УДК 514

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНА В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Аннотация: В работе рассматривается свойства функций Гамильтона и Лагранжа в пространствах координатно импульсном и в расслоенном пространстве скоростей. Основным полученным результатом является утверждение – в случае локальной не вырожденности матрицы Гессе от функции Гамильтона по импульсам максимального порядка (матрицы Гессе от функции Лагранжа по скоростям максимального порядка) указанные матрицы Гессе взаимно обратны. Получен ряд вспомогательных результатов, например, о квазилинейной форме временной производной порядка k *от обобщенной координаты по скоростям расслоенного пространства порядка* k *для невырожденной замены координат. Получены интересные тождества в координатно импульсном пространстве* q-p *для частной производной между координатами расслоенного пространства (координата-координата, импульс – импульс). Получены формулы, связывающие частные производные в координатно импульсном пространстве* q-p *для функций Лагранжа и Гамильтона по одним и тем же переменным.*

Ключевые слова: *Функция Гамильтона, вариационная задача, расслоённое пространство скоростей, уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, тензор обобщенного импульса, невырожденный гессиан.*

Введение.

Гамильтон в 1835 году получил новую форму уравнений движения механических систем канонические уравнения Гамильтона. В 1848 году М. В. Остроградский распространил принцип Гамильтона на случай систем с нестационарными голономными связями, после чего распространилось название принцип Гамильтона — Остроградского. Полученная система канонических уравнений содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем у Лагранжа, но зато все они первого порядка, (у Лагранжа — второго). Высоко отозвался о работах Гамильтона по динамике член-корреспондент АН СССР Л. Н. Сретенский, отметивший: «Эти работы легли в основу всего развития аналитической механики в XIX веке». Аналогичное мнение выразил академик РАН В. В. Румянцев: «Оптико-механическая аналогия Гамильтона определила на столетие прогресс аналитической механики». По мнению профессора Л. С. Полака, это была «теория, почти не имеющая аналогов в механике по общности и абстрактности», открывшая колоссальные возможности в механике и смежных науках.

Академик В. И. Арнольд следующим образом охарактеризовал возможности, открывшиеся после появления гамильтоновой механики: Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряда задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.).

Подход Гамильтона оказался высоко эффективным во многих математических моделях физики. На этом плодотворном подходе основан, например, многотомный учебный курс «Теоретическая физика» Ландау и Лифшица. Первоначально вариационный принцип Гамильтона был сформулирован для задач механики, но при некоторых естественных предположениях из него выводятся уравнения Максвелла электромагнитного поля. С появлением теории относительности оказалось, что этот принцип строго выполняется и в релятивистской динамике. Его эвристическая сила существенно помогла разработке квантовой механики, а при создании общей теории относительности Давид Гильберт успешно применил гамильтонов принцип для вывода уравнений гравитационного поля (1915 год).Из сказанного следует, что принцип наименьшего действия Гамильтона(и естественным образом связанная с ним система канонических уравнений) занимает место среди коренных, базовых законов природы — наряду с законом сохранения энергии и законами термодинамики.

Вариационное исчисление является одним из старейших и богатых содержанием и приложениями разделов математического анализа. Вариационные задачи (например, изопериметрические) рассматривались и в древности, но исследовались геометрическими методами. Поэтому началом зарождения вариационного исчисления можно считать работу Ферма 1662 г., в которой аналитическими методами исследована задача о распространении света из одной оптической среды в другую и о преломлении света на границе двух сред. Далее аналогичные (но более общие) вариационные задачи исследовались Ньютоном (задача о наименьшей поверхности вращения - в 1685 г.), Д. Бернулли (задача о брахистохроне) и др.

Теоретико-групповая точка зрения Клейна, изложенная в его «Эрлангенской программе» (1872), то есть: геометрия — учение об инвариантах групп преобразований, в применении к дифференциальной геометрии была развита Картаном, который построил теорию пространств проективной связности и аффинной связности.

Основная задача дифференциальной геометрии состоит в нахождении и описании дифференциальных инвариантов геометрических структур. Необходимым аппаратом здесь является исчисление струй. Это понятие интенсивно использовалось в теории геометрических структур высшего порядка в работах В.В.Вагнера, Г.Ф.Лаптева, Л.Е.Евтушика, М.О.Рахулы, а в последнее время в теории особенностей гладких отображений М.Голубицким, В.Гийеминым и геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений А.М.Виноградовым, В.В.Лычагиным. Представленная работа является продолжением работ авторов [9, 10,13,16,17,18,19,20].

Постановка задачи и основные определения.

Введем обозначения для дифференциально-геометрических структур, используемых в работе: X_m – гладкое многообразие размерности m; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m; $L : T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$.

Функция Гамильтона $H(q, \underline{p}) : \Re^{2mn} \to \Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1 = \overline{1,m}$, $l1 = \overline{1,n}$, $j2 = \overline{1,m}$, $l2 = \overline{1,n}$

$$p = \bar{p} = (p_1^{j1}, p_2^{j1}, ..., p_n^{j1}) = (p_1^1 p_1^2 ... p_1^m, p_2^1 p_2^2 ... p_2^m, ..., p_n^1, ..., p_n^m) = (p_{l1}^{j1}) \qquad j1 = \overline{1,m} \quad l1 = \overline{1,n}$$

$$q = \bar{q} = (q_1^{j2}, q_2^{j2}, ..., q_n^{j2}) = (q_1^1 q_1^2 ... q_1^m, q_2^1 q_2^2 ... q_2^m, ..., q_n^1, ..., q_n^m) = (q_{l2}^{j2}) \qquad j2 = \overline{1,m} \quad l2 = \overline{1,n}$$

$$L(p,q) = -H(p,q) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$$ -функция Лагранжа, двойственная к функции Гамильтона.

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$ где

$L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функция $p_{k,n}^i$ читается как $k-ая$ компонента обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульс порядка k (k-импульс) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Постановка задачи.

Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе: X_m – гладкое многообразие размерности m; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m; $L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$ [9].

Поставим следующую задачу,- какими свойствами обладает *Функция Гамильтона* $H(q,p): \Re^{2mn} \to \Re$ $2mn$ независимых переменных$(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1 = \overline{1,m}$, $l1 = \overline{1,n}$, $j2 = \overline{1,m}$, $l2 = \overline{1,n}$ и функция Лагранжа, двойственная к функции Гамильтона

$L(p,q) = -H(p,q) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$ и какие связи между двумя данными функциями $H(q,p): \Re^{2mn} \to \Re$, $L(p,q)$.

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, здесь $S: (x) \to (\bar{x})$ – гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p \ge \max(s,l)$, $i = \overline{1,m}$, тогда

$$D_t^k x^i(\bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ldots, \overset{(k-1)}{\bar{x}}) \quad k \ge 1 \tag{1}$$

где $f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}})$ - некоторая гладкая функция

$\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}}$, $\overset{(s)}{\bar{x}} = (\overset{(s)1}{\bar{x}},\ldots,\overset{(s)m}{\bar{x}})$, $\overset{(s)j}{\bar{x}} = D_t^s \bar{x}^j$ $s = \overline{0,k-1}$

Доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k=1$

$D_t^1 x^i(\bar{x}) = x^{(1)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(1)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m} \dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \dot{\bar{x}}^j$ проверено. Проверим для k=2

$$D_t^2 x^i(\bar{x}) = x^{(2)i}(\bar{x}) = D_t^1\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(1)j}{\bar{x}}\right) = \sum_{j=1}^{m} D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \dot{\bar{x}}^j + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t^1 \dot{\bar{x}}^j = \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \dot{\bar{x}}^l \dot{\bar{x}}^j +$$

$+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{\bullet\bullet j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{\bullet\bullet j}{\bar{x}} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}}),\quad f(\bar{x},\dot{\bar{x}}) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j}\overset{\bullet l}{\bar{x}}\overset{\bullet j}{\bar{x}}$. *Проверено для* $k=2$ Индуктивный переход.

Пусть $D_t^k x^i(\bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(k)j}{\bar{x}} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}})$. Тогда

$$D_t^{k+1}x^i(\bar{x}) = D_t^1 x^{(k)i}(\bar{x}) = D_t\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(k)j}{\bar{x}} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}})\Big) = \sum_{j=1}^{m}D_t\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(k)j}{\bar{x}}\Big) + D_t\big(f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}})\big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}D_t\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)\overset{(k)j}{\bar{x}} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}D_t\big(\overset{(k)j}{\bar{x}}\big) + D_t\big(f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}})\big) \qquad (2)$$

Поскольку $D_t\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) = \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^l}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)\overset{\bullet l}{\bar{x}} = \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j}\overset{\bullet l}{\bar{x}}$ и $D_t\big(\overset{(k)j}{\bar{x}}\big) = \overset{(k+1)j}{\bar{x}}$, то (2) равно

$$\sum_{j=1}^{m}D_t\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)\overset{(k)j}{\bar{x}} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}D_t\big(\overset{(k)j}{\bar{x}}\big) + D_t\big(f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}})\big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j}\overset{l}{\bar{x}}\Big)\overset{(k)j}{\bar{x}} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(k+1)j}{\bar{x}} + \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}}\overset{(s+1)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(k+1)j}{\bar{x}} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{\bar{x}}),\ 0+1 \le s+1 \le k-1+1 = k \quad (3)$$

В (3) сгруппируем члены : $\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(k+1)j}{\bar{x}} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{\bar{x}})$, $0+1 \le s+1 \le k-1+1 = k$, где

$f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j}\overset{\bullet l}{\bar{x}}\Big)\overset{(k)j}{\bar{x}} + \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}}\overset{(s+1)j}{\bar{x}}$. **Теорема 1** доказана.

Теорема 2. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_m)$ $S:(\bar{x}) \to (x)$, - гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m,\, p \ge \max(s,l)$ $\quad i=\overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \begin{cases} C_k^p \cdot D_t^{k-p}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_k^p = \dfrac{k!}{p!\cdot(k-p)!}, k! = \prod_{j=1}^{k} j, k \ge p \\ 0, k < p \end{cases}$$

Доказательство. При $k<p$ **по Теореме 1** имеем

$$x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{\bar{x}}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{\bar{x}} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}}) \quad k \ge 1 \quad \text{Поэтому}$$

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\Big(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{\bar{x}} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}})\Big) = 0$$

При $k \ge p$ доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k=p$

По **Теореме 1,** имеем $\quad \frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\Big(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{\bar{x}} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}})\Big) =$

$$= (\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial \overset{(k)l}{x}}{\partial \overset{(k)j}{x}}) + \frac{\partial f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \delta_j^l = \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \qquad \delta_j^l = \begin{cases} 1, j = l \\ 0, j \neq l \end{cases} - символ\, Кронекера$$

База индукции доказана. Индуктивный переход. Пусть утверждение теоремы справедливо при $k \geq p$

Введем функции $F_k^i(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{x})$, $\overset{(k+1)i}{x} = D_t(x^{(k)i}) = D_t F_k^i = \sum_{l=1}^{m} \sum_{s=0}^{k} \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}} \overset{(s+1)l}{x}$.

$$\frac{\partial x^{(k+1)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(l)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{x}} (\sum_{l=1}^{m} \sum_{s=0}^{k} \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}} \overset{(s+1)l}{x}) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{s=0}^{k} (\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{x} \partial \overset{(s)l}{x}} \overset{(s+1)l}{x} + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}} \frac{\partial x^{(s+1)l}}{\partial \overset{(p)j}{x}}) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \sum_{s=0}^{k} (\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{x} \partial \overset{(s)l}{x}} \overset{(s+1)l}{x}) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}} \delta_p^{s+1} \delta_j^l = \sum_{l=1}^{m} \sum_{s=0}^{k} (\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x} \partial \overset{(p)j}{x}} \overset{(s+1)l}{x}) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p-1)j}{x}} \qquad (4)$$

По предположению индукции $\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} = \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{x}} = C_k^p D_t^{k-p} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})$. Значит, (4) равно

$$\sum_{l=1}^{m} \sum_{s=0}^{k} (\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x} \partial \overset{(p)j}{x}} \overset{(s+1)l}{x}) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p-1)j}{x}} = C_k^p (\sum_{l=1}^{m} \sum_{s=0}^{k} \frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{x}} (D_t^{k-p} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})) D_t \overset{(s)l}{x}) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) =$$

$$= C_k^p (\sum_{l=1}^{m} \sum_{s=0}^{k-p} \frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{x}} (D_t^{k-p} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-p)}{x})) D_t \overset{(s)l}{x}) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \ . \qquad (5)$$

Так как $C_k^p + C_k^{p-1} = \frac{k!}{p!(k-p)!} + \frac{k!}{(p-1)!(k-(p-1))!} = \frac{k!}{p!(k-p)!}(1 + \frac{p}{k-p+1}) = \frac{(k+1)!}{p!(k-p+1)!} = C_{k+1}^p$ и

(6)

$$D_t^{k-p} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-p)}{x}) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{s=0}^{k-p} \frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{x}} (D_t^{k-p} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-p)}{x})) D_t \overset{(s)l}{x}) \qquad (7)$$

Учитывая (6) и (7) получим выражение для (5):

$$C_k^p (\sum_{l=1}^{m} \sum_{s=0}^{k-p} \frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{x}} (D_t^{k-p} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-p)}{x})) D_t \overset{(s)l}{x}) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) =$$

$$= C_k^p D_t (D_t^{k-p} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) = (C_k^p + C_k^{p-1}) D_t^{k+1-p} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) = C_{k+1}^p D_t^{k+1-p} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \ .$$

Теорема 2 доказана.

Пусть □ - функция $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1}) \quad j1 = \overline{1,m}\ ,\ l1 = \overline{1,n}\ ,\ j2 = \overline{1,m}\ ,\ l2 = \overline{1,n}$:

(нижние индексы меняются от 1 до n , верхние индексы меняются от 1 до m)

$$p = \bar{p} = (p_1^{j1}, p_2^{j1}, ..., p_n^{j1}) = (p_1^1 p_1^2 ... p_1^m, p_2^1 p_2^2 ... p_2^m, ..., p_n^1, ..., p_n^m) = (p_{l1}^{j1}) \qquad j1 = \overline{1,m} \quad l1 = \overline{1,n}$$

$$q = \bar{q} = (q_1^{j2}, q_2^{j2}, ..., q_n^{j2}) = (q_1^1 q_1^2 ... q_1^m, q_2^1 q_2^2 ... q_2^m, ..., q_n^1, ..., q_n^m) = (q_{l2}^{j2}) \qquad j2 = \overline{1,m} \quad l2 = \overline{1,n}$$

Теорема 3. Пусть $s, k = \overline{1,n},\ i, j = \overline{1,m}$. Тогда

$$1) \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = \begin{cases} (1 - \delta_s^1) \delta_j^i \delta_s^{k+1} \ , \ s = 1, k = \overline{1,n}\ ,\ i, j = \overline{1,m} \\ (1 - \delta_s^1) \delta_j^i \delta_s^{k+1} \ , \ 2 \leq s \leq n, k = \overline{1,n}\ ,\ i, j = \overline{1,m} \end{cases} = \delta_j^i \delta_s^{k+1} (1 - \delta_s^1) \ ,\ s, k = \overline{1,n},\ i, j = \overline{1,m} \qquad (8)$$

2) $\dfrac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} = \dfrac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} = 0$, $s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$ (9)

3) $\dfrac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i} = \delta_i^j \delta_s^k$ (10)

$$\text{Где } \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1,\ \alpha=\beta \\ 0\ ,\ \alpha\neq\beta \end{cases} - \textit{символ Кронекера}$$

Доказательство. $1 \le k \le n-1 \Rightarrow 2 \le k+1 \le n$, $1 \le s \le n$ Поэтому при $s=1$

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = 0 = 1-1 = 1-\delta_s^1 = (1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1},\ i,j=\overline{1,m} \text{ где } \delta_s^1 = \begin{cases}1, s=1\\0, s\neq 1\end{cases} = \begin{cases}1, s=1\\0, s\geq 2\end{cases} - \textit{символКронекера}$$

При $s=1$ формула (7) доказана.

где $\delta_j^i = \begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases} - \textit{символ Кронекера}$, где $\delta_s^{k+1} = \begin{cases}1, s=k+1\\0, s\neq k+1\end{cases} - \textit{символКронекера}$

при $2 \le s \le n$ $\quad \dfrac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = \begin{cases}1,\ (i=j)\wedge(s=k+1)\\0,\ (i\neq j)\vee(s\neq k+1)\end{cases} = \delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = \delta_j^i\,\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1)$, $i,j=\overline{1,m}$

или $\dfrac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = \begin{cases}(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\ ,\ s=1, k=\overline{1,n}\ ,\ i,j=\overline{1,m}\\(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\ ,\ 2\le s\le n, k=\overline{1,n}\ ,\ i,j=\overline{1,m}\end{cases} = \delta_j^i\,\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1)$, $s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$

Вторая и третья части теоремы очевидны:

$\dfrac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} = \dfrac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} = 0$, так переменные p , q независимы , $s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$

$\dfrac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i} = \begin{cases}1\ ,(i=j)\wedge(k=s)\\0\ ,(i\neq j)\vee(k\neq s)\end{cases} = \delta_i^j\delta_s^k$ Условие во второй строке, очевидно, является отрицанием условия в первой: $\overline{(i=j)\wedge(k=s)} = \overline{(i=j)}\vee\overline{(k=s)} = (i\neq j)\vee(k\neq s)$

Теорема3 доказана.

Теорема 4. Пусть (q,p) - $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$**.** Тогда

при $s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$ и произвольных $p_k^j \in \Re$ выполнено соотношение:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = (1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = p_{s-1}^i(1-\delta_s^1) \qquad (11)$$

где $\delta_s^1 = \begin{cases}1, s=1\\0, s\neq 1\end{cases} = \begin{cases}1, s=1\\0, s\geq 2\end{cases} - \textit{символКронекера}$

,где $\delta_j^i = \begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases} - \textit{символКронекера}$, где $\delta_s^{k+1} = \begin{cases}1, s=k+1\\0, s\neq k+1\end{cases} - \textit{символКронекера}$

Доказательство. Так как $(1-\delta_s^1)$ не зависит от индексов суммирования k,j , то

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = (1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}$$

При $s=1$ $(1-\delta_s^1)=1-1=0 \Rightarrow (1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=0$ $\quad p_{s-1}^i(1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i\cdot 0 = 0$ и утверждение теоремы выполнено. При $n\ge s\ge 2 \Rightarrow s-1\ge 1$

$\delta_s^1=0$, $1-\delta_s^1=1-0=1 \Rightarrow p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)=p_{s-1}^i$ - правая часть .

$$p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=\begin{cases}p_{k=s-1}^{j=i}=p_{s-1}^i\ ,(j=i)\wedge(k+1=s)\\ 0\qquad ,(j\neq i)\vee(k+1\neq s)\end{cases}\Rightarrow(1-\delta_s^1)\,p_{s-1}^i=(1-0)\,p_{s-1}^i=p_{s-1}^i$$ - левая часть утверждения.

Формула (11) проверена. **Теорема 4 доказана.**

Рассмотрим функцию $L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$

Теорема 5. Пусть $L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$. Тогда имеют место равенства:

$$1.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}\qquad(12)$$

$$2.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^i+\delta_n^s\frac{\partial H}{\partial p_n^i}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}\qquad(13)$$

Где $\delta_\beta^\alpha=\begin{cases}1,\ \alpha=\beta\\ 0\ ,\ \alpha\neq\beta\end{cases}$ – *символ Кронеккера*

Доказательство. $\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})$

По теореме 3: $\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}=\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}=0$, так переменные p , q независимы и выполняются равенства:

$$1)\ \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\begin{cases}(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\ ,\ s=1,k=\overline{1,n}\ ,\ i,j=\overline{1,m}\\ (1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\ ,\ 2\le s\le n,k=\overline{1,n}\ ,\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1)\ ,\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$$

Поэтому

$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})$. Иначе,

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1})+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)p_{s-1}^i+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}$$

По теореме 4: $\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)$ Поэтому:

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}$$

Формула (12) проверена. Первая часть **теоремы 5** доказана.

$$L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}=-H(p,q)+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}.$$

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}).$$

Так как $\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}=\begin{cases}1\ , & (s=k)\wedge(i=j), s,k=\overline{1,n}\ ,\ i,j=\overline{1,m}\\ 0\ , & (s\neq k)\vee(i\neq j),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_i^j\delta_s^k$ и $\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i}=0$, то

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i}\right)+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}\right)=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\delta_i^j\delta_s^k\ \ q_{k+1}^j)+\sum_{j=1}^{m}(\delta_i^j\delta_s^n\ \ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i})=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^j+\delta_s^n\ \ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}$$

Формула (13) проверена**. Теорема 5** доказана.

Теорема 6. Пусть - $f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})$ - локальная запись гладкой функции $f:T^nX_m\to\Re$

В локальных координатах в базе X_m расслоения T^nX_m. Тогда

$$D_t^p f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial\overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p)j}{x}+a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x})\ ,\ p\geq 1$$

Доказательство. Проведем индукцией по p

База индукции $p=1$

$$D_t^1 f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})=D_t f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})=\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}}x^{(k+1)j}.$$

При $s\leq k-1\Rightarrow s+1\leq k$, поэтому $\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}$, $x^{(s+1)j}$ и произведение $\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}$ зависят от производных порядка не выше k, значит и вся сумма:

$a(x,\dot{x},...,\overset{(k+1-1)}{x})=a(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}$ также от производных порядка не выше k.

Значит,

$$D_t^1 f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}}x^{(k+1)j}=a(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}}x^{(k+1)j}.$$

База индукции проверена.

Индуктивный переход. Пусть утверждение верно для p,то есть

$$D_t^p f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial\overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p)j}{x}+a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x})$$

Докажем, что оно верно для $p+1$, то есть имеет место равенство:

$$D_t^{p+1} f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial\overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p+1)j}{x}+\bar{a}(x,\dot{x},...,\overset{(k+p+1-1)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial\overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p+1)j}{x}+\bar{a}(x,\dot{x},...,\overset{(k+p)}{x})$$

По предположению индукции имеем:

$$D_t^{p+1} f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})=D_t(D_t^p f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x}))=D_t\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial\overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p)j}{x}+a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x})\right)=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{m}D_t\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial\overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p)j}{x}+\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial\overset{(k)j}{x}}D_t(\overset{(k+p)j}{x})\right)+D_t\,a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x})=$$

$$=\sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p-1)}{x}) .$$

Максимальный порядок производных в каждом члене суммы

$\sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x}$ равен $\max(k+1,k+p)=k+p$, так как $p \ge 1$. По доказанному

утверждению при $p=1$ максимальный порядок производных в $D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}$ равен $k+1$, а

максимальный порядок производных в $D_t\, a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p-1)}{x}$ равен $k+p-1+1=k+p$

Значит, $\bar{a}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p-1)}{x})$ зависит от производных

порядка не выше $k+p$.

Итак, $\sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p-1)}{x}) =$

$.=\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + \bar{a}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p)}{x})$. **Теорема 6** доказана.

Теорема 7(линейность обобщенного импульса по старшим производным)**.** Пусть $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$ - импульс ранга n для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$.

Пусть $b(n,p,k)=\max(2\min(p,n)-k,p)$, $\max v = 2\min(n,p)-k$, $\min v = \min(n,p)$

$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{b(n,p,k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ $k=\overline{0,\min v-1}$, $i=\overline{1,m}$ -компоненты импульса ранга n .

Тогда

$$p_k^i(n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(\min v)j} \partial x^{(\min v)i}} x^{(\max v)j} + g_i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(\max v-1)}{x}),\ i=\overline{1,m} \qquad (14)$$

Доказательство.

По теореме 6 максимальная степень координат, по t ,которые войдут в многочлен $D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ по степеням производных координат по t при выполнении дифференцирования равна $\max(l+k+l=2l+k)=\max(2l+k)$ при условии, что

$l \le n-k$, $l+k \le p \Leftrightarrow l \le p-k$ $l \le n-k, l \le p-k \Leftrightarrow l \le \min(n-k,p-k) = \min(n,p)-k$

$\max\limits_{l \le \min(n,p)-k}(2l+k) = 2(\min(n,p)-k)+k = 2\min(n,p)-k = \max v$ **.**

Значит, значение координаты с наибольшей степенью производной по t ,которая войдет в выражение $\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ равно

$\max(p, \max\limits_{l \le \min(n,p)-k}(2l+k)) = \max(p, 2\min(n,p)-k)) = b(n,p,k)$

Теорема 7 доказана.

Замечание. Ясно, что $\max = 2\min(n,p)-k \ \ge\ \min = \min(n,p)$ при $k \le \min(n,p)$

и $\max = 2\min(n,p) - k > \min = \min(n,p)$ при $k < \min(n,p) \Leftrightarrow k \le \min(n,p)$

Условие $k \le n$ следует из определению импульса ранга n, а при $k > p$ компоненты импульса $p^i_{k,n}(x, \dot{x}, \ldots, \overset{b(n,p,k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x, \ldots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \equiv 0$ (тривиальны)

Поэтому условие $k \le \min(n,p)$ определяет нетривиальные компоненты импульса ранга n.

Теорема 8. При $p = n$ $p^i_k(n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \overset{(2n-k)j}{x} + g_i(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-k-1)}{x})$, $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{0, n-1}$ (15)

Доказательство. По **теореме 7** $\max = 2\min(n,p) - k = 2\min(n,n) - k = 2n - k$,
$\min = \min(n,p) = \min(n,n) = n$
$b(n, p = n, k) = \max(2\min(p = n, n) - k, p) = \max(2\min(n,n) - k, n) = \max(2n - k, n) = 2n - k$ т. к
$k \le \min(n,p) = \min(n,n) = n$

$p^i_k(n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \overset{(2n-k)j}{x} + g_i(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-k-1)}{x})$, $i = \overline{1,m}$ При $0 \le k \le n-1$ $2n - k \ge n + 1 > n$ и выражение

$p^i_k(n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \overset{(2n-k)j}{x} + g_i(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-k-1)}{x})$, $i = \overline{1,m}$ линейно зависит от старших производных $\overset{(2n-k)j}{x}$

Формула (15) доказана**. Теорема 8** доказана.

Теорема 9. Пусть $\det\left(\frac{\partial^2 L(X^n)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}}\right) \ne 0$ в точке $\pi^{2n-k}_n X^{2n-k}_0 = X^n_0 = (x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \ldots, \overset{(n)}{x_0})$,
$X^{2n-k}_0 = (x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \ldots, \overset{(2n-k)}{x_0})$, $0 \le k \le n-1$, $\pi^{2n-k}_n : T^{2n-k} X_m \to T^n X_m$ - каноническая проекция.
Тогда существует
окрестность $U(X^{2n-k}_0)$ точки X^{2n-k}_0

1) $\det\left(\frac{\partial p^i_k(n)(X^{2n-k})}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 L(X^n)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}}\right) \ne 0$ $X^n = \pi^{2n-k}_n (X^{2n-k})$ (16)

2) $x^{(2n-k)j} = x^{(2n-k)j}(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-k-1)}{x}, p^i_k(n))$ (17)

Доказательство.

$$\frac{\partial p^i_k(n)}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\left(\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \overset{(2n-k)s}{x} + g_i(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-k-1)}{x})\right) = \sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \overset{(2n-k)s}{x}\right) + \frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\left(g_i(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-k-1)}{x})\right)\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}}\right) \overset{(2n-k)s}{x} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)i}} \frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\left(\overset{(2n-k)s}{x}\right) + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\left(g_i(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-k-1)}{x})\right)) =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}}\right) \overset{(2n-k)s}{x} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)i}} \delta^s_j = \frac{\partial^2 L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}},$$

где $\delta^s_j = \begin{cases} 1, & s = j \\ 0, & s \ne j \end{cases}$ $-$ *символ Кронекера* так как при $0 \le k \le n-1 \Rightarrow 2n-k \ge n+1 > n$, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\right) \equiv 0 \Rightarrow \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\right)\overset{(2n-k)s}{x} = 0$$

Поскольку $2n-k \ge 2n-k-1$ при любых целых n,k , следовательно $\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}(g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k-1)}{x})) = 0$. Первое равенство в формуле (16) доказана, первая часть **Теоремы 9** доказана.

Так как по первой части **теоремы 9**

$$\det\left(\frac{\partial p_k^i(n)}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\right)(X_0^{2n-k}) = \det\left(\frac{\partial^2 L(X_0^n)}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 L(\pi_n^{2n-k}(X_0^{2n-k}))}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}}\right) \ne 0$$,то

из гладкости функций $\pi_n^{2n-k} : T^{2n-k}X_m \to T^n X_m$, $L : T^n X_m \to \Re$ и гладкости композиции $L \circ \pi_n^{2n-k} : T^{2n-k}X_m \to \Re$ следует, что существует окрестность $U(X_0^{2n-k})$, точки X_0^{2n-k} , такая что $\det\left(\frac{\partial^2 L(\pi_n^{2n-k}(X^{2n-k}))}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)i}}\right) \ne 0 \ \forall X^{2n-k} \in U(X_0^{2n-k})$, $X^{2n-k} = (x,\dot{x},\ddot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})$

По теореме о неявной функции в окрестности $U(X_0^{2n-k})$ точки X_0^{2n-k}

$$x^{(2n-k)j} = x^{(2n-k)j}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k-1)}{x}, p_k^i(n))$$

Формула (17) и **Теорема 9** доказана.

Замечание. В условии теоремы 8 условие $0 \le k \le n-1$ было существенно, так как при $0 \le k \le n-1 \Rightarrow 2n-k \ge n+1 > n$, следовательно, $\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\right) \equiv 0 \Rightarrow$

$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\right)\overset{(2n-k)s}{x} = 0$ для $k = n$ этого утверждать уже нельзя. Тем не менее, оказывается аналогичное утверждение справедливо и для $k = n$.

Теорема 10. Пусть $H : \Re^{2mn} \to \Re$ - функция $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1 = \overline{1,m}$, $l1 = \overline{1,n}$, $j2 = \overline{1,m}$, $l2 = \overline{1,n}$ и выполняется условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i \partial p_k^i}\right) \ne 0 ,\ i,j = \overline{1,m}$$ окрестности $U(q_0,p_0)$ точки (q_0,p_0)

Тогда:

1) замена переменных – переход от $p_n^i \to x^{(n)i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}, i = \overline{1,m}$ является невырожденной в окрестности

точки (q_0,p_0) и $$\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j} = \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i} \tag{18}$$

2) локально существует обратная замена $p_n^i = p_n^i(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)})$ (19)

3) $$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases}1,\ i = j\\ 0\ ,\ i \ne j\end{cases}\ -\ \textit{символ Кронекера} \tag{20}$$

Доказательство.

$x^{(n)i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i} \Rightarrow \frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j} = \frac{\partial}{\partial p_n^j}\left(\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\right) = \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}$. Выражение (18) проверено.

Так как $\det\left(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}\right) \ne 0$, то по теореме об обратной функции существует обратная замена

$p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, x^{(n)})$ (19) и первые 2 части утверждения доказаны.
Продифференцируем соотношения $x^{n(i)}(p_n^l(x^{n(j)})) \equiv x^{n(i)}$, $i,l,j = \overline{1,m}$. Учитывая, что

$$\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^l} = \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l \partial p_n^i},$$

$$\frac{\partial x^{n(i)}}{x^{n(j)}} = \delta_j^i = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l} \frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}} = \sum_{l=}^{m} \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l \partial p_n^i} \frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}}$$

Что доказывает формулу (20) и **теорему 10**.

Теорема 11. Пусть $H(q,p)$- функция $H: \Re^{2mn} \to \Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1 = \overline{1,m}$, $l1 = \overline{1,n}$, $j2 = \overline{1,m}$, $l2 = \overline{1,n}$

1) $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i \partial p_k^i}) \neq 0$, $i,j = \overline{1,m}$ окрестности $U(q_0,p_0)$ точки (q_0,p_0)

2) $L(p,q) = -H(p,q) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$

Тогда 1)) замена переменных – переход от $p_n^i \to x^{(n)i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}, i = \overline{1,m}$ (21)

является невырожденной в окрестности точки (q_0,p_0).

2)) локально существует обратная замена $p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, x^{(n)})$ (22)

3)) $\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, p_n(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, x^{(n)})) = p_n^i$ (23)

Доказательство. По **теореме10** первые 2 части **теоремы 11** доказаны:

$x^{(n)i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i} \Rightarrow \frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j} = \frac{\partial}{\partial p_n^j}(\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}) = \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}$ Так как $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}) \neq 0$ то

по теореме об обратной функции существует обратная замена

$p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, x^{(n)})$

$$\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, p_n(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, x^{(n)})) = \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(-H(q,p) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} H(q,p) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(p_k^j q_{k+1}^j) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_k^j}\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}} - \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} +$$

$$\overset{(24)}{+} \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_k^j) q_{k+1}^j + p_k^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} q_{k+1}^j)) + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j) \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) \quad (25)$$

Так как в (24)-(25): $\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}} = 0$, $k = \overline{1,n}$ $\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_k^j$ $k = \overline{1,n-1}$, $\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} q_{k+1}^j = 0$ поэтому (24)-(25)можно переписать:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_k^j}\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}} - \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_k^j) q_{k+1}^j +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} q_{k+1}^j) + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j) \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j) \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) \quad (26)$$

Так как $\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} = \frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} \cdot \delta_n^k = \begin{cases} \frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}, & k = n \\ 0, & k < n \end{cases}$, $\delta_n^k = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$ – *символ Кронекера* (27) (переменные $q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, x^{(n)}$ - независимы), то (26) можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^k + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + \sum_{j=1}^{m} p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) + \sum_{j=1}^{m} p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) = \sum_{j=1}^{m} p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) \quad (28)$$

так как $\sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) = \sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} = 0$

Преобразуем (28) $\sum_{j=1}^{m} p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) = \sum_{j=1}^{m} p_n^j(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_k^l}\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}})$ (29)

Так как $\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}} = 0 \ k = \overline{1,n},\ i,l = \overline{1,m}$ и по формуле (27) $\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}} = \frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^l$

,где $\delta_n^l = \begin{cases} 1,\ l = n \\ 0\ ,\ l \neq n \end{cases}$ $-$ *символ Кронекера*

, то правую формулы(29) преобразуем далее:

$$\sum_{j=1}^{m} p_n^j(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_k^l}\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}) = \sum_{j=1}^{m} p_n^j\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p_n^j\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^k = \sum_{j=1}^{m} p_n^j\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}} \quad (30)$$

По теореме10 п3 3) $\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0\ ,\ i \neq j \end{cases}$ $-$ *символ Кронеккера* имеем:

$\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}} = \delta_i^j = \begin{cases} 1,\ j = i \\ 0\ ,\ j \neq i \end{cases}$ $-$ *символ Кронекера*. Поэтому (30) равно:

$$\sum_{j=1}^{m} p_n^j\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}} = \sum_{j=1}^{m} p_n^j\delta_i^j = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} p_n^j\delta_i^j + p_n^{j=i}\delta_i^{j=i} = 0 + p_n^i\cdot 1 = p_n^i$$

Теорема 11 доказана.

Теорема 12. Пусть $H(q,p)$- функция $H:\Re^{2mn}\to\Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1 = \overline{1,m}$, $l1 = \overline{1,n}$, $j2 = \overline{1,m}$, $l2 = \overline{1,n}$

$\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i \partial p_k^i}) \neq 0$, $i, j = \overline{1,m}$ окрестности $U(q_0, p_0)$ точки (q_0, p_0).

Тогда

1) $\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s}\frac{\partial^2 L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0\ ,\ i \neq j \end{cases}$ $-$ *символ Кронекера* (31)

(Матрицы $\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s}$ *и* $\frac{\partial^2 L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}}$ - взаимно-обратные.)

2) $\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)j}} \neq 0$ (32)

Доказательство. **По теореме10 п.2** $p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, x^{(n)})$

По теореме 11 $\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, p_n(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, x^{(n)})) = p_n^i \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x^{(n)j}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, p_n(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, x^{(n)}))\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} = \frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(n)j}} \quad (33)$$

Равенство (33) может быть получено и по-другому:

$$p_k^i(n)(x,..., \overset{(2n-k)}{x}) = p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m} \Rightarrow$$

$$p_n^i(n) = p_{k=n}^i(n)(x,..., \overset{(2n-n)}{x}) = p_n^i(n)(x,..., \overset{(n)}{x}) = (-1)^{l=0} D_t^{l=0}\left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0+n)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(n)j}} = \frac{\partial}{\partial x^{(n)j}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}}$$

По теореме 10 п.3

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \cdot \frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0 \ , \ i \neq j \end{cases} \ - \textit{символ Кронекера} \quad (34)$$

Подставим $\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)s}} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)s}}$ (прямое следствие из (33)) в (34):

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \cdot \frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0 \ , \ i \neq j \end{cases} \ - \textit{символ Кронекера} \quad (35)$$

Вторая часть теоремы $\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)j}} \neq 0$ следует из равенства(35)

Теорема 12 доказана.

В работе получены основные результаты:

1) В теореме 1 показано, что оператор k кратного дифференцирования расслоения скоростей по времени (старых координат выраженных через новые) квазилинеен относительно k –го дифференцирования по времени новых координат и якобиану перехода.
2) В теореме 2 получена формула частной производной расслоения скоростей в старых координатах и производной по времени порядка k по новым координатам с производной по времени порядка p. Показано, что она пропорциональна производной по времени от якобиана перехода порядка k-p.
3) В теореме 3 получена связь частных производных обобщенных координат с произвольными порядка k,s(нижние индексы) и произвольными верхними индексами. Данную производную можно выразить через функции дельта Кронекера.
4) Теорема 4 – формула свертки обобщенных импульсов в двойной сумме по верхнему и нижнему индексам.
5) В теореме 5 показано, что частные производные по обобщенным координатам с индексами (i,s) в функциях Гамильтона и Лагранжа пропорциональны с точностью до слагаемого по сопряженной координате (для производной по координате нижний индекс понижается на 1, для производной по импульсу нижний индекс повышается на 1)и суммы со вторыми частными производными функции Гамильтона и обобщенного импульса максимального порядка.

6) Теорема 6 показывает, что формула временной производной порядка p от гладкой функции и аргументом старшей временной производной порядка k представляет квазилинейную часть относительно старших временных производных порядка k+p.
7) Теорема 7- формула связи обобщенного импульса с индексами(i,k) и вторых частных производных функции Лагранжа по координатам расслоенного пространства скоростей с временными производными минимального порядка, умноженные на временную производную максимального порядка от координаты расслоенного пространства (в пространстве индексов – порядок и ранг обобщенного импульса, порядок производной по времени).
8) Теорема 8 – частный случай теоремы 7(порядок временной производной равен рангу обобщенного импульса), формула которой используется в дальнейшем.
9) В теореме 9 показана эквивалентность частной временной производной порядка 2n-k от обобщенного импульса $p_k^i(n)$ по координате расслоенного пространства скоростей и гессиана от функции Лагранжа по координатам расслоенного пространства с максимальным порядком производных по времени- n(локально невырожденного). И в силу теоремы о неявной функции можно выразить координату расслоенного пространства скоростей с временной производной максимального порядка через обобщенный импульс.
10) В случае не вырожденности гессиана от функции Гамильтона по импульсам (старшего порядка n) можно выразить гессиан через частную производную координаты расслоенного пространства скоростей по обобщенным импульсам, в которых порядок временной производной равен порядку импульса n(максимален).
11) В случае локальной не вырожденности гессиана от функции Гамильтона по импульсам старшего порядка n существует равенство частной производной первого порядка от Лагранжиана по скорости порядка n расслоенного пространства обобщенному импульсу порядка n.
12) Матрица Гессе для функции Гамильтона по импульса старшего порядка n и матрица Гессе от функции Лагранжа по скоростям порядка n являются взаимно обратными, то есть свертка по индексу пространственной переменной даёт символ Кронекера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: УРСС, 1994.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
6. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
7. Козлов А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2006. – № 3. – С. 63–64.
8. Галеев Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого

государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
12. Трофимов В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов А.Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995.
13. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Вакуленко С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
15. Пастухов Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
16. Пастухов Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
17. Пастухов Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
18. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2018. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094. – Дата доступа: 15.06.2018.
19. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика,7:1(2001), 285-288
20. Пастухов, Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.

PROPERTIES OF THE HAMILTON FUNCTION IN VARIATION TASKS WITH HIGHER DERIVATIVES

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

In this paper, we study the differential properties of the Hamilton function of independent variables for a variational problem with higher derivatives and related Lagrange function

Keywords: *Hamilton function, variation problem, fiber space of velocities,, Euler-Lagrange equations, smooth manifolds, energy tensor, tensor of generalized momentum, non-degenerate function.*