государственный университет ; под ред. А. А. Бакатовича, Л. М. Парфеновой. – Новополоцк, 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

Рассмотрены вопросы архитектуры и градостроительства в современных условиях, прогрессивные методы проведения инженерных изысканий и расчета строительных конструкций. Приведены результаты исследований ресурсо- и энергосберегающих строительных материалов и технологий, энергоресурсосберегающие и природоохранные инновационные решения в инженерных системах зданий и сооружений. Рассмотрены организационные аспекты строительства и управления недвижимостью, проблемы высшего архитектурного и строительного образования.

Для научных и инженерно-технических работников исследовательских, проектных и производственных организаций, а также преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов строительных специальностей учреждений образования.

Сборник включен в Государственный регистр информационного ресурса. Регистрационное свидетельство № 3671815379 от 26.04.2018.

Компьютерный дизайн К. В. Чулковой, В. А. Крупенина.

Технический редактор О. П. Михайлова.

Компьютерная верстка Т. А. Дарьяновой.

211440, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, Беларусь
тел. 8 (0214) 53 53 92, e-mail: a.bakatovich@psu.by; l.parfenova@psu.by

ISBN 978-985-531-608-5

УДК 624.04

К ВОПРОСУ О ЛИНЕАРИЗАЦИИ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ФЕРМ

Л.С. Турищев
Полоцкий государственный университет, Беларусь
email: lst41@mail.ru

Рассматривается вопрос правомерности геометрической линеаризации в задачах упругой устойчивости ферм согласно бифуркационной концепции. Теоретический аспект правомерности такой линеаризации рассматривается согласно положениям математической теории ветвления решений нелинейных уравнений. Количественная оценка учета влияния геометрической линеаризации на величины критических нагрузок проводится на примере фермы Мизеса.
Ключевые слова: линеаризация, упругая устойчивость, докритические деформации, теория ветвления, точки бифуркации, ферма Мизеса.

TO THE QUESTIONOF LINEARIZATION THE STABILITY PROBLEMS OF TRUSSES

L. Turischev
Polotsk State University, Belarus
email: lst41@mail.ru

The question of the validity of geometric linearization in problems of stability of trusses is considered in accordance with the bifurcation concept. The theoretical aspect of the validity of such a linearization is considered according to the provisions of the mathematical branching theory for solutions of nonlinear equations.Quantitative estimation of the influence of geometric linearization on the values of critical loads is carried out using the example of the Mises truss.
Keywords: llinearization, elastic stability, subcritical deformations, branching theory, bifurcation points, Mises truss.

В результате проведенных теоретических и экспериментальных исследований было показано, что в ряде случаев в реальных фермах могут возникать существенные дополнительные напряжения, причиной которых является жесткое соединение стержней в узлах. Тем не менее, в целом исследования подтвердили возможность использования шарнирной расчетной схемы в обычном прочностном расчете. Однако следует учитывать, что в прочностном расчете шарнирная схема используется, как правило, на том этапе нагружения, который достаточно удален от критического состояния фермы.

На необходимость учета жесткого соединения стержней в узлах при исследовании устойчивости ферм было обращено внимание в работах С.Н Никифорова [1], Н.К. Снитко [2], С.И. Вольвича [3], Н.Н. Раевского [4]. На основании этих работ были уточнены результаты исследования местной потери устойчивости в фермах, выполненные согласно шарнирной расчетной схеме.

В указанных выше работах исследование устойчивости ферм с учетом жесткого соединения стержней в узлах осуществлялось в геометрически линейной постановке. При получении уравнений, описывающих смежную форму равновесия фермы, как правило, линеаризуется геометрическая сторона задачи по двум направлениям: не учитываются докритические деформации и перемещения и не учитывается нелинейный характер закритических деформаций и перемещений. Поэтому в качестве исследуемого состояния равновесия фермы принимается начальное, недеформированное безмоментное состояние.

В этом случае отыскание критических нагрузок фермы согласно разветвленческой концепции сводится к хорошо разработанной математической задаче об отыскании характеристических значений системы линейных однородных уравнений

$$\overline{x} = \mu\, B\overline{x}\,, \qquad (1)$$

где μ – числовой параметра нагрузки;

$\overline{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ – решение уравнения, которое зависит от параметра μ;

B – некоторый линейный оператор системы уравнений (1).

Система (1) имеет тривиальное решение при всех значениях параметра μ. Значения параметра, при которых появляются нетривиальные решения и являются характеристическими значениями уравнений (1). Считается, что при этих значениях возникают точки бифуркации форм равновесия фермы, а наименьшее характеристическое значение соответствует её критической нагрузке.

Однако отказ от линеаризации геометрической стороны задачи по двум указанным направлениям качественно изменяет характер исследуемого состояния равновесия фермы и, вследствие этого, математическую суть задачи. В этом случае исследуемым состоянием равновесия фермы является некоторое деформированное состояние, а задача отыскания критических нагрузок фермы сводится к математической задаче об отыскании точек ветвления решений системы нелинейных уравнений

$$F\left(\overline{x}, \mu\right) = 0\,. \qquad (2)$$

Значения параметра μ, при которых решения (1) разветвляются, и являются точками ветвления решений уравнений (2).

В случае отказа от линеаризации геометрической стороны задачи только по первому направлению система уравнений (2) принимает вид

$$\overline{x} = A\left(\overline{x}, \mu\right), \qquad (3)$$

где A– некоторый нелинейный оператор системы уравнений (3).

Система (3) также имеет тривиальное решение при всех значениях параметра μ

$$A\left(\boldsymbol{\theta}, \mu\right) = \boldsymbol{\theta}\,.$$

Значения μ, при котором появляются нетривиальные решения называются точками бифуркации решений уравнений (3).

Понятия точки ветвления решений уравнений (2) и точки бифуркации решений уравнений (3) перекликаются с понятием точки бифуркации форм равновесия фермы. В математической теории ветвления вопрос о допустимости перехода при решении некоторой нелинейной задачи от уравнений (2) к уравнениям (3), а от них к уравнениям (1) до конца не исследован. В строительной механике неявно подразумеваемым обоснованием допустимости таких переходов принято считать малость неучитываемых деформаций и перемещений и практическую приемлемость получаемых результатов.

Первым, кто сделал попытку обосновать правомерность линеаризации задач устойчивости, был Ф.С. Ясинский [5]. Он рассматривал частный случай бифуркационной задачи – задачу о продольном изгибе стержня, и им была сформулирована и доказана соответствующая теорема. Однако известные математики А.Ю. Ишлинский и М.Г. Крейн обратили внимание на неверность ее доказательства, а М.А. Красносельский в [6] доказал, что и сама линеаризация в бифуркационных задачах справедлива не всегда.

Поэтому представляет определенный интерес рассмотрение правомерности линеаризации в задачах устойчивости ферм с жесткими узлами на примере простейших ферменных систем. Примем в качестве такой системы ферму Мизеса с упруго податливым соединением стержней в узле (рис. 1).

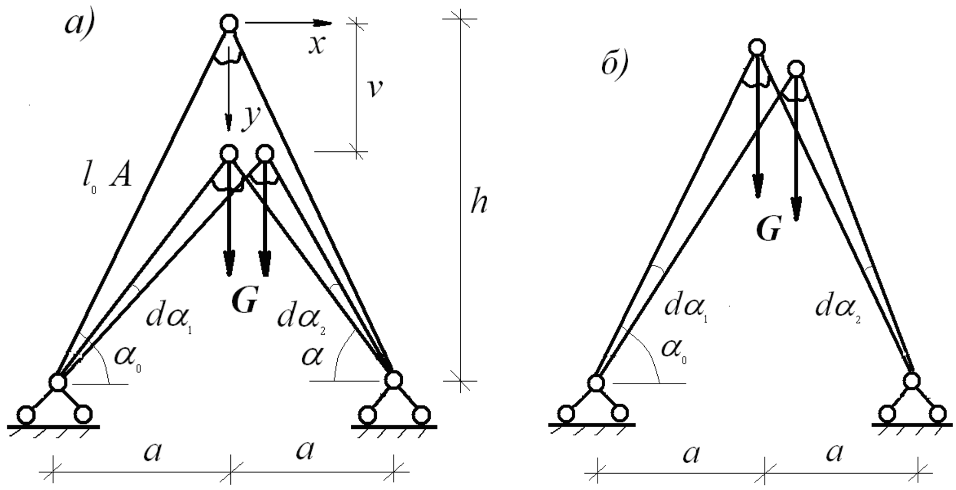

Рисунок 1. – Схемы деформирования фермы Мизеса

Для рассматриваемой фермы при учете докритического обжатия стержней исследуемое деформированное состояние равновесия моментное, так как в узле системы с упруго податливым соединением стержней возникает момент (нелинейная модель) (рис. 1, *а*). При неучете докритического обжатия характер исследуемого состояния равновесия меняется, и оно становится безмоментным (линейная модель) (рис. 1, *б*).

Первоначально исследуем устойчивость рассматриваемой системы с учетом геометрической нелинейности, порождаемой докритическим обжатием стержней (см. рис. 1, *а*). Поскольку в этом случае решаемая задача статически неопределимая, то составим три группы зависимостей:

1. Система уравнений равновесия

$$\begin{aligned}&\sum y=0;\quad N_1'\sin\alpha_1+N_2'\sin\alpha_2+Q_1'\cos\alpha_1+Q_2'\cos\alpha_2-G'=0;\\&\sum x=0;\quad N_1'\cos\alpha_1-N_2'\cos\alpha_2-Q'\sin\alpha_1+Q_2'\sin\alpha_2=0,\end{aligned}\tag{4}$$

где $N_i'=\dfrac{N_i}{EA}$, $Q_i'=\dfrac{Q_i}{EA}$ $(i=1,2)$ – безразмерные внутренние усилия в стержнях в деформированном состоянии системы;

$G'=\dfrac{G}{EA}$ – безразмерный параметр нагрузки.

2. Условия совместности деформаций

$$2a\sin\alpha_2 = l_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2);$$
$$2a\sin\alpha_1 = l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2). \qquad (5)$$

3. Физические зависимости, связывающие внутренние усилия, возникающие в системе, с кинематическими величинами деформированного положения системы. В соответствии с законом Гука продольные силы описываются формулой

$$N_i' = \frac{l_0 - l_i}{l_0}. \qquad (6)$$

Для момента, возникающего в упруго податливом узле системы, примем следующий закон связи с кинематическими величинами α_0, α

$$M = c\sin(\alpha_0 - \alpha). \qquad (7)$$

Здесь c - коэффициент жесткости в упруго податливом узле. Поперечная сила будет связана с кинематическими величинами α_0, α следующим соотношением

$$Q' = \frac{c}{l}\sin(\alpha_0 - \alpha). \qquad (8)$$

Силовые и кинематические величины, описывающие смежное деформированное состояние в критическом состоянии системы, представим в виде

$$\alpha_i = \alpha + (-1)^i \Delta\alpha_i;$$
$$l_i = l - (-1)^i \Delta l_i;$$
$$N_i' = N' + (-1)^i \Delta N_i'; \qquad (9)$$
$$Q_i' = Q' - (-1)^i \Delta Q_i'.$$

Здесь α, l, N', Q' - соответственно, кинематические и силовые величины, характеризующие исследуемое деформированное состояние равновесия системы; $\Delta\alpha_i$, Δl_i, $\Delta N_i'$, $\Delta Q_i'$ - соответственно, дополнительные кинематические и силовые величины, возникающие в смежном деформированном состоянии равновесия системы и характеризующие антисимметричную форму потери устойчивости нелинейной модели системы.

Подставляя (5) - (9) в первое уравнение равновесия системы (4), получим уравнение кривой равновесных состояний, соответствующее симметричной картине деформирования

$$G' = 2\left[\sin\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}\right) + \mu\frac{\cos^2\alpha\sin(\alpha_0 - \alpha)}{\cos\alpha_0}\right], \qquad (10)$$

где $\mu = \frac{c}{l_0 EA}$.

Очертания кривых равновесных состояний при различных сочетаниях параметрах исследуемой системы α_0, μ приведены на рисунке 2

Использованная на графиках переменная величина $\eta = \frac{v}{h}$ связана с величиной α соотношением $\eta = 1 - \frac{tg\alpha}{tg\alpha_0}$.

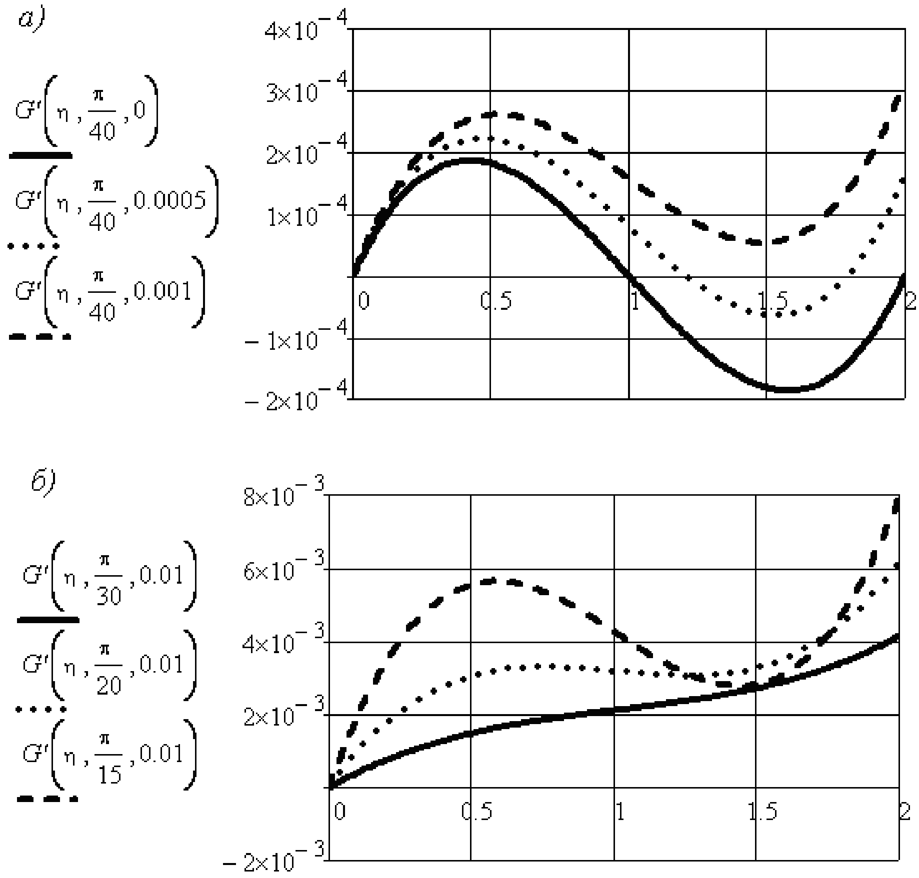

Рисунок 2. – Зависимость очертания кривой равновесных состояний нелинейной модели от параметров α_0, μ

Продифференцировав (10) по α и приравняв нулю производную, получим уравнение, определяющее положение предельных точек системы на кривой равновесных состояний, при достижении которых происходит симметричная форма потери устойчивости

$$\Phi(\alpha,\alpha_0,\mu)=0\,, \tag{11}$$

где $\Phi(\alpha,\alpha_0,\mu)=\cos\alpha_0\left(\cos^3\alpha-\cos\alpha_0\right)-\mu\cos^2\alpha\left[\sin2\alpha\sin(\alpha_0-\alpha)+\cos^2\alpha\cos(\alpha_0-\alpha)\right].$

Графическое нахождение решений уравнения (11) при различных сочетаниях параметров α_0,μ приведено на рисунке 3.

Подставляя (5) - (9) во второе уравнение равновесия (4), получим уравнение, являющееся условием возникновения антисимметричной составляющей процесса деформирования системы и определяющее положение точек бифуркации на кривой равновесных состояний, при достижении которых происходит антисимметричная форма потери устойчивости

$$\Psi\left(\alpha,\alpha_0,\mu\right)=0\,, \tag{12}$$

где $\Psi\left(\alpha,\alpha_0,\mu\right)=\left(\sin^2\alpha\cos\alpha-\cos\alpha_0\right)-\mu\sin^2\cos^3\alpha\left[3+tg\alpha_0(tg\alpha-2ctg\alpha)\right].$

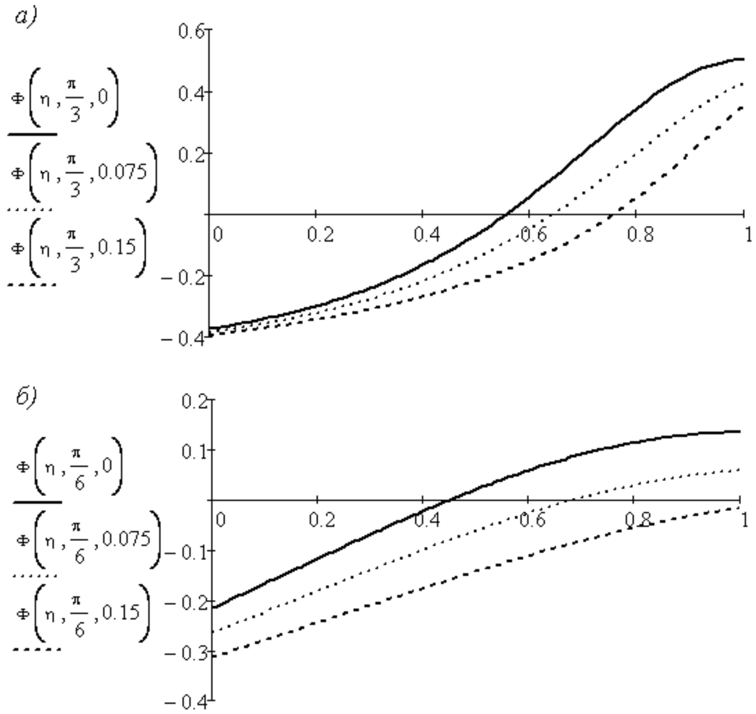

Рисунок 3. – Зависимость решений уравнения, связанного с отысканием предельных точек нелинейной модели, от параметров α_0, μ

Графическое решение уравнения (12) при различных параметрах исследуемой системы α_0, μ приведено на рисунке 4.

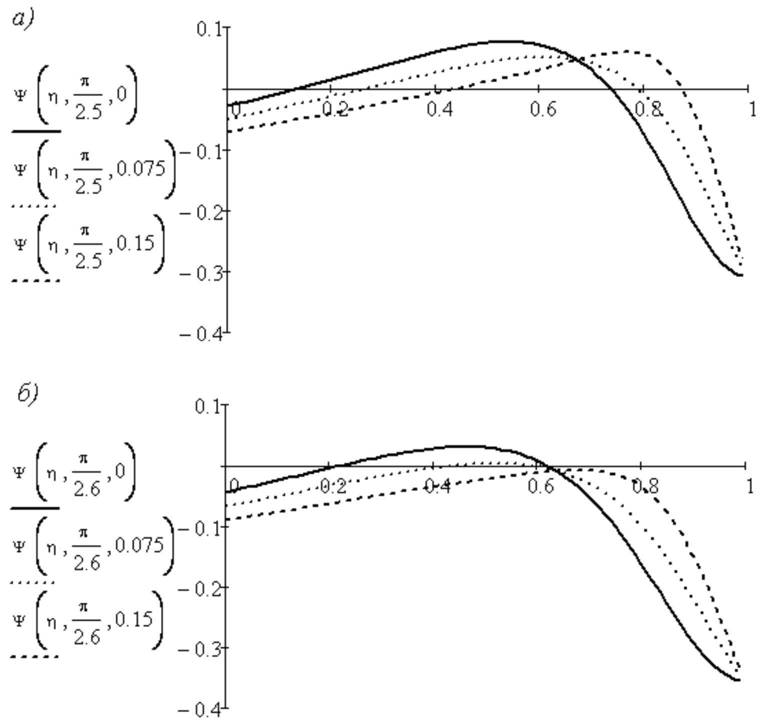

Рисунок 4. – Зависимость решений уравнения, связанного с отысканием точек бифуркации нелинейной модели, от параметров α_0, μ

А теперь исследуем устойчивость фермы Мизеса с упруго податливым соединением стержней в узле без учета докритических продольных деформаций (см. рис. 1, *б*). В этом случае исследуемое состояние равновесия безмоментное и для смежного положения системы справедливы следующие уравнения равновесия

$$\begin{aligned} &\sum y=0; \quad N_1' \sin\alpha_1 + N_2' \sin\alpha_2 + dQ_1' \cos\alpha_1 + dQ_2' \cos\alpha_2 - G' = 0; \\ &\sum x=0; \quad N_1' \cos\alpha_1 - N_2' \cos\alpha_2 - dQ_1' \sin\alpha_1 + dQ_2' \sin\alpha_2 = 0. \end{aligned} \tag{113}$$

Входящие в уравнения (10) кинематические и силовые величины представим в виде

$$\begin{aligned} &\alpha_i = \alpha_0 + (-1)^i d\alpha_i; \\ &l_i = l_0 - (-1)^i dl_i; \\ &N_i' = N_0' + (-1)^i dN_i', \end{aligned} \tag{14}$$

где $N_0' = \dfrac{G'}{2\sin\alpha_0}$ – безразмерная продольная сила в стержнях исследуемого недеформированного состояния равновесия;

$d\alpha_i$, dl_i, dN_i' – соответственно, кинематические и силовые бифуркационные величины.

Входящие в уравнения (14) бифуркационные силовые величины dQ_i связаны с изменениями углов $d\alpha_i$ соотношениями

$$dQ_i' = (-1)^{i+1} \frac{c}{l_0} d\alpha_i . \tag{15}$$

Бифуркационные приращения продольных сил в соответствии с законом Гука описываются соотношениями

$$dN_i' = \frac{dl_i}{l_0} . \tag{16}$$

В свою очередь приращения длин dl_i связаны с изменениями углов $d\alpha_i$ геометрическими соотношениями

$$\begin{aligned} &dl_1 = l_0 \left[d\alpha_1 ctg2\alpha_0 + d\alpha_2 \left(ctg\alpha_0 - ctg2\alpha_0 \right) \right]; \\ &dl_2 = l_0 \left[d\alpha_1 \left(ctg\alpha_0 - ctg2\alpha_0 \right) + d\alpha_2 ctg2\alpha_0 \right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя выражения (14) – (17) в уравнения (13) получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $d\alpha_i$

$$\begin{aligned} &\left[(\mu - N') - 1 \right] d\alpha_1 + \left[(N' - \mu) + 1 \right] d\alpha_2 = 0; \\ &\left[(N' - \mu) - ctg^2\alpha_0 \right] d\alpha_1 + \left[(\mu - N') - ctg^2\alpha_0 \right] d\alpha_2 = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Приравнивая нулю определитель (15) получим квадратное уравнение относительно G'. Решая это уравнение, находим два значения критической нагрузки. Первое значение

$$G_1' = 2\frac{\sin^3\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}\left(1 + \mu\, ctg^2\alpha_0\right), \tag{19}$$

соответствует симметричной форме потери устойчивости ($d\alpha_1 = d\alpha$; $d\alpha_2 = -d\alpha$), т.е. предельной точке линейной модели системы. Второе значение

$$G_2' = 2\frac{\cos^2\alpha_0}{\sin\alpha_0}\left(1 + \mu\, tg^2\alpha_0\right), \tag{20}$$

соответствует антисимметричной форме потери устойчивости ($d\alpha_1 = d\alpha_2 = d\alpha$), т.е. точке бифуркации линейной модели системы.

Графики, характеризующие значения критических нагрузок фермы Мизеса с упруго податливым соединением стержней в узле, приведены на рисунке 5.

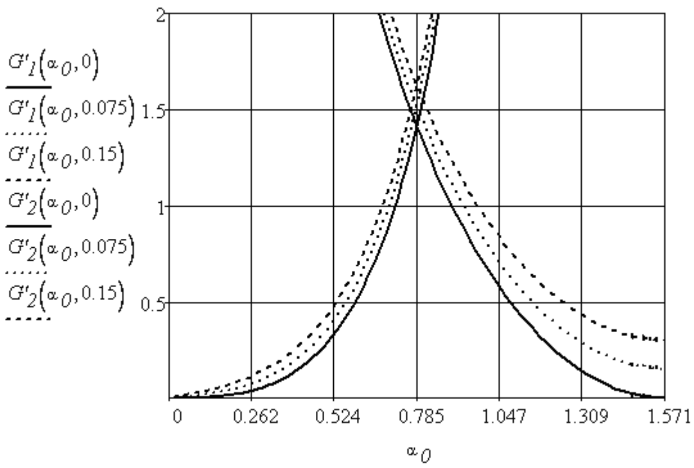

Рисунок 5. – Зависимость величин критических нагрузок линейной модели от параметров α_0, μ

Из сравнения полученных результатов для линейно и нелинейной моделей фермы Мизеса с упруго податливым соединением стержней в узле следует, что неучет докритических деформаций может приводить при определении критических нагрузок к качественно неверным результатам. Так при использовании линейной модели для исследования устойчивости фермы Мизеса симметричные и антисимметричные формы потери устойчивости могут возникать при любых сочетаниях её параметров α_0, μ. Однако проведенное исследование устойчивости той же фермы с использованием нелинейной модели показывает, что такой вывод неверен. При определенных сочетаниях параметров α_0, μ у неё могут отсутствовать как предельные точки (рис. 3, *б*), так и точки бифуркации (рис. 4, *б*).

Таким образом, вопрос о правомерности геометрической линеаризации в задачах упругой устойчивости ферм с жесткими узлами требует дальнейших исследований. Такие исследования должны установить строгие границы применимости не учёта докритических продольных деформаций в инженерных расчётах ферменных конструкций на устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никифоров, С.Н. Устойчивость сжатых стержней сварных ферм/ С.Н. Никифоров. – М. : Госиздат строительной литературы, 1938. – 83 с.

2. Снитко, Н.К. Расчет на прочность и устойчивость ферм с жесткими узлами/ Н.К. Снитко // Расчет на прочность, жесткость и устойчивость : сб. научн. ст. – М. : Машиностроение, 1955. – С. 158–163.

3. Вольвич, С.И. Устойчивость двухраскосных ферм с учетом жесткости узлов/ С.И. Вольвич, П.П. Смольков // Сб. науч. тр. / Саратовский автомобильно-дорожный институт. – Саратов, 1968. – С.87–93.

4. Раевский, Н.Н. Исследование устойчивости ферм с учетом жесткости узлов / Н.Н. Раевский // Сб. науч. тр. / Пензенский инженерно-строительный институт. – Пенза, 1970. – С. 112–116.

5. Ясинский, Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. – Гостехтеориздат, 1934. – 427 с.

6. Красносельский, М.А. К задаче о точках бифуркации / М.А. Красносельский // Доклады Академии Наук СССР. – 1951. – Т. LXXIX, № 3. – С. 389–392.