

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

«Полоцкий государственный университет»

Д.Ф. ПАСТУХОВ, Ю.Ф. ПАСТУХОВ (Полоцкий университет)
ВОЛОСОВА Н.К. (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ.
АППРОКСИМАЦИЯ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТЬ
РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ**

Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям
для студентов специальности

1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий
1-98 01 01 Компьютерная безопасность

Новополоцк
ПГУ
2019

УДК 519.6
ББК 22.193

Рецензенты:

А.А. Козлов, кандидат физико-математических наук, доцент,
Заведующий кафедрой высшей математики и дифференциальных
уравнений Полоцкого государственного университета

Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К.

Сборник статей по численным методам. Аппроксимация повышенной
точности и устойчивость разностных схем в уравнениях
с частными производными: учебное пособие/

Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Волосова Н.К. - 1 - ое изд.,
- Новополоцк: ПГУ, 2019. – 120 с.

Материал учебного пособия соответствует требованиям Государственного
образовательного стандарта по математике. В сборнике статей из 9 статей
содержатся основные методы аппроксимации с высокой точностью и устойчивость
разностных уравнений в частных производных второго порядка.

Для студентов программистов (специальность-программное обеспечение
информационных технологий). Написаны программы к каждой статье, разностные
схемы, которых можно использовать для создания ядра других программ.

Для студентов университетов, педагогических вузов, а также для студентов
технических вузов, преподавателей, инженеров, программистов использующих в
своей практической деятельности численные методы.

УДК 519.6
ББК 22.193

© Оформление УО «Полоцкий государственный университет», 2019

Оглавление

Введение	4
1. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР АППРОКСИМАЦИИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К.	5
2. К ВОПРОСУ О РЕДУКЦИИ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К.	22
3. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	36
4. МИНИМАЛЬНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ С ШЕСТЫМ ПОРЯДКОМ ПОГРЕШНОСТИ. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К.	50
5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ ПО МОДУЛЮ p С КУСОЧНО РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ. Волосова Н.К., Волосов К.А., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.	66
6. СОГЛАСОВАНИЕ ПОРЯДКОВ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРА В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ И УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. Герец А.Ю., Зеленкевич А.А., Гурьева Н.А., Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф.	72
7. АППРОКСИМАЦИЯ ДВОЙНЫХ И ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ВО ВНУТРЕННИХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Д.Ф.Пастухов, Ю.Ф.Пастухов, Н.А.Гурьева	80
8. ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ПОЛЯ ЛИНИЙ ТОКА ПО ТЕМПЕРАТУРНОМУ РАЗРЕЗУ. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф.	96
9. ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ПОИСКЕ БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.,	106

Введение

Предлагаемый сборник статей по численным методам включает родственные статьи связанные одной тематикой – аппроксимация уравнений в частных производных с помощью разностных схем большого алгебраического порядка и их устойчивость на отрезке, прямоугольнике и параллелепипеде. В основе лежат статьи написанные авторами для журнала Вестник Полоцкого университета по численным методам в течение нескольких лет.

Авторы, прежде всего, выражают глубокую признательность и благодарность кандидату физико-математических наук, заведующему кафедрой высшей математики и дифференциальных уравнений Полоцкого государственного университета Александру Александровичу Козлову, настоящему учёному, посвятившему свою жизнь математике, за обсуждение и прочтение всех статей. Александр Александрович создал математический семинар в ПГУ, посвященный методам решения дифференциальных уравнений, где авторы имеют возможность докладывать свои научные работы по математике.

Наталья Константиновна Волосова, сотрудник МГТУ им. Баумана, впервые предложила использовать методы решения уравнения в частных производных в стеганографии для кусочно разрывной правой части. Ей также принадлежит идея не только шифровать графические двумерные файлы в достаточно гладкое решение уравнения Пуассона на прямоугольнике, но и решать уравнение Пуассона на классе остатков по модулю простого числа, то есть налицо связь методов решения дифференциальных уравнений и теории чисел (пятая статья сборника).

Недостаточная точность в аппроксимации разностного уравнения в частных может привести к качественно неверному решению (работа 6 сборника). В современное время nano технологий существует много областей прикладной науки, где требуется высокая точность аппроксимации и при этом устойчивость разностных схем.

Первое издание сборника открывает волновое уравнение на отрезке, имеющее параметр разностной схемы такой, что параметр аппроксимации равен бесконечности. Вторая работа для неоднородных краевых условий сводит решение волнового уравнения на отрезке редукцией к случаю однородных краевых условий. Третья и четвертая работы аппроксимируют уравнение Пуассона на прямоугольнике и параллелепипеде с 8 и с 6 порядками погрешности соответственно.

Седьмая работа косвенно связана с уравнениями математической физики, но непосредственно с аппроксимацией одномерных, двойных и тройных интегралов в декартовой, полярной (цилиндрической) или сферической системах координат с точностью до 16 алгебраического порядка включительно.

Восьмая работа посвящена методам решения уравнений в частных производных для задач прикладной математики – пересчет температурного поля, легко измеряемого экспериментально, на поле скоростей, измерение которого практически невыполнимая задача.

Завершающая девятая статья посвящена скорее методам оптимизации, чем уравнениям математической физики, но содержит образец точности – итерационную формулу касательных Ньютона со вторым порядком скорости сходимости.

В последнее время намечается тенденция использовать в научных работах готовые программные пакеты, например, ANSYS. Но если специалист по численным методам (например, Олег Бартенев) понимает двойную относительную точность решения как число 10^{-16} , то создатели пакета ANSYS Fluent под двойной относительной точностью понимают число 10^{-3} . Заметим также что размер шрифта статей (10 кегль) выдержан таким же, как и по требованиям редактора Вестника ПГУ Михайловой Ольги Петровны, которой авторы также очень признательны и благодарны.

Авторы: Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.6: 517.958

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР АППРОКСИМАЦИИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ

Д.Ф. ПАСТУХОВ, Ю.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет);
Н.К. ВОЛОСОВА

(Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана)

Предложен алгоритм решения начально-краевой задачи для неоднородного волнового уравнения на отрезке с двойной точностью, основанный на выборе оптимального параметра, обеспечивающего бесконечный алгебраический порядок аппроксимации однородному уравнению. Для решения системы линейных уравнений с симметрической пятидиагональной матрицей с крайевым условием Дирихле доказаны достаточные условия корректности формул прогонки вперед более слабые, чем условия диагонального преобладания ее элементов. Применение алгоритма укрупнения ячеек сетки и использование метода производящих функций дает двойную точность относительной погрешности решения даже на грубой сетке с числом узлов несколько сотен.

Ключевые слова: метод производящих функций, инициализация задачи, слабые достаточные условия корректности формул прогонки симметричной пятидиагональной матрицы.

Введение. Задачи с численным решением волнового уравнения встречаются во многих физико-технических приложениях, большой класс краевых задач математической физики также сводится к неоднородному волновому уравнению на отрезке, на прямоугольнике, в параллелепипеде [1–5]. В последнее время в численных методах появилось направление ускоренных расчетов [2], которое достигается либо за счет увеличения порядка аппроксимации разностных схем [2–4], либо удачным выбором геометрии узлов сетки. Авторы работы [6, с. 23] в лучших традициях московской математической школы аналитически решили задачу о бегущей волне кручения на отрезке железнодорожного полотна, используя уравнение гиперболического типа с неоднородной правой частью и с учетом слагаемых, описывающих затухание механических волн.

Напомним, что порядком аппроксимации дифференциального оператора разностным оператором [4, с. 102] называется максимальное положительное число p , если существуют положительные числа $p, C > 0$, не зависящие от шага сетки h такие, что норма невязки (разности дифференциального и разностного оператора) не превышает $\|(Lu)_h - L_h u_h\| \leq Ch^p$.

В данной работе решается одномерное неоднородное уравнение с ускорением расчета путем увеличения порядка аппроксимации и выбора оптимального параметра аппроксимации разностной схемы. Найденная параметризация обеспечивает однородному разностному уравнению бесконечный алгебраический порядок аппроксимации, а для неоднородной начально-краевой задачи позволяет выразить невязку уравнений только через частные производные от известной правой части волнового уравнения. Более того, применение производящих функций как функций временного шага заменяет вычисление бесконечного ряда слагаемых для невязки в разностных уравнениях на конечное число арифметических вычислений с двойной точностью в неоднородной начально-краевой задаче.

Нами построен алгоритм инициализации задачи, т.е. аппроксимация второго временного слоя решения по начальным данным задачи. Алгоритм сводится к прогонке либо трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), либо к прогонке сначала трехдиагональной, а затем пятидиагональной СЛАУ. Найденны также достаточные условия корректности формул прогонки, более слабые, чем диагональное преобладание элементов матрицы. Алгоритм инициализации дает приближение второго слоя решения по начальным условиям с относительной погрешностью не хуже чем 10^{-10} при числе узлов 500. Инженерный американский продукт ANSYS Fluent завершает решение задач с относительной точностью 10^{-3} , и с более грубой точностью на процессе инициализации задачи, т.е. с точностью $10^{-1} - 10^{-2}$. Благодаря применению спектрально устойчивых разностных схем относительная погрешность начальных данных уменьшается от значения $10^{-8} - 10^{-10}$ до величины 10^{-15} . В работе нами построен алгоритм укрупнения ячеек сетки (масштабирования) с коэффициентом масштабирования $l > 1$, позволяющий сократить число вычислений в сотни раз (l^2 раз). Неоднородная начально-краевая задача при числе узлов 300 на редкой координатно-временной сетке решается с помощью указанных здесь методов с

двойной точностью 10^{-15} (т.е. первые 15 десятичных знаков аналитического и численного решения на последнем временном слое во всех координатных узлах совпадают).

Некоторые двумерные и трехмерные колебания в приложениях часто сводятся к одномерным колебаниям [5, с. 181], например, в прямоугольном кристалле колебания атомных параллельных плоскостей порождают одномерные звуковые волны, поэтому решаемая нами численно задача полезна и в многомерных случаях.

Постановка задачи. Рассмотрим начально – краевую задачу для неоднородного волнового уравнения на отрезке $[a, b]$.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), a^2 > 0, (x, t) \in (a, b) \times (0, T) \\ u(x, 0) = \varphi(x), x \in [a, b] \\ u_t(x, 0) = \psi(x), x \in [a, b] \\ u(a, t) = u(b, t) = 0, x \in [a, b] \end{cases} \quad (1)$$

Где $u(x, t)$ - точное аналитическое решение задачи(1). $f(x, t), \varphi(x), \psi(x)$ - функции внешнего источника, начальное смещение и начальная скорость точек струны с закреплёнными концами на отрезке соответственно заданы в условии задачи $\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, T]$.

Аналитической задаче(1) сопоставим разностную задачу на равномерной сетке, используя пятиточечный шаблон – крест

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n}{h^2} + f(x_m, t_n), \\ x_m = a + mh, t_n = n\tau, [m, n] \in [1, M-1] \times [1, N-1], \\ u(mh, 0) = \varphi(mh), m \in [0, M], \\ u(mh, \tau) = \varphi_1(mh), m \in [0, M], \varphi_1(x) = F(\varphi(x), \psi(x)), \\ u(0, n\tau) = u(N, n\tau) = 0, n \in [0, N]. \end{cases} \quad (2)$$

Где $h = \frac{b-a}{N}$, $\tau = \frac{T}{M}$ - временной и координатный шаги сетки, a^2 - квадрат фазовой скорости волны.

Задание начальных условий $\varphi(x), \psi(x)$ в линейной аналитической задаче(1) эквивалентно заданию значений двух начальных временных слоёв решения $u(mh, 0) = \varphi(mh) = u_m^0, u(mh, \tau) = \varphi_1(mh) = u_m^1, m \in [0, M]$ в разностной задаче(2). Поскольку их запрашивает узловое значение u_m^2 в первой рекуррентной формуле системы(2). Зависимость второго временного слоя $\varphi_1(x) = F(\varphi(x), \psi(x))$ в системе уравнений (2) как функции начальных условий определяется с помощью предварительного численного алгоритма инициализации задачи методом прогонки.

Обозначим параметр $z = \frac{a^2 \tau^2}{h^2}$ и перепишем разностное уравнение(2) в эквивалентном виде

$$u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n = z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) + f(x_m, t_n)\tau^2 = z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) + f_{m,n}\tau^2 \quad (3)$$

Потребуем, чтобы разностное уравнение(3) аппроксимировало первое уравнение системы(1) с максимальным алгебраическим порядком, далее разложим узловые значения $u_m^{n+1}, u_m^{n-1}, u_{m-1}^n, u_{m+1}^n$ в ряд Тейлора в центральном узле $(m, n) \leftrightarrow (x_m, t_n)$ с вектором шага соответственно (h, τ) :

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n &= -2u_m^n + 2u_m^n + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(s)!} \frac{\partial^s u_m^n}{\partial t^s} \tau^s + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s)!} \frac{\partial^s u_m^n}{\partial t^s} \tau^s = \sum_{k=1}^{(s=2k)} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} = \\ &= \tau^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} \end{aligned}$$

Меняя в последней формуле буквенные обозначения индексов и переменных $(m \leftrightarrow n), (x \leftrightarrow t), (h \leftrightarrow \tau)$ получим:

$$z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) + f_{m,n}\tau^2 = z\left(h^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k}\right) + f_{m,n}\tau^2$$

Приравняем правые части последних двух выражений, используя тождество $\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n}$ имеем:

$$\begin{aligned} \tau^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} &= \tau^2 a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n}\tau^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} = \\ &= \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \left(h^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} \right) + f_{m,n}\tau^2 \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} = z \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} \end{aligned} \quad (4)$$

Невязка первого уравнения системы(2) равна невязке уравнения(4), т.е. разности левой и правой частей уравнения (4):

$$R(u_m^n) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(\frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} - z \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} \right) \quad (5)$$

Замечание1. Если параметр $z = \frac{a^2 \tau^2}{h^2} = 1$ и волновое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ однородное, то из его

записи для произвольного узла сетки $\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2}$ следует $\frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} = a^{2k} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}}$, тогда в формуле(5)

$$\frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} - z \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} = h^{2k} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} \left(\frac{\tau^{2k} a^{2k}}{h^{2k}} - z \right) = h^{2k} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} (z^k - z) = 0. \text{ Другими словами,}$$

для параметра $z = 1$ однородное одномерное волновое уравнение имеет бесконечный порядок аппроксимации! В этом случае разностная схема(3) с $f_{m,n} \equiv 0, z = 1$ точна для многочленов произвольной степени. Другими словами, равномерная норма погрешности аппроксимации первого уравнения задачи(1) первым уравнением разностной задачи(2) не зависит от шага сетки h (аппроксимация происходит с двойной точностью даже для крупного шага сетки).

Для упрощения формулы(5) докажем

Утверждение 1. Для неоднородного одномерного волнового уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n} \text{ справедлива формула} \\ \frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial t^{2p}} &= a^{2p} \frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial x^{2p}} + \sum_{l=0}^{p-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-l)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}}, \quad p \geq 2 \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Проведём по индукции. Для базы индукции если $p = 2$ имеем:

$$\frac{\partial^4 u_m^n}{\partial t^4} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n} \right) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n} \right) + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} = a^4 \frac{\partial^4 u_m^n}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2}$$

что верно – получаем формулу (6) если $p = 2$.

Пусть справедлива также формула $\frac{\partial^{2(p-1)} u_m^n}{\partial t^{2(p-1)}} = a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)} u_m^n}{\partial x^{2(p-1)}} + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-l)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-2)}}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial t^{2p}} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)} u_m^n}{\partial x^{2(p-1)}} + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-l)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-2)}} \right) = a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)} u_m^n}{\partial x^{2(p-1)}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-l)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}} = \\ &= a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)}}{\partial x^{2(p-1)}} \left(a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n} \right) + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-l)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}} = a^{2p} \frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial x^{2p}} + a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2(p-1)}} + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-l)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}} = \\ &= a^{2p} \frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial x^{2p}} + \sum_{l=0}^{p-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-l)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}}, \end{aligned}$$

т.е. формула(6)(**утверждение 1**) доказана для произвольного целого $p \geq 2$.

Используя формулу(6), преобразуем невязку разностного уравнения(3), подставив её в формулу(5):

$$\begin{aligned}
R(u_m^n) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(\frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} - z \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(\tau^{2k} \left(a^{2k} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} + \sum_{l=0}^{k-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(k-l)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(k-l-1)}} \right) - z \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} \right) = \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(h^{2k} \left(\frac{\tau^{2k} a^{2k}}{h^{2k}} - z \right) \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} + \tau^{2k} \sum_{l=0}^{k-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(k-l)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(k-l-1)}} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(h^{2k} (z^k - z) \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} + \tau^{2k} \sum_{l=0}^{k-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(k-l)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(k-l-1)}} \right) \stackrel{(z=1)}{=} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(\tau^{2k} \sum_{l=0}^{k-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(k-l)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(k-l-1)}} \right) \tag{7}
\end{aligned}$$

Выпишем несколько первых слагаемых для невязки $R(u_m^n)$ из формулы(7):

$$\begin{aligned}
R(u_m^n) &= \frac{2\tau^4}{4!} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) + \frac{2\tau^6}{6!} \left(a^4 \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4} \right) + \\
&+ \frac{2\tau^8}{8!} \left(a^6 \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^6} + a^4 \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^2} + a^2 \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^4} + \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial t^6} \right) + \\
&+ \frac{2\tau^{10}}{10!} \left(a^8 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^8} + a^6 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^6 \partial t^2} + a^4 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^4} + a^2 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^6} + \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8} \right) \\
&+ \frac{2\tau^{12}}{12!} \left(a^{10} \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^{10}} + a^8 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^8 \partial t^2} + a^6 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^6 \partial t^4} + a^4 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^6} + a^2 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^8} + \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial t^{10}} \right) \tag{8}
\end{aligned}$$

Определение 1. Одномерное уравнение в частных производных

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, a^2 > 0 \tag{9}$$

по аналогии с волновым уравнением $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, a^2 > 0$

Назовём волновым уравнением комплексного аргумента. Рассмотрим свойства решений(9).

Утверждение 2(свойства волнового уравнения комплексного аргумента).

1) Уравнения $xi + at = \overline{C_1} = const, xi - at = \overline{C_2} = const$ являются уравнениями характеристик для(9). Действительно

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \left(a \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(a \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \\ a \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{a} = \frac{dt}{i} \\ \frac{dx}{a} = \frac{dt}{-i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xi - at = C_1 \Leftrightarrow x + iat = -iC_1 = \overline{C_1} \\ xi + at = C_2 \Leftrightarrow x - iat = -iC_2 = \overline{C_2} \end{cases}$$

2) Решением волнового уравнения комплексного аргумента является линейная комбинация произвольных дважды дифференцируемых функций на комплексных характеристиках

$$f(x, t) = C_1 u(x + iat) + C_2 v(x - iat), u(\omega), v(\omega) \in C^2(\mathbb{Z}) \tag{10}$$

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 (C_1 u''(x + iat) + C_2 v''(x - iat)) + (ia)^2 C_1 u''(x + iat) + (-ia)^2 C_2 v''(x - iat) = 0$$

3) Пусть функция $f(x \pm iat) = f_1(x, t) + if_2(x, t)$ комплексного аргумента $(x \pm iat)$ - решение уравнения(9), тогда функции действительного аргумента $f_1(x, t), f_2(x, t)$, т.е. действительная и мнимая части $f(x \pm iat)$ также являются решениями уравнения (9). Действительно, имеем:

$$a^2 \frac{\partial^2 f(x \pm iat)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x \pm iat)}{\partial t^2} = 0 = a^2 \frac{\partial^2 (f_1(x,t) + if_2(x,t))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (f_1(x,t) + if_2(x,t))}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2 \frac{\partial^2 (f_1(x,t) + if_2(x,t))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (f_1(x,t) + if_2(x,t))}{\partial t^2} = 0 + i \cdot 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \frac{\partial^2 f_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1(x,t)}{\partial t^2} = 0 \\ a^2 \frac{\partial^2 f_2(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2(x,t)}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

То есть показано, что функции $f_1(x,t), f_2(x,t)$ - решения уравнения(9). Последняя система уравнений следует из определения равенства двух комплексных чисел. **Утверждение2** доказано.

Приведём функции из класса решений волнового уравнения комплексного аргумента, используя

Утверждение 2. Пример 1. $f_1(x,t) = \text{Re}(x + iat)^2 = x^2 - a^2 t^2$. Действительно,

$$a^2 \frac{\partial^2 (x^2 - a^2 t^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (x^2 - a^2 t^2)}{\partial t^2} = 2a^2 - 2a^2 = 0$$

Пример 2. $f_2(x,t) = \text{Im}(x + iat)^4 = 4x^3 at - 4xa^3 t^3$. Действительно,

$$a^2 \frac{\partial^2 (4x^3 at - 4xa^3 t^3)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (4x^3 at - 4xa^3 t^3)}{\partial t^2} = 24a^3 xt - 24a^3 xt = 0$$

Пример3. $f_3(x,t) = \text{Im}(\exp(x + iat)) = \exp(x)\sin(at)$. Действительно,

$$a^2 \frac{\partial^2 (\exp(x)\sin(at))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\exp(x)\sin(at))}{\partial t^2} = (a^2 - a^2)\exp(x)\sin(at) = 0$$

Замечание2. Если правая часть $f(x,t)$ неоднородного волнового уравнения действительного аргумента задачи(1) удовлетворяет однородному волновому уравнению мниого аргумента, то порядок невязки разностной схемы задачи(2) увеличивается со второго порядка до четвёртого. Более того, невязку в этом случае удаётся выразить через частные производные по одной независимой переменной x . Нужно учесть, что невязка уравнения (3) на 2 порядка больше невязки уравнения(2). Действительно, из формулы(8) получим

$$\begin{aligned} R(u_m^n) &= \frac{2\tau^6}{6!} \left(\frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) \right) + \\ &+ \frac{2\tau^8}{8!} \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) + a^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) \right) + \\ &+ \frac{2\tau^{10}}{10!} \left(\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8} + a^2 \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial t^4} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) + a^6 \frac{\partial^6}{\partial x^6} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) \right) + \dots = \\ &= \frac{2\tau^6}{6!} \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4} + \frac{2\tau^{10}}{10!} \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8} + \dots = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^{4k+2}}{(4k+2)!} \frac{\partial^{4k} f_{m,n}}{\partial t^{4k}} \end{aligned} \quad (11)$$

Кроме аппроксимации важен вопрос об устойчивости разностного уравнения (3), так как неустойчивая схема накапливает ошибку округления по геометрической прогрессии, что ведёт к неограниченному численному решению. В то время как устойчивая схема суммирует ошибки округления по арифметической прогрессии и норма невязки пропорциональна количеству элементарных операций. Проверим разностное уравнение(3) на спектральную устойчивость. Учтём, что численное решение $\bar{u}_m^n(x,t)$ удовлетворяет также

уравнению(3) как и проекция аналитического решения на узлы сетки $(u(x,t))_m^n = u_m^n, \varepsilon_m^n = \bar{u}_m^n - u_m^n$
 $\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_m^{n-1} - 2\bar{u}_m^n = z(\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_m^{n-1} - 2\bar{u}_m^n) + f_{m,n} \tau^2$. Вычитая из последнего уравнения уравнение (3) получим однородное уравнение относительно невязок в каждом внутреннем узле сетки(m,n)

$$\varepsilon_m^{n+1} + \varepsilon_m^{n-1} - 2\varepsilon_m^n = z(\varepsilon_m^{n+1} + \varepsilon_m^{n-1} - 2\varepsilon_m^n)$$

Подставляя в последнее уравнение ошибку округления вида $\varepsilon_m^n = \lambda^n(\varphi)e^{im\varphi}$, получим спектральное

$$\text{уравнение } \lambda + 1/\lambda - 2 = z(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2) = -4z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\left(1 - 2z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\lambda + 1 = 0 \quad (12)$$

$|u_m^n| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |\lambda(\varphi)| \leq 1 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$ (определение спектральной устойчивости [4, стр. 125])

Используя коэффициенты квадратного уравнения (12), получим $|\lambda_1| |\lambda_2| = \left| \frac{c}{a} \right| = 1/1 = 1$.

Если корни действительные, то при $|\lambda_1| < 1 \Rightarrow |\lambda_2| > 1$.

Поэтому, возможен единственный результат $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$, что заведомо невозможно, т.к.

$\lambda_{1,2} = \left(1 - 2z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \pm \sqrt{\left(1 - 2z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right)^2 - 1}$ зависит от φ . Следовательно, имеем пару комплексно

сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \left(1 - 2z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \pm i \sqrt{1 - \left(1 - 2z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right)^2}$,

$$|\lambda_{1,2}|^2 = \left(1 - 2z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right)^2 + 1 - \left(1 - 2z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right)^2 = 1 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi],$$

выясним условия, при которых дискриминант отрицательный

$$\left(1 - 2z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right)^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 4z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + 4z^2 \sin^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \leq 1 \Leftrightarrow 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) z(z-1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$z \in (0, 1], z \neq 0, \forall \varphi \in [0, 2\pi]$, то есть с параметром $z = 1$ разностное уравнение (3) является спектрально устойчивым.

Тестовый пример 1

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin(x) \sin(t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(x), u_t(x, 0) = \sin(2x), & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Сведём исходную задачу к 3 простым $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t)$, где $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)$:

$$\begin{cases} u_{1tt} = u_{1xx} + \sin(x) \sin(t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u_1(x, 0) = 0, u_{1t}(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi] \\ u_1(0, t) = u_1(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (a) \quad \begin{cases} u_{2tt} = u_{2xx}, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u_2(x, 0) = \sin(x), u_{2t}(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi] \\ u_2(0, t) = u_2(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (b)$$

$$\begin{cases} u_{3tt} = u_{3xx}, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u_3(x, 0) = 0, u_{3t}(x, 0) = \sin(2x), & x \in [0, \pi] \\ u_3(0, t) = u_3(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (c)$$

Выбираем решение задачи (a) в виде $u_1(x, t) = f_1(t) \sin(x)$, удовлетворяющее граничным условиям $u_1(0, t) = u_1(\pi, t) = 0$, подставляя в первое уравнение системы, получим:

$$\begin{cases} f_1'' + f_1 = \sin t \\ f_1(0) = f_1'(0) = 0 \end{cases}$$

общее решение однородного уравнения есть $f_{1oo}(t) = A \sin t + B \cos t$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $f_{1ч}(t) = (a + bt) \cos t, f_{1ч}' = b \cos t - (a + bt) \sin t, f_{1ч}'' = -2b \sin t - (a + bt) \cos t$, подставляем значения $f_{1ч}(t), f_{1ч}''$ в первое уравнение системы:

$$-2b \sin t = \sin t \Leftrightarrow b = -1/2, a = 0, f_1(t) = f_{1oo}(t) + f_{1ч}(t) = A \sin t + B \cos t - \frac{t \cos t}{2}, f_1(0) = f_1'(0) = 0$$

$$B = 0, A - 1/2 = 0, f_1(t) = \frac{(\sin t - t \cos t)}{2}, u_1(x, t) = f_1(t) \sin(x) = \frac{(\sin t - t \cos t) \sin(x)}{2}$$

Решение задачи (b) ищем в виде $u_2(x, t) = f_2(t) \sin(x)$, которое подставим в уравнения системы (b)

$$\begin{cases} f_2'' + f_2 = 0 \\ f_2(0) = 1, f_2'(0) = 0 \end{cases}$$

$$f_2(t) = A_1 \sin t + B_1 \cos t, f_2(0) = 1 \Leftrightarrow B_1 = 1, f_2'(0) = 0 \Leftrightarrow A_1 = 0$$

Получим $u_2(x, t) = f_2(t) \sin x = \cos t \sin x$

Решение задачи(с) ищем в виде $u_3(x, t) = f_3(t) \sin(2x)$, которое подставим в уравнения системы(с)

$$\begin{cases} f_3'' + 4f_3 = 0 \\ f_3(0) = 0, f_3'(0) = 1 \end{cases}$$

$$f_3(t) = A_2 \sin(2t) + B_2 \cos(2t), f_3(0) = 0 \Leftrightarrow B_2 = 0, f_3'(0) = 1 \Leftrightarrow 2A_2 = 1$$

$$u_3(x, t) = f_3(t) \sin(x) = \frac{\sin(2t) \sin(2x)}{2}. \text{ Решение исходного примера есть}$$

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) = \frac{(\sin(t) - t \cos(t)) \sin(x)}{2} + \cos(t) \sin(x) + \frac{\sin(2t) \sin(2x)}{2}$$

Инициализация задачи

Инициализацией задачи назовём определение второго временного слоя решения по начальным данным задачи, т.е. определения функции $\varphi_1(x)$ в задаче (2).

$$u(mh, \tau) = \varphi_1(mh), \quad m \in [0, M], \quad \varphi_1(x) = F \left(\varphi(x) \equiv u(x, 0), \psi(x) \equiv \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \right).$$

Аппроксимируем первую производную решения в начальный момент времени $\psi(x)$. Рассмотрим два случая инициализации разностной задачи(2): 1) в задаче (2) первое уравнение однородное $\varphi(x) \neq 0, \psi(x) \neq 0$, 2) в задаче (2) первое уравнение неоднородное $\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0$. В этих двух случаях инициализация задачи существенно отличается.

Построим квадратурную формулу для функции $\psi(x)$, связывающую узловые значения функции в одном узле в трёх временных слоях, с момента времени $t = 0$ точную для многочленов максимальной степени

$$u_\tau(0) = \frac{1}{\tau} (C_0 u(0) + C_1 u(\tau) + C_2 u(2\tau)), \quad u(t) \equiv 1 : u_\tau(0) = 0 = \frac{1}{\tau} (C_0 + C_1 + C_2)$$

$$u(t) \equiv t : u_\tau(0) = 1 = \frac{1}{\tau} (0C_0 + \tau C_1 + 2\tau C_2), \quad u(t) \equiv t^2 : u_\tau(0) = 0 = \frac{1}{\tau} (0^2 C_0 + \tau^2 C_1 + (2\tau)^2 C_2)$$

Решаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 + C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = -3/2 \\ C_1 = 2 \\ C_2 = -1/2 \end{cases} \quad u_\tau(0) = \frac{1}{\tau} \left(-\frac{3}{2} u^0 + 2u^1 - \frac{1}{2} u^2 \right) \text{ откуда}$$

$$u(2\tau) \equiv u^2 = -3u^0 + 4u^1 - 2u_\tau \quad (13)$$

Формула(13) имеет третий алгебраический порядок погрешности, т.е. погрешность имеет вид $O(\tau^3)$

Получим аналогичную формулу, связывающую четыре временных слоя:

$$u_\tau(0) = \frac{1}{\tau} (C_0 u(0) + C_1 u(\tau) + C_2 u(2\tau) + C_3 u(3\tau)), \quad u(t) \equiv 1 : u_\tau(0) = 0 = \frac{1}{\tau} (C_0 + C_1 + C_2 + C_3)$$

$$u(t) \equiv t : u_\tau(0) = 1 = \frac{1}{\tau} (C_0 \cdot 0 + \tau C_1 + 2\tau C_2 + 3\tau C_3), \quad u(t) \equiv t^2 : u_\tau(0) = 0 = \frac{1}{\tau} (0^2 C_0 + \tau^2 C_1 + (2\tau)^2 C_2 + (3\tau)^2 C_3)$$

$$u(t) \equiv t^3 : u_\tau(0) = 0 = \frac{1}{\tau} (0^3 C_0 + \tau^3 C_1 + (2\tau)^3 C_2 + (3\tau)^3 C_3) \quad \text{Решаем систему линейных уравнений:}$$

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 1 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 0 \\ C_1 + 8C_2 + 27C_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = -11/6 \\ C_1 = 3 \\ C_2 = -3/2 \\ C_3 = 1/3 \end{cases} \quad u_\tau(0) = \frac{1}{\tau} \left(-\frac{11}{6}u^0 + 3u^1 - \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 \right)$$

$$\text{откуда } u(3\tau) \equiv u^3 = \frac{11}{2}u^0 - 9u^1 + \frac{9}{2}u^2 + 3u_\tau \quad (14)$$

Формула(14) имеет четвёртый порядок погрешности, т.е. погрешность имеет вид $O(\tau^4)$

В первой задаче инициализации с использованием формул (3),(13) $f_{m,n} \equiv 0$ для трёх временных слоёв имеем:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n &= z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) + f_{m,n}\tau^2 \Leftrightarrow u_m^2 = -u_m^0 + 2(1-z)u_m^1 + z(u_{m+1}^1 + u_{m-1}^1) = \\ &= -3u_m^0 + 4u_m^1 - 2u_\tau \Leftrightarrow \\ zu_{m-1}^1 - 2(1+z)u_m^1 + zu_{m+1}^1 &= -2u_m^0 - 2u_\tau, m = \overline{1, M-1} \end{aligned} \quad (15)$$

Система линейных уравнений(15) представляет трёхдиагональную матрицу с коэффициентами

$$A_m = z, C_m = 2(1+z), B_m = z, F_m = -2u_m^0 - 2u_\tau \text{ относительно неизвестных } u_{m-1}^1, u_m^1, u_{m+1}^1.$$

Решить систему уравнений (15) можно методом прогонки, например, с помощью формул [3,стр.44] , [7,стр.68], прогонки вперёд

$$\lambda_m = \frac{B_m}{C_m - A_m\lambda_{m-1}}, v_m = \frac{A_mv_{m-1} - F_m}{C_m - A_m\lambda_{m-1}}, m = \overline{1, M-1}, \lambda_0 = 0, v_0 = u_0^1$$

и формул прогонки назад

$$u_m^1 = \lambda_m u_{m+1}^1 + v_m, m = \overline{M-1, 1} \quad (16)$$

Условие корректности формул прогонки (условие абсолютного диагонального преобладания) выполнено, так как $|C_m| \geq |A_m| + |B_m| > 0 \Leftrightarrow 2(1+z) > 2z > 0$ [3,стр.35]. Поскольку формула(13) точна для всех многочленов второй степени, т.е. имеет погрешность $O(h^3)$ с третьим алгебраическим порядком, то и погрешность решения системы уравнений(16) также $O(h^3)$, т.е. формулу(15) можно считать начальным этапом инициализации задачи. Используя формулы (3),(14) $f_{m,n} \equiv 0$, построим второй этап инициализации задачи(2)

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n &= z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) + f_{m,n}\tau^2 \Leftrightarrow u_m^3 = -u_m^1 + 2(1-z)u_m^2 + z(u_{m+1}^2 + u_{m-1}^2) = \\ &= \frac{11}{2}u_m^0 - 9u_m^1 + \frac{9}{2}u_m^2 + 3u_{m\tau}^0 \Leftrightarrow 8u_m^1 + \left(-\frac{5}{2} - 2z \right) u_m^2 + z(u_{m+1}^2 + u_{m-1}^2) = \frac{11}{2}u_m^0 + 3u_{m\tau}^0 = \\ 8u_m^1 + \left(-\frac{5}{2} - 2z \right) &\left(-u_m^0 + 2(1-z)u_m^1 + z(u_{m+1}^1 + u_{m-1}^1) \right) + \\ + z \left(-u_{m+1}^0 + 2(1-z)u_{m+1}^1 + z(u_{m+2}^1 + u_m^1) - u_{m-1}^0 + 2(1-z)u_{m-1}^1 + z(u_m^1 + u_{m-2}^1) \right) &\Leftrightarrow \\ z^2 u_{m-2}^1 + (2z(1-z) - z \left(\frac{5}{2} + 2z \right)) u_{m-1}^1 + u_m^1 \left(8 - \left(\frac{5}{2} + 2z \right) 2(1-z) + 2z^2 \right) + (2z(1-z) - z \left(\frac{5}{2} + 2z \right)) u_{m+1}^1 + z^2 u_{m+2}^1 &= \\ = \left(\frac{11-5}{2} - 2z \right) u_m^0 + 3u_{m\tau}^0 + zu_{m-1}^0 + zu_{m+1}^0 &\Leftrightarrow \\ z^2 u_{m-2}^1 - \left(\frac{1}{2}z + 4z^2 \right) u_{m-1}^1 + u_m^1 \left(3 + z + 6z^2 \right) - \left(\frac{1}{2}z + 4z^2 \right) u_{m+1}^1 + z^2 u_{m+2}^1 &= (3-2z)u_m^0 + zu_{m-1}^0 + zu_{m+1}^0 + 3u_{m\tau}^0 \end{aligned} \quad (17)$$

Для оптимального параметра $z = 1$ формула(17) перейдёт в формулу

$$u_{m-2}^1 - \frac{9}{2}u_{m-1}^1 + 10u_m^1 - \frac{9}{2}u_{m+1}^1 + u_{m+2}^1 = u_m^0 + u_{m-1}^0 + u_{m+1}^0 + 3\pi u_{m\tau}^0 \quad (18)$$

Отметим, что трёхдиагональная матрица(15) и пятидиагональная матрица(18) систем линейных уравнений в данном случае используется для аппроксимации второго временного слоя, а не для решения основной задачи, как в работах[7,8].

Линейная система уравнений(19) имеет пятидиагональную матрицу прогонки относительно неизвестных

$u_{m-2}^1, u_{m-1}^1, u_m^1, u_{m+1}^1, u_{m+2}^1$, обозначим её коэффициенты

$$A_{m1} = 1, A_{m2} = -\frac{9}{2}, C_m = -10, B_{m1} = -\frac{9}{2}, B_{m2} = 1, F_m = u_{m-1}^0 + u_m^0 + u_{m+1}^0 + 3\pi u_{m\tau}^0$$

Для решения системы уравнений(18) используем формулы прогонки [7,стр.70]:

$$\lambda_{1m} = \frac{B_{1m} + A_{2m}\lambda_{2m-1} + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1}}{C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}}, \lambda_{2m} = \frac{B_{2m}}{C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}}$$

$$v_m = \frac{A_{1m}\lambda_{1m-2}v_{m-1} + A_{1m}v_{m-2} + A_{2m}v_{m-1} - F_m}{C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}}, m = \overline{2, M-2}$$

(формулы прогонки вперёд)

$$u_m^1 = \lambda_{1m}u_{m+1}^1 + \lambda_{2m}u_{m+2}^1 + v_m, m = \overline{M-2, 2} \quad (19)$$

$$u_0^1 = \lambda_{10}u_1^1 + \lambda_{20}u_2^1 + v_0, u_1^1 = \lambda_{11}u_2^1 + \lambda_{21}u_3^1 + v_1, u_{M-2}^1 = \lambda_{1M-2}u_{M-1}^1 + \lambda_{2M-2}u_M^1 + v_{M-2}$$

(формулы прогонки назад).

Из последней формулы видно, что u_0^1, u_1^1 принимают фиксированные значения (краевое условие Дирихле - крайние значения $u_0^1, u_1^1, u_{M-1}^1, u_M^1$ заданы) при любых соседних узловых значениях, если положить $v_0 = u_0^1, \lambda_{10} = \lambda_{20} = 0, v_1 = u_1^1, \lambda_{11} = \lambda_{21} = 0$.

Коэффициенты последней системы уравнений не имеют даже нестрогого (абсолютного) диагонального преобладания, так как $|C_m| = 10 < |A_{m1}| + |A_{m2}| + |B_{m1}| + |B_{m2}| = 2\left(1 + \frac{9}{2}\right) = 11$. Однако, недиагональные элементы матрицы $A_{m1}, A_{m2}, B_{m1}, B_{m2}$ являются знакопеременными и удовлетворяют требованию условного диагонального преобладания:

$$|C_m| = 10 \geq |A_{m1} + A_{m2} + B_{m1} + B_{m2}| = 2\left|1 - \frac{9}{2}\right| = 7$$

Определение 2. Говорят, что квадратная матрица коэффициентов $a_{i,j}$ имеет условное диагональное преобладание, если для любой её строки

$$|a_{i,i}| \geq \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} \right|, i = \overline{1, n}.$$

Оказывается, что для корректности формул прогонки вперёд(19) при решении системы уравнений(18) достаточно выполнить условие более слабое, чем абсолютное диагональное преобладание элементов

матрицы $|a_{i,i}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \Leftrightarrow |C_m| > 2(|A_{2m}| + |A_{1m}|) \Leftrightarrow |-10| > 2(|-9/2| + 1) = 11$, но более сильное, чем

условное диагонального преобладания элементов матрицы (для коэффициентов левой части уравнения (18))

$$|a_{i,i}| \geq \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} \right| \Leftrightarrow |C_m| \geq 2(|A_{2m}| - |A_{1m}|) \Leftrightarrow |-10| \geq 2(|-9/2| + 1) = 7, \text{ а именно}$$

$$|-10| = |C_m| \geq 2|A_{2m}| + |A_{1m}| = 2|-9/2| + 1 = 10.$$

Утверждение 3. Пусть квадратная пятидиагональная матрица коэффициентов линейной системы уравнений

$$A_{1m}u_{m-2}^1 + A_{2m}u_{m-1}^1 - C_m u_m^1 + B_{1m}u_{m+1}^1 + B_{2m}u_{m+2}^1 = F_m, m = \overline{2, M-2} \text{ является:}$$

1) симметрической: $A_{1m} = B_{2m}, A_{2m} = B_{1m}$, со знакопередающимися недиагональными коэффициентами, для определённости

$$A_{1m} > 0, A_{2m} < 0, C_m < 0$$

2) удовлетворяет условию (условию подчинения коэффициентов):

$$|C_m| \geq 2|A_{2m}| + |A_{1m}| \Leftrightarrow C_m \leq -2|A_{2m}| - |A_{1m}|, |A_{2m}| \geq 2|A_{1m}|.$$

Тогда в краевой задаче Дирихле: $v_0 = u_0^1, \lambda_{10} = \lambda_{20} = 0, v_1 = u_1^1, \lambda_{11} = \lambda_{21} = 0$

$$1) 0 \leq \lambda_{1m} \leq 1, -1/2 \leq \lambda_{2m} \leq 0, m = \overline{0, n-2}$$

2) формулы прогонки вперёд(19) для коэффициентов $\lambda_{1m}, \lambda_{2m}, v_m$ корректны.

Доказательство утверждения 3 проведём по индукции.

1) для базы индукции $m=2$ имеем:

$$\lambda_{12} = \frac{B_{12} + A_{22}\lambda_{21} + A_{12}\lambda_{10}\lambda_{21}}{C_2 - A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11} - A_{12}\lambda_{20} - A_{22}\lambda_{11}} = \frac{A_{22}}{C_2} > 0, \left| \frac{A_{22}}{C_2} \right| \leq \frac{|A_{22}|}{2|A_{22}| + |A_{12}|} \leq \frac{|A_{22}|}{2|A_{22}|} < 1,$$

$$\lambda_{22} = \frac{B_{22}}{C_2 - A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11} - A_{12}\lambda_{20} - A_{22}\lambda_{11}} = \frac{A_{12}}{C_2} < 0, \left| \frac{A_{12}}{C_2} \right| \leq \frac{|A_{12}|}{2|A_{22}| + |A_{12}|} < \frac{|A_{12}|}{5/2|A_{12}|} \leq \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$$

$$\text{sign}(\lambda_{12}) = \text{sign}\left(\frac{A_{22}}{C_2}\right) = 1, \text{sign}(\lambda_{22}) = \text{sign}\left(\frac{A_{12}}{C_2}\right) = -1. \text{ База индукции проверена. Пусть верно}$$

$$|\lambda_{1k}| < 1, |\lambda_{2k}| < \frac{1}{2}, \text{sign}(\lambda_{1k}) = \text{sign}\left(\frac{A_{2k}}{C_k}\right) = 1, \text{sign}(\lambda_{2k}) = \text{sign}\left(\frac{A_{1k}}{C_k}\right) = -1, \forall k = \overline{2, m-1}$$

$$\text{Тогда } |\lambda_{1m}| = \frac{|B_{1m} + A_{2m}\lambda_{2m-1} + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1}|}{|C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}|} = \frac{|A_{2m} + A_{2m}\lambda_{2m-1} + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1}|}{|C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}|}$$

$$-1/2 \leq \lambda_{2m-1} \leq 0, 1/2 \leq \lambda_{2m-1} + 1 \leq 1, 0 \leq \lambda_{1m-1} < 1, -|A_{2m}| \leq A_{2m}(1 + \lambda_{2m-1}) \leq -|A_{2m}|/2,$$

$$-|A_{1m}|/2 \leq A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1} \leq 0 - |A_{2m}| - |A_{1m}|/2 \leq A_{2m}(1 + \lambda_{2m-1}) + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1} \leq -|A_{2m}|/2 < 0,$$

$$-|A_{1m}| \leq -A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} \leq 0, 0 \leq -A_{1m}\lambda_{2m-2} \leq |A_{1m}|/2, 0 \leq -A_{2m}\lambda_{1m-1} \leq |A_{2m}|$$

$$C_m - |A_{1m}| \leq C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1} \leq C_m + |A_{1m}|/2 + |A_{2m}| < 0$$

$$\frac{|A_{2m}|/2}{|C_m| + |A_{1m}|/2} \leq |\lambda_{1m}| = \frac{|A_{2m}(1 + \lambda_{2m-1}) + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1}|}{|C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}|} \leq \frac{|A_{2m}| + |A_{1m}|/2}{|C_m| - |A_{1m}|/2 - |A_{2m}|} \leq \frac{|A_{2m}| + |A_{1m}|/2}{|A_{2m}| + |A_{1m}|/2} = 1$$

$$|\lambda_{2m}| = \frac{|B_{2m}|}{|C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}|} \leq \frac{|A_{1m}|}{|A_{2m}| + |A_{1m}|/2} \leq \frac{|A_{1m}|}{5/2|A_{1m}|} = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$$

Из предыдущих оценок следует, что знаменатель и числители формул

$$C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1} \leq C_m + |A_{1m}|/2 + |A_{2m}| \leq -|A_{2m}| - |A_{1m}|/2 < 0$$

$A_{2m}(1 + \lambda_{2m-1}) + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1} \leq -|A_{2m}|/2 < 0, B_{2m} = A_{1m} > 0$ с учётом предыдущих неравенств следует что $0 \leq \lambda_{1m} \leq 1, -1/2 \leq \lambda_{2m} \leq 0$

2) Ввиду доказанной части 1) имеем

$$0 \leq \lambda_{1m} \leq 1, -1/2 \leq \lambda_{2m} \leq 0, m = \overline{0, n-2}$$

$$C_m - |A_{1m}|/2 \leq C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1} \leq C_m + |A_{1m}|/2 + |A_{2m}| \leq -|A_{2m}| - |A_{1m}|/2 < 0$$

Поэтому знаменатель во всех трёх формулах прогонки (20) $\lambda_{1m}, \lambda_{2m}, v_m$ строго меньше нуля, т.е. в ноль не обращается, а формулы прогонки корректны. **Утверждение 3** доказано.

Замечание 3. В работе[4] показано, что достаточными условиями корректности формул прогонки симметричной пятидиагональной матрицы является полуторное абсолютное диагональное преобладание её элементов. В данном случае **утверждение 3** указывает достаточные условия корректности прогонки той же матрицы, но более слабые, чем даже абсолютное диагональное преобладание её элементов.

Рассмотрим равномерную норму погрешности процесса инициализации, т.е. разности численного решения u_m^{-1} , полученного по формулам(13),(15),(16) и точного решения первой части тестового примера 1 (для однородного уравнения) $u_m^1 = \cos \tau \sin(hm) + \frac{\sin(2\tau)\sin(2hm)}{2}, m = \overline{0, M}, \Delta_m = u_m^{-1} - u_m^1$

Норма Чебышева определяется формулой $\Delta = \max_{m=1, M} |\Delta_m| = \max_{m=1, M} |u_m^{-1} - u_m^1|$, программа возвращает норму погрешности $\text{norma } C = 5.174140550234796\text{E}-006$ при $M = 200$ и $\text{norma } C = 6.465012549750071\text{E}-007$

при $M = 400$, тогда $\frac{\Delta(200)}{\Delta(400)} = \frac{5.174140550234796\text{E}-006}{6.465012549750071\text{E}-007} = 8.003 \approx 2^3$ алгебраический порядок

погрешности алгоритма(13),(15),(16) равен $p = 3$, т.е. подтверждает приближение формулы(13) $O(\tau^3)$.

Последовательный алгоритм инициализации сначала на первом этапе по формулам(13),(15),(16), а затем по формулам (14),(18),(19) с помощью программы даёт значение равномерной нормы $\text{norma } C = 8.299974534053955\text{E}-008$ при $M = 200$ и $\text{norma } C = 5.173976233563415\text{E}-009$ $M = 400$, тогда $\frac{\Delta(200)}{\Delta(400)} = \frac{8.299974534053955\text{E}-008}{5.173976233563415\text{E}-009} = 16.04 \approx 2^4$. То есть алгебраический порядок погрешности

алгоритма(13),(15),(16) и (14),(18),(19) равен $p = 4$, что подтверждает приближение формулы(14) $O(\tau^4)$.

Построим явную разностную схему для решения однородного уравнения, учитывая (3) для параметра $z = 1$

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n + z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) - u_m^{n-1} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1}, n = \overline{2, N}, m = \overline{1, M-1} \quad (20)$$

Отметим, что формула(20) имеет бесконечный порядок аппроксимации, т.е. не вносит дополнительной погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностным уравнением.

Программа с учётом алгоритма инициализации по формулам (13),(15),(16), а затем по формулам (14),(18),(19), явной формуле(201) для первой части задачи (однородного уравнения) тестового примера 1

$$\begin{cases} u_{1t} = u_{1x}, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u_1(x, 0) = \sin(x), u_{1t}(x, 0) = \sin(2x), x \in [0, \pi] \\ u_1(0, t) = u_1(\pi, t) = 0, t \geq 0 \end{cases}$$

с точным решением $u_1(x, 0) = \cos t \sin x + \frac{\sin(2t)\sin(2x)}{2}, x \in [0, \pi], t = 3\pi \approx 9.42477796$ возвращает

равномерную норму относительной погрешности $7.214666558239686\text{E}-016$ при $M = 50$ и норму $5.275261571720079\text{E}-015$ при $M = 100$ $t = 9.42477796076938$. Это означает что, во – первых, норма погрешности по формуле(20) не зависит от шага сетки при $z = 1$, во – вторых, с увеличением вычислений при меньшем шаге накапливается только большая абсолютная погрешность. В программе предусмотрен

масштабный параметр $l = 10$ (в приведенном примере). Данный параметр позволяет экономить время счёта в $l^2 = 100$ раз, а, главное, число арифметических операций в $l^2 = 100$, т.е. уменьшить абсолютную погрешность, пропорциональную числу арифметических операций.

Сначала инициализация проводится с шагом τ по времени по формулам (13),(15),(16), а затем по формулам (14),(18),(19), далее по явной формуле(20) с минимальными шагами сетки (h, τ) решается волновое уравнение $u_{1m}^{n+1} = u_{1m+1}^n + u_{1m-1}^n - u_{1m}^{n-1}, n = \overline{2, l}, m = \overline{1, M-1}$ во временном промежутке $[0, l \cdot \tau]$ $n \in \overline{0, l}$. Среди решения в слое $u_1(mh, l \cdot \tau), m = \overline{0, M}$ и среди начального слоя $u_1(mh, 0), m = \overline{0, M}$ выбираются узлы более редкой сетки $x_{m1} = h \cdot l \cdot m1, m1 = \overline{0, M/l}, t_{n1} = \tau \cdot l \cdot n1, n1 = \overline{0, 1}$, и решение на редкой сетке $u_1(m1 \cdot h \cdot l, 0), u_1(m1 \cdot h \cdot l, l \cdot \tau), m1 = \overline{0, M/l}$.

Далее используется формула(20) с крупным вектором шага $(l \cdot h, l \cdot \tau), 1 = z = \tau^2 a^2 / h^2 \Leftrightarrow \tau = h/a$

$$u_{1m1}^{n1+1} = u_{1m1+1}^{n1} + u_{1m1-1}^{n1} - u_{1m1}^{n1-1}, n1 = \overline{2, N/l}, m1 = \overline{1, M/l-1}. \quad (21)$$

Рассмотрим вторую задачу инициализации с использованием условий на трёх временных слоях $\varphi(x) = 0, x \in [a, b], u_t(x, 0) = \psi(x, 0) = 0, f(x, t) \neq 0,$

$$\begin{cases} u_{2tt} = u_{2xx} + \sin(x)\sin(t), x \in (0, \pi), t > 0 \\ u_2(x, 0) = 0, u_{2t}(x, 0) = 0, x \in [0, \pi] \\ u_2(0, t) = u_2(\pi, t) = 0, t \geq 0 \end{cases}, u_2(x, t) = \frac{(\sin t - t \cos t) \sin(x)}{2}$$

формула(13) перейдёт в

$$u(2\tau) \equiv u^2 = -3u^0 + 4u^1 - 2\tau u_\tau = 4u^1, \text{ с учётом(3) получим}$$

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= -u_m^{n-1} + 2(1-z)u_m^n + z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n) + f_{m,n}\tau^2, u_m^2 = -u_m^0 + 2(1-z)u_m^1 + z(u_{m+1}^1 + u_{m-1}^1) + f_{m,1}\tau^2 = 4u_m^1 \Leftrightarrow \\ &z u_{m-1}^1 - 2(1+z)u_m^1 + z u_{m+1}^1 = -f_{m,1}\tau^2 + u_m^0 = -f_{m,1}\tau^2 \end{aligned} \quad (22)$$

В трёхдиагональной матрице системы уравнений (22) коэффициенты

$$A_m = z, C_m = 2(1+z), B_m = z, F_m = u_m^0 - f_{m,1}\tau^2$$

обеспечивают условие корректной прогонки вперёд, $|C_m| \geq |A_m| + |B_m| > 0 \Leftrightarrow 2(1+z) > 2z > 0$ [3,стр45].

Программа с использованием метода прогонки для алгоритма инициализации (23) относительно точного

решения $u_2(x, \tau) = \frac{(\sin \tau - \tau \cdot \cos(\tau)) \sin(x)}{2}$ даёт равномерную норму погрешности погма

$C = 1.291625408111898E-006$ при $M = 200$ и погма $C = 1.614815612291833E-007$ при $M = 400$ откуда

$$\frac{\Delta(200)}{\Delta(400)} = \frac{1.291625408111898E-006}{1.614815612291833E-007} = 7.9986 \approx 2^3 \text{ алгебраический порядок погрешности } p = 3.$$

Рассмотрим вторую задачу инициализации на четырёх временных слоях, с учётом формул(14),(3) получим

$$u(3\tau) \equiv u^3 = \frac{11}{2}u^0 - 9u^1 + \frac{9}{2}u^2 + 3\tau u_\tau = -9u^1 + \frac{9}{2}u^2, \text{ откуда}$$

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= -u_m^{n-1} + 2(1-z)u_m^n + z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n) + f_{m,n}\tau^2 \Leftrightarrow u_m^3 = -u_m^1 + 2(1-z)u_m^2 + z(u_{m+1}^2 + u_{m-1}^2) + f_{m,2}\tau^2 = \\ &= -9u_m^1 + \frac{9}{2}u_m^2 \Leftrightarrow 8u_m^1 - \left(\frac{5}{2} + 2z\right)u_m^2 + z(u_{m+1}^2 + u_{m-1}^2) = -f_{m,2}\tau^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$8u_m^1 - \left(\frac{5}{2} + 2z\right) \left(-u_m^0 + 2(1-z)u_m^1 + z(u_{m+1}^1 + u_{m-1}^1) + f_{m,1}\tau^2\right) +$$

$$+ z \left(-u_{m+1}^0 + 2(1-z)u_{m+1}^1 + z(u_{m+2}^1 + u_m^1) + f_{m+1,1}\tau^2 - u_{m-1}^0 + 2(1-z)u_{m-1}^1 + z(u_m^1 + u_{m-2}^1) + f_{m-1,1}\tau^2\right) = -f_{m,2}\tau^2 \Leftrightarrow$$

$$z^2 u_{m-2}^1 - \left(\frac{1}{2}z + 4z^2\right) u_{m-1}^1 + u_m^1 (3 + z + 6z^2) - \left(\frac{1}{2}z + 4z^2\right) u_{m+1}^1 + z^2 u_{m+2}^1 = - \left(f_{m,2} - \left(\frac{5}{2} + 2z\right) f_{m,1} + z(f_{m-1,1} + f_{m+1,1})\right) \tau^2 \quad (23)$$

Для параметра $z = 1$ уравнение(23) переходит в уравнение(24)

$$u_{m-2}^1 - \frac{9}{2}u_{m-1}^1 + 10u_m^1 - \frac{9}{2}u_{m+1}^1 + u_{m+2}^1 = -\left(f_{m,2} - \frac{9}{2}f_{m,1} + f_{m-1,1} + f_{m+1,1}\right)\tau^2 \quad (24)$$

Отметим, что коэффициенты пятидиагональной матрицы системы уравнений(24) $A_{m1}, A_{m2}, C_m, B_{m1}, B_{m2}$

$$A_{m1} = 1, A_{m2} = -\frac{9}{2}, C_m = -10, B_{m1} = -\frac{9}{2}, B_{m2} = 1, F_m = -\left(f_{m,2} - \frac{9}{2}f_{m,1} + f_{m-1,1} + f_{m+1,1}\right)\tau^2$$

совпадают с коэффициентами матрицы системы(18) за исключением F_m . Однако корректность формул прогонки для пятидиагональной матрицы(18)доказана с помощью **утверждения3**, которая определяется только коэффициентами $A_{m1}, A_{m2}, C_m, B_{m1}, B_{m2}$, следовательно, корректность формул прогонки для системы уравнений (24) также доказана.

Программа с использованием формул(16),(22), а затем(19),(24) в двухэтапном алгоритме инициализации относительно точного решения $u_2(x, \tau) = \frac{(\sin \tau - \tau \cdot \cos(\tau))\sin(x)}{2}$ возвращает равномерную норму

погрешности норма C= 2.028797013322345E-008 при $M = 200$, а норма C= 1.268260177248376E-009

при $M = 400$, откуда $\frac{\Delta(200)}{\Delta(400)} = \frac{2.028797013322345E-008}{1.268260177248376E-009} = 15.997 \approx 2^4 = 16$.т.е. алгебраический

порядок погрешности для алгоритма инициализации методом прогонки по формулам(16),(22), а затем(19),(24) равен четырём $p = 4$.

Наконец, нужно написать основную рекуррентную разностную формулу для решения неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями. Для параметра $z = 1$ имеем из(3)

$$u_m^{n+1} = -u_m^{n-1} + 2(1-z)u_m^n + z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n) + f_{m,n}\tau^2 = -u_m^{n-1} + u_{m+1}^n + u_{m-1}^n + f_{m,n}\tau^2 + R(u_m^n) \quad (25)$$

В формуле (25)невязку аппроксимации неоднородного волнового уравнения(1) разностным уравнением(2) запишем согласно формуле(8) для $z = 1$ $n = 2, N, m = 1, M - 1$

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} = & u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + f_{m,n}\tau^2 + \frac{2\tau^4}{4!} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) + \frac{2\tau^6}{6!} \left(a^4 \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4} \right) + \\ & + \frac{2\tau^8}{8!} \left(a^6 \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^6} + a^4 \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^2} + a^2 \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^4} + \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial t^6} \right) + \\ & + \frac{2\tau^{10}}{10!} \left(a^8 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^8} + a^6 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^6 \partial t^2} + a^4 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^4} + a^2 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^6} + \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8} \right) + \\ & + \frac{2\tau^{12}}{12!} \left(a^{10} \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^{10}} + a^8 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^8 \partial t^2} + a^6 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^6 \partial t^4} + a^4 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^6} + a^2 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^8} + \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial t^{10}} \right) + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Для примера1 $f(x, t) = \sin(x)\sin(t), a = 1$ согласно формуле(26) получим явную разностную схему

$$u_m^{n+1} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{2\tau^4}{4!} + \frac{3\tau^6}{6!} - \frac{4\tau^8}{8!} + \frac{5\tau^{10}}{10!} - \frac{6\tau^{12}}{12!} + \dots \right)$$

Поскольку

$$1 - \cos(\tau) = \frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \dots \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \frac{d}{d\tau} (1 - \cos(\tau)) = \frac{\tau^2}{2!} - \frac{2\tau^4}{4!} + \frac{3\tau^6}{6!} - \frac{4\tau^8}{8!} + \frac{5\tau^{10}}{10!} - \frac{6\tau^{12}}{12!} + \dots$$

$$\text{То } u_m^{n+1} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + \tau \sin(\tau) f_{m,n} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + \tau \sin(\tau) \sin(mh) \sin(n\tau) \quad (27)$$

$$n = \overline{2, N}, m = \overline{1, M - 1}$$

В формуле(27) для бесконечного функционального ряда получена *производящая функция* $\tau \sin(\tau) f_{m,n}$.

Аналогично(21) можно провести укрупнение шага в неоднородном уравнении. Сначала инициализация проводится с шагом τ по времени по формулам (16),(22), а затем по формулам (19),(24), далее по явной формуле(26) с минимальными шагами сетки (h, τ) решается волновое уравнение

$$u_{2m}^{n+1} = u_{2m+1}^n + u_{2m-1}^n - u_{2m}^{n-1} + \tau \sin(\tau) \sin(mh) \sin(n\tau), n = \overline{2, \overline{N}}, m = \overline{1, \overline{M} - 1} \text{ во временном промежутке } [0, l \cdot \tau]$$

Среди решения в слое $u_2(mh, l \cdot \tau), m = \overline{0, \overline{M}}$ и среди начального слоя $u_2(mh, 0) \equiv 0, m = \overline{0, \overline{M}}$ выбираются узлы более редкой сетки

$x_{m1} = h \cdot l \cdot m1, m1 = \overline{0, \overline{M} / l}, t_{n1} = \tau \cdot l \cdot n1, n1 = \overline{0, 1}$, и решение на редкой сетке

$$u_2(m1 \cdot h \cdot l, 0) \equiv 0, u_2(m1 \cdot h \cdot l, l \cdot \tau), m1 = \overline{0, \overline{M} / l}$$

Далее используется формула(27) с крупным шагом $(l \cdot h, l \cdot \tau), 1 = z = \tau^2 a^2 / h^2 \Leftrightarrow \tau = h / a$

$$u_{2m1}^{n1+1} = u_{2m1+1}^{n1} + u_{2m1-1}^{n1} - u_{2m1}^{n1-1} + \tau \cdot l \cdot \sin(\tau \cdot l) \sin(m1 \cdot h \cdot l) \sin(n1 \cdot \tau \cdot l), n1 = \overline{2, \overline{N} / l}, m1 = \overline{1, \overline{M} / l - 1} \quad (28)$$

Программа с учётом алгоритма укрупнения шага для тестового примера 1

$$\begin{cases} u_{2t} = u_{2xx} + \sin(x) \sin(t), x \in (0, \pi), t > 0 \\ u_2(x, 0) = 0, u_{2t}(x, 0) = 0, x \in [0, \pi] \\ u_2(0, t) = u_2(\pi, t) = 0, t \geq 0 \end{cases}, u_2(x, t) = \frac{(\sin t - t \cos t) \sin(x)}{2}$$

с точным решением $u_2(x, t) = \frac{(\sin t - t \cos t) \sin(x)}{2}, x \in [0, \pi], t = 3\pi \approx 9.42477796$ возвращает

равномерную норму относительной погрешности $\text{norma } C = 3.769546289141946\text{E-}015$ при

$M = 100, l = 10, t = 9.42477796076938$, для суммы решений

$$u(x, t) = \frac{(\sin t - t \cos t) \sin(x)}{2} + \cos t \sin x + \frac{\sin(2t) \sin(2x)}{2} \text{ программа возвращает равномерную норму}$$

относительной погрешности $\text{norma } C = 7.578604648156152\text{E-}016$. Поэтому мы можем сказать, что приведенные нами алгоритмы численного решения волнового неоднородного уравнения на отрезке имеют двойную точность относительной погрешности ($\sim 1e - 16$).

Таблица 1. (x – координата узла, точное – exact, численное – numerical) решения для примера 1)

x	exact	numerical
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
0.314159265358979	1.14719128466915	1.14719128466915
0.628318530717959	2.18208749344321	2.18208749344321
0.942477796076938	3.00338577486150	3.00338577486150
1.25663706143592	3.53069173081718	3.53069173081718
1.57079632679490	3.71238898038469	3.71238898038469
1.88495559215388	3.53069173081718	3.53069173081718
2.19911485751286	3.00338577486150	3.00338577486150
2.51327412287183	2.18208749344321	2.18208749344321
2.82743338823081	1.14719128466915	1.14719128466915
3.14159265358979	4.546215133239269E-016	0.000000000000000E+000

Тестовый пример 2.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin(x)t, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x,0) = \sin(x), u_t(x,0) = \sin(2x), & x \in [0, \pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Можно проверить, что решением последней задачи является функция

$$u(x,t) = \cos t \sin x + \frac{\sin(2t)\sin(2x)}{2} + \sin x(t - \sin t)$$

Применяя формулу(27) для неоднородной части $f(x,t) = \sin(x)t, a = 1$, получим

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \frac{\tau^8}{8!} + \frac{\tau^{10}}{10!} - \frac{\tau^{12}}{12!} + \dots \right) = \\ &= u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2(1 - \cos(\tau))f_{m,n} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2(1 - \cos(\tau))\sin(mh)(n\tau), m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1} \end{aligned}$$

В данном случае мы использовали другую производящую функцию $2(1 - \cos(\tau))f_{m,n}$. Повторяя вычислительные алгоритмы для примера 1 получим, что программа при $M = 100, l = 10$,

$t = 9.42477796076938$ для примера 2 возвращает для суммы решений

$$u(x,t) = \cos t \sin x + \frac{\sin(2t)\sin(2x)}{2} + \sin x(t - \sin t)$$

равномерную норму относительной погрешности погма

$C = 3.005569483512412E-015$. Относительная погрешность определяется как дробь, числитель которой есть равномерная норма абсолютной погрешности на последнем временном слое, а знаменатель равен среднему арифметическому по всем узлам от модуля точного решения. Прямое использование ряда в виде формулы

$$u_m^{n+1} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \frac{\tau^8}{8!} + \frac{\tau^{10}}{10!} - \frac{\tau^{12}}{12!} + \dots \right)$$

даёт значение относительной

погрешности погма $C = 2.337665153842987E-015$, т.е. не хуже, чем с помощью производящей функции.

Очевидно, применение производящих функции экономнее для решения волнового уравнения в двухмерном и трёхмерном случаях.

Таблица 2. (x – координата узла, точное – exact, численное - numerical решения для примера 2)

x	exact	numerical
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
0.314159265358979	2.60339956371325	2.60339956371325
0.628318530717959	4.95196023917890	4.95196023917890
0.942477796076938	6.81578854409794	6.81578854409794
1.25663706143592	8.01243997792951	8.01243997792951
1.57079632679490	8.42477796076938	8.42477796076938
1.88495559215388	8.01243997792951	8.01243997792951
2.19911485751286	6.81578854409794	6.81578854409794
2.51327412287183	4.95196023917890	4.95196023917889
2.82743338823081	2.60339956371325	2.60339956371325
3.14159265358979	1.031703662030091E-015	0.000000000000000E+000

Тестовый пример 3.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin(x)ch(t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x,0) = \sin(x), u_t(x,0) = \sin(2x), & x \in [0, \pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Точным решением последнего примера является функция

$$u(x,t) = \cos(t)\sin(x) + \frac{\sin(2t)\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(x)(ch(t) - \cos(t))}{2},$$

отметим, что неоднородная часть уравнения $f(x,t) = \sin(x)ch(t)$, $a = 1$ удовлетворяет однородному волновому уравнению(9) комплексного

аргумента $a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, a^2 > 0$. В этом случае согласно формуле(11) запишем невязку

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + f_{m,n} \tau^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^{4k+2}}{(4k+2)!} \frac{\partial^{4k} f_{m,n}}{\partial t^{4k}} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + f_{m,n} \tau^2 + \\ &+ \frac{2\tau^6}{6!} \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4} + \frac{2\tau^{10}}{10!} \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8} + \frac{2\tau^{14}}{14!} \frac{\partial^{12} f_{m,n}}{\partial t^{12}} + \dots = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^6}{6!} + \frac{\tau^{10}}{10!} + \frac{\tau^{14}}{14!} + \dots \right) = \\ u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + f_{m,n} (ch(\tau) - \cos(\tau)), &\text{ так как } ch(\tau) - \cos(\tau) = \frac{1}{2} (e^\tau + e^{-\tau}) - \cos(\tau) = \\ = \frac{1}{2} (e^\tau + e^{-\tau}) - \cos(\tau) &= \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} + \dots + \frac{\tau^{2k}}{(2k)!} + \dots \right) - \left(1 - \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} + \dots + (-1)^k \frac{\tau^{2k}}{(2k)!} \right) = \tau^2 + \\ + 2 \left(\frac{\tau^6}{6!} + \frac{\tau^{10}}{10!} + \frac{\tau^{14}}{14!} + \dots + \frac{\tau^{2+4k}}{(2+4k)!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Для точного решения $u(x,t) = \cos t \sin x + \frac{\sin(2t)\sin(2x)}{2} + s \frac{\sin(x)(ch(t) - \cos(t))}{2}$

программа в примере 3 для $M = 100, l = 10, t = 9.42477796076938$ возвращает норму относительной погрешности $\text{norma } C = 2.557857845110683E-015$. Производящая функция равна $f_{m,n}(ch(\tau) - \cos(\tau))$.

Таблица 3.(x – координата узла, точное – exact, численное – numerical решения для примера 3)

x	exact	numerical
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
0.314159265358979	957.152937976024	957.152937976022
0.628318530717959	1820.61307750630	1820.61307750629
0.942477796076938	2505.85892405305	2505.85892405305
1.25663706143592	2945.81383976773	2945.81383976773
1.57079632679490	3097.41197215405	3097.41197215405
1.88495559215388	2945.81383976773	2945.81383976773
2.19911485751286	2505.85892405305	2505.85892405305
2.51327412287183	1820.61307750630	1820.61307750630
2.82743338823081	957.152937976024	957.152937976023
3.14159265358979	3.793110381505353E-013	0.000000000000000E+000

В работе получены результаты:

1) Показано, что явная разностная схема задачи (2) аппроксимирует одномерное однородное волновое уравнение на отрезке задачи (1) с оптимальным параметром сетки $z = 1$ с бесконечным алгебраическим порядком аппроксимации, при этом явная разностная схема спектрально устойчива.

2) Для неоднородного волнового уравнения с параметром $z = 1$ невязка разностной схемы может быть учтена и явно выражена только через двойную сумму от частных производных правой части неоднородного уравнения (7).

3) Введено понятие волнового уравнения комплексного аргумента и рассмотрены свойства его решения. Если правая часть неоднородного волнового уравнения является решением однородного

волнового уравнения комплексного аргумента, то невязка упрощается от суммы по двум индексам до суммы по одному индексу (11), что качественно уменьшает число вычислений.

4) Построен алгоритм инициализации задачи, то есть аппроксимация второго временного слоя решения по известным начальным данным (начальным смещению и скорости точек отрезка).

5) Инициализация сводится к решению СЛАУ с симметричной трехдиагональной матрицей с погрешностью аппроксимации $O(\tau^3)$, затем к симметричной пятидиагональной матрице с погрешностью аппроксимации $O(\tau^4)$. Найдены ослабленные достаточные условия корректности формул прогонки для пятидиагональной матрицы (условия более слабые, чем диагональное преобладание элементов матрицы).

6) Предложен алгоритм масштабирования узловой решетки по числу узлов в l^2 раз, что сокращает число вычислений в сотни раз при сохранении вычислений с двойной точностью (15-16 первых десятичных знаков результата).

7) Программа тестировалась тремя построенными аналитическими примерами. Показано, что в примерах бесконечный функциональный ряд в разностной схеме относительно временного шага τ можно заменить производящей функцией от τ , что качественно снижает время вычислений и увеличивает их точность. С помощью программы показано, что построенный алгоритм дает решение 3 примеров с двойной точностью. В самом общем случае с помощью формулы (26) в виде двойного ряда можно достичь 14-го порядка погрешности (приближение $O(\tau^{14})$), причем формула (26) имеет ту же относительную погрешность решения, как и с применением производящей функции, т.е. с двойной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пикулин, В.П. Практический курс по уравнениям математической физики : учеб. пособие / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М. : Наука, 1995. – 224 с.
2. Методы ускорения газодинамических расчетов на неконструированных сетках / К.Н. Волков [и др.]. – М. : Физматлит, 2013. – 536 с.
3. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособие / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Изд-во ЛКИ, 2014. – 480 с.
4. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях : учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с. : ил.
5. Киттель, Ч. Введение в физику твердого тела : учеб. руководство : пер. с англ. / Ч. Киттель. – 4 изд. – М. : Наука, 1978. – 792 с.
6. Вакуленко, С.П. К методу оценки состояния железнодорожного полотна / С.П. Вакуленко, К.А. Волосов, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2016. – Т. 14, № 3 (64). – С. 20–35.
7. Пастухов, Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
8. Пастухов, Д.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.

Поступила 28.02.2018

OPTIMUM PARAMETER TO APROXIMATIONS RAZNOSTNOY SCHEMES OF THE WAVE EQUATION ON LENGTH

D. PASTUKHOV, Y. PASTUKHOV, N. VOLOSOVA

The Offered algorithm of the decision initial- marginal problem for lumpy wave equation on length with double accuracy. The Algorithm is founded on choice of the optimum parameter, providing endless algebraic order to approximations to uniform equation. For decision of the system of the linear equations with five diagonal matrixes with marginal condition Dirihle is proved sufficient conditions to correctness molded racing onward more weak, than condition of the diagonal prevalence her(its) element. Using the algorithm of the integration cell nets and use the method producing function gives double accuracy to relative inaccuracy of the decision even rough net with number of the nodes equal 300.

Keywords: *method producing function, initializing the problem, weak sufficient conditions to correctness molded racing symmetrical five diagonal matrixes.*

УДК 517.6: 517.958

К ВОПРОСУ О РЕДУКЦИИ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ

*Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов (Полоцкий государственный университет),
Н.К. Волосова (Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана)*

Предложен алгоритм решения общей начально-краевой задачи неоднородного волнового уравнения на отрезке с неоднородными краевыми условиями. Определено понятие краевой функции. Исходная задача с неоднородными краевыми условиями редуцируется к двум простым модифицированным задачам, т.е. к задаче с модифицированной правой частью и к задаче с модифицированными начальными условиями, но с однородными граничными условиями. Получено разложение невязки задачи в самом общем виде для оптимального параметра аппроксимации разностной схемы $\tau=1$. Формула невязки определяется производными четного порядка по времени и координате от правой части уравнения и производными четного порядка по времени от краевой функции. Написана программа на основе алгоритма редукации, решены точно и численно три тестовых примера, показывающие, что неоднородные краевые условия Дирихле сохраняют все свойства задачи с однородными краевыми условиями при использовании модифицированных условий и краевой функции.

Ключевые слова: краевая функция, модифицированные начальные условия и правая часть уравнения, неоднородно-краевая задача волнового уравнения на отрезке, согласование начальных и краевых условий.

Введение

Рассмотрим произвольную неоднородную начально-краевую задачу для волнового уравнения на отрезке с краевыми условиями Дирихле. Обычно задачи математической физики решают для однородных граничных условий, подразумевая, что возможна редукция задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями [1-4]. С другой стороны, отметим важность особенностей граничных условий в задачах математической физики, если границы имеют сложную геометрию или граничные функции принадлежат к более слабому классу функций, например, классу кусочно-непрерывных функций на отрезке. Неоднородная краевая задача эквивалентна модифицированной задаче с неоднородными начальными условиями и правой частью уравнения в случае кусочно непрерывных краевых функций можно использовать методы управляемых систем ОДУ [9,10].

Сотрудники семинара Возобновляемых источников энергии в МГУ, который проводил профессор В.В. Алексеев, д. ф. м. н., академик РАН, считали, что в задачах математической физики определяющую роль играют граничные условия. Данная статья, являясь продолжением работы [1] на случай неоднородных краевых условий на отрезке, численно решает волновое уравнение в самой общей постановке задачи.

Отметим, что уравнения математической физики, использованные в данной работе и в работах [1,5], решаемые предложенными в них алгоритмами с двойной точностью, открывают путь для применения уравнений математической физики в новой области математики - стеганографии (метод впервые предложен Н.К. Волосовой, сотрудником МГТУ им. Н.Э. Баумана) [6-8].

Уравнения математической физики, являясь следствием вариационных методов и методов решения ОДУ, могут использовать новые результаты, полученные в работах [11,12,13].

Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу для неоднородного волнового уравнения на отрезке:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & x \in (a, b), t \in (0, T) \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [a, b] \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [a, b] \\ u(a, t) = \mu_1(t), u(b, t) = \mu_2(t), & t \in [0, T] \end{cases} \quad (1)$$

В задаче (1) a^2 - квадрат фазовой скорости волны, $f(x, t)$ - неоднородная правая часть волнового уравнения на отрезке $[a, b]$, $\varphi(x), \psi(x)$ - неоднородные начальные условия, $\mu_1(t), \mu_2(t)$ - неоднородные граничные условия, (x, t) - координата и время соответственно.

Проведём линейную редукцию задачи(1). Построим простейшую линейную функцию, удовлетворяющую краевым условиям:

Определение 1. Пусть $\partial\Omega$ – кусочно гладкая граница области Ω , $\bar{\Omega}$ – компакт. Дважды непрерывно дифференцируемую функцию $V(\Omega, T) \in C^2(\Omega, T)$, $V : \Omega \times T \rightarrow R^1$ непрерывную на границе области $V(\partial\Omega) \in C(\partial\Omega)$ и определённую во всей области задачи $\bar{\Omega}$:

$$V(x, t) = \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \mu_2(t) + \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \mu_1(t) \quad (2)$$

назовём **краевой функцией** для исходной задачи(1), если

$$1) V(a, t) = \mu_1(t), V(b, t) = \mu_2(t), t \in [0, T], V(\partial\Omega_i, t) = \mu_i(r_i, t), i = \bar{1, l}$$

То есть граничная функция $V(\Omega, t)$, на i -ой компоненте $\partial\Omega_i$ границы с переменными r_i , равна i -ой функции граничных условий $V(\partial\Omega_i, t) = \mu_i(r_i, t), i = \bar{1, l}$, l - параметр связности.

2) $V(x, t)$ является одним из 3 слагаемых численного решения задачи(1) в замкнутой области $\bar{\Omega}$.

Преимущество линейной краевой функции $V(x, t)$ по координате x заключается в том что,

$$a^2 \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{т.е. краевая функция даёт нулевой вклад в волновое уравнение задачи(1).}$$

Замечание 1. Задание краевой функции в виде(2) для задачи(1) не единственно, например, определению(1)

$$\text{удовлетворяет функция } V(x, t) = \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^n \mu_2(t) + \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^m \mu_1(t), n, m \in N.$$

Утверждение 1. На гладких элементах границы размерности $\dim r_i \geq 1$ существует производная краевой функции по нормали n_i и вдоль касательного вектора к границе τ , которая равна соответствующим производным от граничных условий

$$\frac{\partial \mu_i(r_i, t)}{\partial \tau} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial \tau}, V \in C_\tau^1(\partial\Omega_i), \frac{\partial \mu_i(r_i, t)}{\partial n_i} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial n_i}, V \in C_n^1(\partial\Omega_i), i = \bar{1, l}$$

Доказательство. В силу дважды дифференцируемости краевой функции(**определение 1**) имеем

$$\begin{aligned} V(r_i + \varepsilon n_i + \delta \tau, t) &= V(r_i + \varepsilon n_i, t) + \delta \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial \tau} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial \tau^2} \Rightarrow (\vartheta \in (0, 1)) \\ \Rightarrow \frac{V(r_i + \varepsilon n_i + \tau \delta, t) - V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\delta} &= \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial \tau} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial \tau^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \frac{V(r_i + \varepsilon n_i + \tau \delta, t) - V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\delta} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mu_i(r_i, t)}{\partial \tau} \Rightarrow V(\partial\Omega_i) \in C_\tau^1(\partial\Omega_i), \text{ где} \end{aligned}$$

$r_i + \varepsilon n_i + \tau \delta$ -точка, удалённая от граничной точки r_i по внутренней нормали $n_i(r_i)$ на расстояние ε и вдоль касательного вектора $\tau(r_i)$ в граничной точке на расстояние δ , $n_i(r_i) \perp \tau(r_i)$.

Аналогично получим

$$\begin{aligned} V(r_i + \varepsilon n_i + \delta n_i, t) &= V(r_i + \varepsilon n_i, t) + \delta \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial n_i} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial n_i^2} \Rightarrow (\vartheta \in (0, 1)) \\ \Rightarrow \frac{V(r_i + \varepsilon n_i + \delta n_i, t) - V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\delta} &= \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial n_i} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial n_i^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \frac{V(r_i + \varepsilon n_i + \delta n_i, t) - V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\delta} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial n_i} = \frac{\partial \mu_i(r_i, t)}{\partial n_i} \Rightarrow V(\partial\Omega_i) \in C_n^1(\partial\Omega_i) \end{aligned}$$

В точках нарушения гладкости границы векторы $n_i(r_i)$ и $\tau(r_i)$ не определены, не определены и $\frac{\partial \mu_i(r_i, t)}{\partial n_i}, \frac{\partial \mu_i(r_i, t)}{\partial \tau}$, поэтому можно требовать только более слабых условий для краевой функции на

границе $V(\partial\Omega_i, t) = \mu_i(r_i, t), V(\partial\Omega) \in C(\partial\Omega)$. Доказательство **утверждения 1** завершено.

Решение системы уравнений(1) с краевой функцией(2) согласно **определению 1**, разложим в сумму

$$u(x,t) = V(x,t) + U(x,t) \quad (3)$$

Подставим формулу (3) в систему уравнений(1):

$$\begin{cases} U_{tt} + V_{tt} = a^2(U_{xx} + V_{xx}) + f(x,t) = a^2U_{xx} + f(x,t), x \in (a,b), t \in (0,T) \\ V(x,0) + U(x,0) = \varphi(x), x \in [a,b] \\ V_t(x,0) + U_t(x,0) = \psi(x), x \in [a,b] \\ V(a,t) = \mu_1(t), U(a,t) = 0, V(b,t) = \mu_2(t), U(b,t) = 0, t \in [0,T] \end{cases}$$

Выражая из последней системы уравнений неизвестную функцию $U(x,t)$, получим (4)

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2U_{xx} - V_{tt} + f(x,t) = a^2U_{xx} - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2''(t) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1''(t) + f(x,t), x \in (a,b), t \in (0,T) \\ U(x,0) = \varphi(x) - V(x,0) = \varphi(x) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2(0) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1(0), x \in [a,b] \\ U_t(x,0) = \psi(x) - V_t(x,0) = \psi(x) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2'(0) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1'(0), x \in [a,b] \\ U(a,t) = 0, U(b,t) = 0, t \in [0,T] \end{cases} \quad (4)$$

Как видно из системы уравнений(4), она линейно относительно $U(x,t)$, что даёт возможность провести редукцию линейной задачи $U(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x,t)$:

$$\begin{cases} U_{1tt} = a^2U_{1xx} - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2''(t) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1''(t) + f(x,t), x \in (a,b), t \in (0,T) \\ U_1(x,0) = 0, x \in [a,b] \\ U_{1t}(x,0) = 0, x \in [a,b] \\ U_1(a,t) = 0, U_1(b,t) = 0, t \in [0,T] \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} U_{2tt} = a^2U_{2xx}, x \in (a,b), t \in (0,T) \\ U_2(x,0) = \varphi(x) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2(0) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1(0), x \in [a,b] \\ U_{2t}(x,0) = \psi(x) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2'(0) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1'(0), x \in [a,b] \\ U_2(a,t) = 0, U_2(b,t) = 0, t \in [0,T] \end{cases} \quad (6)$$

Непосредственно подстановкой убеждаемся, используя формулу $U(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x,t)$, что построчно сумма соответствующих уравнений систем(5) и (6) даёт такое же соответствующее уравнение из системы уравнений(4). То есть линейная редукция задачи(4) свелась к решению задач(5) и (6), а сумма решений задач(5) и (6) ввиду линейности(4) равна решению системы уравнений(4).

Таким образом, исходная задача(1) с неоднородными граничными условиями имеет решение $u(x,t) = V(x,t) + U_1(x,t) + U_2(x,t)$, где краевая функция $V(x,t)$ определена формулой(2) и на концах отрезка равна граничным условиям в(1), а $U_1(x,t), U_2(x,t)$ - решения линейных систем уравнений(5) и (6).

Отметим, что в работе[1](формулы(15)(16),(18),(19),(22),(24)) предложен алгоритм инициализации задачи на втором временном слое по начальным условиям задачи(1). Предложен и алгоритм для численного решения задач(5),(6)[1](формулы(20),(27))с однородными краевыми условиями на основном временном отрезке с бесконечным порядком аппроксимации путём выбора оптимального параметра аппроксимации разностной схемы, а также алгоритм масштабирования задачи, сокращающий число элементарных математических операций в(21),(28) l^2 раз.

Задача(5) имеет однородные условия, но волновое уравнение содержит модифицированную правую часть, изменённую краевыми условиями задачи(1). По сравнению с задачей(1), задача(6) имеет однородное уравнение и однородные краевые условия, но начальные условия модифицированы краевыми условиями исходной задачи(1). Таким образом, мы свели общую задачу(1) с неоднородными краевыми условиями к двум известным задачам(5),(6) с модифицированной правой частью волнового уравнения и модифицированными начальными условиями соответственно. Но задачи(5),(6) решены алгоритмами,

предложенными в работе[1]. Тем не менее, нужно подробнее рассмотреть особенности разностных задач(8),(9).

Для создания численного алгоритма неоднородной краевой задачи по аналогии с формулой (2) построим дискретный аналог краевой функции на равномерной сетке для неоднородной краевой задачи

$$V_m^n = V(x_m, t_n) = \left(\frac{x_m - a}{b-a} \right) \mu_2(t_n) + \left(\frac{b-x_m}{b-a} \right) \mu_1(t_n) = \left(\frac{mh}{b-a} \right) \mu_2(n\tau) + \left(\frac{b-a-mh}{b-a} \right) \mu_1(n\tau), m = \overline{0, M}, n = \overline{0, N} \quad (7)$$

$$h = \frac{(b-a)}{M}, \tau = \frac{T}{N}, x_m = a + mh, t_n = n\tau$$

Используя вспомогательную функцию(7), аналогично задачам (5),(6) получим их разностный аналог с модифицированными неоднородными условиями (для шаблона крест)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_{1m}^{n+1} + U_{1m}^{n-1} - 2U_{1m}^n}{\tau^2} = a^2 \frac{U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - 2U_{1m}^n}{h^2} + \bar{f}(a + mh, n\tau), m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1} \\ \bar{f}(a + mh, n\tau) = f(a + mh, n\tau) - \left(\frac{mh}{b-a} \right) \mu_2''(n\tau) - \left(\frac{b-a-mh}{b-a} \right) \mu_1''(n\tau) \equiv \bar{f}_m^n, h = \frac{(b-a)}{M}, \tau = \frac{T}{N} \\ U_{1m}^0 = 0, U_{1m}^N = 0, m = \overline{0, M} \\ U_{10}^n = 0, U_{1M}^n = 0, n = \overline{0, N} \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_{2m}^{n+1} + U_{2m}^{n-1} - 2U_{2m}^n}{\tau^2} = a^2 \frac{U_{2m+1}^n + U_{2m-1}^n - 2U_{2m}^n}{h^2}, h = \frac{(b-a)}{M}, \tau = \frac{T}{N}, m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1} \\ U_{2m}^0 = \bar{\varphi}(a + mh) = \varphi(a + mh) - \left(\frac{mh}{b-a} \right) \mu_2(0) - \left(\frac{b-a-mh}{b-a} \right) \mu_1(0) = \bar{\varphi}_m, m = \overline{0, M} \\ U_{2m}^N = 0, \bar{\psi}(a + mh) = \psi(a + mh) - \left(\frac{mh}{b-a} \right) \mu_2'(0) - \left(\frac{b-a-mh}{b-a} \right) \mu_1'(0) = \bar{\psi}_m, m = \overline{0, M} \\ U_{20}^n = 0, U_{2M}^n = 0, n = \overline{0, N} \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_m^{n-1} - 2\bar{u}_m^n}{\tau^2} = a^2 \frac{\bar{u}_{m+1}^n + \bar{u}_{m-1}^n - 2\bar{u}_m^n}{h^2} + \bar{f}_m^n, h = \frac{(b-a)}{M}, \tau = \frac{T}{N}, m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1} \\ x_m = a + mh, t_n = n\tau, \bar{f}_m^n = f(a + mh, n\tau) - \left(\frac{mh}{b-a} \right) \mu_2''(n\tau) - \left(\frac{b-a-mh}{b-a} \right) \mu_1''(n\tau) \\ \bar{u}(a + mh, 0) = \bar{u}_m^0 = \bar{\varphi}(a + mh) = \varphi(a + mh) - \left(\frac{mh}{b-a} \right) \mu_2(0) - \left(\frac{b-a-mh}{b-a} \right) \mu_1(0) = \bar{\varphi}_m, m = \overline{0, M} \\ \bar{u}(a + mh, \tau) = \bar{u}_{m1}^1 \equiv \bar{\varphi}_1(a + mh), m = \overline{0, M}, \bar{\varphi}_1(x) = F(\bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(x)) \\ \bar{u}(a, n\tau) = \bar{u}_0^n = 0, \bar{u}(b, n\tau) = \bar{u}_M^n = 0, n = \overline{0, N} \\ \bar{\psi}(a + mh) = \bar{\psi}_m = \psi(a + mh) - \left(\frac{mh}{b-a} \right) \mu_2'(0) - \left(\frac{b-a-mh}{b-a} \right) \mu_1'(0) = \bar{\psi}_m, \bar{\varphi}_{1m}(x) = F(\bar{\varphi}_m(x), \bar{\psi}_m(x)) \end{array} \right. \quad (10)$$

$\bar{u}_m^n = V_m^n + \bar{u}_m^n = V_m^n + U_{1m}^n + U_{2m}^n, V_m^n, \bar{u}_m^n, U_{1m}^n, U_{2m}^n$ - решения задач (7),(10),(8),(9)соответственно. Второй временной слой \bar{u}_m^1 согласно(10) с использованием модифицированных $\bar{\varphi}_m, \bar{\psi}_m$ условий запрашивает \bar{u}_m^1, \bar{u}_m^0 аналогично формулам((15),(18)[1,стр.175,176]),связывая три (четыре) последовательных временных слоя, для однородного волнового уравнения(9) получим систему линейных уравнений с трёхдиагональной симметрической матрицей, решаемой методом прогонки с оптимальным параметром аппроксимации $z=1$ [1,(15)стр.175]:

$$U_{2m-1}^1 - 4U_{2m}^1 + U_{2m+1}^1 = -2\bar{\varphi}_m - 2\tau\bar{\psi}_m \equiv F_m + O(\tau^3), A_m = 1, B_m = 1, C_m = 4, m = \overline{1, M-1}, U_{20}^1 = 0, U_{2M}^1 = 0$$

С формулами прогонки вперёд[1,5]

$$\lambda_m = \frac{B_m}{C_m - A_m \lambda_{m-1}}, v_m = \frac{A_m v_{m-1} - F_m}{C_m - A_m \lambda_{m-1}}, m = \overline{1, M-1}, \lambda_0 = 0, v_0 = U_{20}^1 = 0, \lambda_M = 0, v_M = U_{2M}^1 = 0$$

$$\text{И формулами прогонки назад } U_{2m}^1 = \lambda_m U_{2m+1}^1 + v_m, m = \overline{M-1, 1} \text{ [1] (формула(16), стр.175)} \quad (11)$$

Для оптимального параметра $z=1$, связывая пять последовательных временных слоя, выражая их друг через друга, оставляя в записи только 2 первых слоя, получим аналогично(18)[1,стр.176] пятидиагональную СЛАУ

$$U_{2m-2}^1 - \frac{9}{2}U_{2m-1}^1 + 10U_{2m}^1 - \frac{9}{2}U_{2m+1}^1 + U_{2m+2}^1 = \bar{\varphi}_m + \bar{\varphi}_{m-1} + \bar{\varphi}_{m+1} + 3\tau\bar{\psi}_m + O(\tau^4) \equiv F_m + O(\tau^4),$$

$$A_{m1} = 1, A_{m2} = -\frac{9}{2}B_{m1} = -\frac{9}{2}, C_m = -10, B_{m2} = 1, F_m = \bar{\varphi}_m + \bar{\varphi}_{m-1} + \bar{\varphi}_{m+1} + 3\tau\bar{\psi}_m, m = \overline{2, M-2},$$

Получим аналогично (19[5,1,стр.176]) формулы прогонки вперёд

$$\lambda_{1m} = \frac{B_{1m} + A_{2m}\lambda_{2m-1} + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1}}{C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}}, \lambda_{2m} = \frac{B_{2m}}{C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}}$$

$$v_m = \frac{A_{1m}\lambda_{1m-2}v_{m-1} + A_{1m}v_{m-2} + A_{2m}v_{m-1} - F_m}{C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}}, m = \overline{2, M-2}$$

$$\lambda_{10} = 0, \lambda_{20} = 0, \lambda_{11} = 0, \lambda_{21} = 0, v_0 = U_{20}^1 = 0, v_1 = U_{21}^1 = U_{21}^1, v_M = U_{2M}^1 = 0, v_{M-1} = U_{2M-1}^1 = U_{2M-1}^1$$

Где запись $U_{21}^1 = U_{21}^1$ читается так значению U_{21}^1 в формуле(12) присваивается старое значение U_{21}^1 из формулы(11). Тогда формулы прогонки назад аналогично[1,(19 б) стр.176] имеют вид

$$\lambda_{1M-1} = 0, \lambda_{2M-1} = 0, \lambda_{1M} = 0, \lambda_{2M} = 0$$

$$U_{2m}^1 = \lambda_{1m}U_{2m+1}^1 + \lambda_{2m}U_{2m+2}^1 + v_m, m = \overline{M-2, 2} \quad (12)$$

Проверим, что указанные коэффициенты на границах дают краевые условия Дирихле

$$U_{20}^1 = \lambda_{10}U_{21}^1 + \lambda_{20}U_{22}^1 + v_0 = U_{20}^1, U_{21}^1 = \lambda_{11}U_{22}^1 + \lambda_{21}U_{23}^1 + v_1 = U_{21}^1$$

$$U_{2M-1}^1 = \lambda_{1M-1}U_{2M}^1 + \lambda_{2M-1}U_{2M+1}^1 + v_{M-1} = U_{2M-1}^1, U_{2M-2}^1 = \lambda_{1M-2}U_{2M-1}^1 + \lambda_{2M-2}U_{2M}^1 + v_{M-2}$$

$$U_{2M}^1 = \lambda_{1M}U_{2M+1}^1 + \lambda_{2M}U_{2M+2}^1 + v_M = U_{2M}^1.$$

Коэффициенты матриц СЛАУ в формулах прогонки(11),(12) $A_m = 1, B_m = 1, C_m = 4,$

$$A_{m1} = 1, A_{m2} = -\frac{9}{2}B_{m1} = -\frac{9}{2}, C_m = -10, B_{m2} = 1 \text{ удовлетворяют условию корректности формул прогонки}$$

(утверждение 3[1,стр.177]) и совпадают с аналогичными коэффициентами, корректность которых доказана в работе[1].

Запишем явную разностную схему для решения однородного уравнения, учитывая оптимальный параметр $z=1$ (20)[1,(20)стр.178] с бесконечным порядком аппроксимации.

$$U_{2m}^{n+1} = U_{2m+1}^n + U_{2m-1}^n - U_{2m}^{n-1}, n = \overline{2, N}, m = \overline{1, M-1} \quad (13)$$

Возможен также алгоритм масштабирования (укрупнения) ячеек сетки с параметром $z=1$ и коэффициентом масштабирования l , сокращающим число и время вычислений в l^2 раз.

Сначала инициализация проводится с шагом τ по времени по формулам (11), а затем по формулам(12), далее по явной формуле(13) с минимальными шагами сетки (h, τ) решается волновое

уравнение $U_{2m}^{n+1} = U_{2m+1}^n + U_{2m-1}^n - U_{2m}^{n-1}, n = \overline{2, l}, m = \overline{1, M-1}$ во временном промежутке $t = [2\tau, l * \tau]$.

Среди решения в слое $U_2(mh, l * \tau), m = \overline{0, M}$ и среди начального слоя $U_2(mh, 0), m = \overline{0, M}$ выбираются

узлы более редкой сетки $x_{m1} = a + h * l * m1, m1 = \overline{0, M/l}$, и решение на редкой сетке

$$U_2(a + m1 * h * l, 0), U_2(a + m1 * h * l, l * \tau), m1 = \overline{0, M/l}.$$

Далее используется формула(13) с крупным вектором шага $(l * h, l * \tau)$

$$1 = z = \tau^2 a^2 / h^2 \Leftrightarrow \tau = h / a, U_{2m1}^{n1+1} = U_{2m1+1}^{n1} + U_{2m1-1}^{n1} - U_{2m1}^{n1-1}, n1 = \overline{2, N/l}, m1 = \overline{1, M/l-1} \quad (14)$$

Рассмотрим вторую задачу инициализации $z=1$ для системы уравнений (8) с свяжем условия на 3 временных слоях $U_1(x,0) = \overline{\varphi}(x) \equiv 0, U_{1r}(x,0) = \overline{\psi}(x) \equiv 0, \overline{f}(x,t) \neq 0$, на этапе инициализации по трём (четырёх) временным слоям (формула(22) в работе[1,стр.179])

$$U_{1m-1}^1 - 4U_{1m}^1 + U_{1m+1}^1 = -\overline{f}_{m,1}\tau^2 + U_{1m}^0 = -\overline{f}_{m,1}\tau^2, A_m = 1, B_m = 1, C_m = 4, F_m = -\overline{f}_{m,1}\tau^2, m = \overline{1, M-1} \quad (15)$$

Воспользуемся затем формулами прогонки(11) с учётом(15) для решения $U_{1m}^1, m = \overline{1, M-1}, U_{10}^1 = U_{1M}^1 = 0$. Перейдём ко второй задаче инициализации на 4 временных слоях, аналогично формуле(24)([1,стр.180]):

$$U_{1m-2}^1 - \frac{9}{2}U_{1m-1}^1 + 10U_{1m}^1 - \frac{9}{2}U_{1m+1}^1 + U_{1m+2}^1 = -\left(\overline{f}_{m,2} - \frac{9}{2}\overline{f}_{m,1} + \overline{f}_{m-1,1} + \overline{f}_{m+1,1}\right)\tau^2 + O(\tau^4) \quad (16)$$

С коэффициентами

$$A_{m1} = 1, A_{m2} = -\frac{9}{2}B_{m1} = -\frac{9}{2}, C_m = -10, B_{m2} = 1, F_m = -\left(\overline{f}_{m,2} - \frac{9}{2}\overline{f}_{m,1} + \overline{f}_{m-1,1} + \overline{f}_{m+1,1}\right)\tau^2, m = \overline{2, M-2}$$

$$\lambda_{10} = 0, \lambda_{20} = 0, \lambda_{11} = 0, \lambda_{21} = 0, \nu_0 = U_{10}^1 = 0, \nu_1 = U_{11}^1 = U_{11}^1, \nu_M = U_{1M}^1 = 0, \nu_{M-1} = U_{1M-1}^1 = U_{1M-1}^1$$

используя формулы прогонки(12), получим второй временной слой задачи(8) $U_{1m}^1, m = \overline{0, M}$.

Наконец, нужно написать основную рекуррентную разностную формулу для решения неоднородного уравнения с нулевыми модифицированными начальными условиями. Для параметра $z=1$ имеем ((25)[1,стр.180])

$$U_{1m}^{n+1} = U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + \overline{f}_{m,n}\tau^2 + R(U_{1m}^n), n = \overline{2, N}, m = \overline{1, M-1} \quad (17)$$

$$\overline{f}_{m,n} = f_{m,n} - (V_{m,n})_n, \frac{\partial^2 V_{m,n}}{\partial x^2} = 0$$

Утверждение 2. Остаточный член погрешности в формуле(17) зависит от правой части волнового уравнения и краевой функции и представим в виде

$$R(U_{1m}^n) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(\tau^{2k} \sum_{l=0}^{k-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(k-l)} f_{mn}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(k-l-1)}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\tau^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} V_{mn}}{\partial t^{2k}}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой невязки в общем виде для одномерного волнового уравнения на отрезке, полученной в работе[1,стр.180](формула(26)), с учётом формулы(17), получим

$$\begin{aligned} U_{1m}^{n+1} & \stackrel{z=1}{=} U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + \overline{f}_{m,n}\tau^2 + \frac{2\tau^4}{4!} \left(a^2 \frac{\partial^2 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{f}_{m,n}}{\partial t^2} \right) + \frac{2\tau^6}{6!} \left(a^4 \frac{\partial^4 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^4 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \overline{f}_{m,n}}{\partial t^4} \right) + \\ & + \frac{2\tau^8}{8!} \left(a^6 \frac{\partial^6 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^6} + a^4 \frac{\partial^6 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^2} + a^2 \frac{\partial^6 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^4} + \frac{\partial^6 \overline{f}_{m,n}}{\partial t^6} \right) + \\ & + \frac{2\tau^{10}}{10!} \left(a^8 \frac{\partial^8 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^8} + a^6 \frac{\partial^8 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^6 \partial t^2} + a^4 \frac{\partial^8 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^4} + a^2 \frac{\partial^8 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^6} + \frac{\partial^8 \overline{f}_{m,n}}{\partial t^8} \right) + \\ & + \frac{2\tau^{12}}{12!} \left(a^{10} \frac{\partial^{10} \overline{f}_{m,n}}{\partial x^{10}} + a^8 \frac{\partial^{10} \overline{f}_{m,n}}{\partial x^8 \partial t^2} + a^6 \frac{\partial^{10} \overline{f}_{m,n}}{\partial x^6 \partial t^4} + a^4 \frac{\partial^{10} \overline{f}_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^6} + a^2 \frac{\partial^{10} \overline{f}_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^8} + \frac{\partial^{10} \overline{f}_{m,n}}{\partial t^{10}} \right) + \dots = \\ & = U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + \overline{f}_{m,n}\tau^2 + \frac{2\tau^4}{4!} \left(a^2 \frac{\partial^2 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{f}_{m,n}}{\partial t^2} \right) + \frac{2\tau^6}{6!} \left(a^4 \frac{\partial^4 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^4 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \overline{f}_{m,n}}{\partial t^4} \right) + \\ & + \frac{2\tau^8}{8!} \left(a^6 \frac{\partial^6 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^6} + a^4 \frac{\partial^6 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^2} + a^2 \frac{\partial^6 \overline{f}_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^4} + \frac{\partial^6 \overline{f}_{m,n}}{\partial t^6} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\tau^{10}}{10!} \left(a^8 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^8} + a^6 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^6 \partial t^2} + a^4 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^4} + a^2 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^6} + \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8} \right) + \\
& + \frac{2\tau^{12}}{12!} \left(a^{10} \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^{10}} + a^8 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^8 \partial t^2} + a^6 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^6 \partial t^4} + a^4 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^6} + a^2 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^8} + \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial t^{10}} \right) - \tau^2 \frac{\partial^2 V_{m,n}}{\partial t^2} - \\
& - \frac{2\tau^4}{4!} \frac{\partial^4 V_{m,n}}{\partial t^4} - \frac{2\tau^6}{6!} \frac{\partial^6 V_{m,n}}{\partial t^6} - \frac{2\tau^8}{8!} \frac{\partial^8 V_{m,n}}{\partial t^8} - \frac{2\tau^{10}}{10!} \frac{\partial^{10} V_{m,n}}{\partial t^{10}} - \frac{2\tau^{12}}{12!} \frac{\partial^{12} V_{m,n}}{\partial t^{12}} - \dots = \\
& = U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + f_{m,n} \tau^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(\tau^{2k} \sum_{l=0}^{k-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(k-l)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(k-l-1)}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\tau^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} V_{m,n}}{\partial t^{2k}} \quad (18)
\end{aligned}$$

Где $\overline{f_{m,n}} = f_{m,n} - \left(\frac{x_m - a}{b - a} \right) \mu_2(t_n) + \left(\frac{b - x_m}{b - a} \right) \mu_1(t_n)$ модифицированное узловое значение правой части.

Утверждение 2 доказано.

Аналогично(14) можно провести укрупнение шага в неоднородной модифицированной правой части волнового уравнения для системы уравнений(8). Сначала инициализация проводится с шагом τ времени по формулам (15), а затем по формулам (16), далее по явной формуле(18) с минимальными шагами сетки (h, τ) решается волновое уравнение с навязкой общего вида(18)

$$U_{1m}^{n+1} = U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + \overline{f_{m,n}} \tau^2 + R(U_{1m}^n), n = \overline{2, N}, m = \overline{1, M-1} \quad (19)$$

во временном промежутке $[0, l^* \tau], n \in \overline{2, l}$. Среди решения в слое $U_1(a + mh, l^* \tau), m = \overline{0, M}$ и среди начального слоя $U_1(a + mh, 0), m = \overline{0, M}$ выбираются узлы более редкой сетки

$x_{m1} = a + hl^* m1, m1 = \overline{0, M/l}, t_{n1} = \tau^* l^* n1, n1 = \overline{0, 1}$, и решение на редкой сетке

$$\{U_1(a + m1^* h^* l, 0), U_1(a + m1^* h^* l, l^* \tau), m1 = \overline{0, M/l}, n1 = \overline{0, 1}\} = \{U_1(a + m1^* h^* l, t_{n1}), m1 = \overline{0, M/l}, n1 = \overline{0, 1}\}$$

Далее используется формула(19) с крупным шагом $(l^* h, l^* \tau), 1 = z = \tau^2 a^2 / h^2 \Leftrightarrow \tau = h/a$

$$U_{1m1}^{n1+1} = U_{1m1+1}^{n1} + U_{1m1-1}^{n1} - U_{1m1}^{n1-1} + \overline{f_{m1,n1}} l^2 \tau^2 + R(U_{1m1}^{n1}), n1 = \overline{2, N/l}, m1 = \overline{1, M/l-1} \quad (20)$$

В последних формулах(19),(20) невязка $R(U_{1m1}^{n1})$ определяется двумя последними суммами из(28).

Рассмотрим **тестовый пример 1**:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin(t) \sin(x), x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \cos(x), x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = \sin(2x), x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = \cos(t) = \mu_1(t), u(\pi, t) = -\cos(t) = \mu_2(t), t \geq 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$u(x, t) = V(x, t) + U_1(x, t) + U_2(x, t) = \cos(x) \cos(t) + \frac{1}{2} (\sin(t) - t \cos(t)) \sin(x) + \frac{\sin(2x) \sin(2t)}{2} \quad (22)$$

Можно проверить, что решение системы уравнений (21) описывается формулой (22), т.е. удовлетворяет волновому уравнению и 4 условиям(21).

К неоднородной краевой задаче(21) можно применить редукцию к однородной задаче, описанную формулами (1)-(6). Воспользуемся формулами(2),(5),(6) с краевой функцией:

$$V(x, t) = \left(\frac{x - a}{b - a} \right) \mu_2(t) + \left(\frac{b - x}{b - a} \right) \mu_1(t) = \left(\frac{x}{\pi} \right) (-\cos(t)) + \left(\frac{\pi - x}{\pi} \right) \cos(t) = \left(1 - \frac{2x}{\pi} \right) \cos(t)$$

И с модифицированной правой частью

$$\overline{f(x, t)} = f(x, t) - V_{tt}(x, t) = -\left(\frac{2x}{\pi} \right) \cos t + \cos t + \sin x \sin t, -V_{tt}(x, t) = V(x, t) \text{ и точным решением}$$

используя формулу (18), получим

$$\begin{aligned}
U_{1m}^{n+1} &= U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{1}{2!} \tau^2 - 2 \frac{\tau^4}{4!} + 3 \frac{\tau^6}{6!} - 4 \frac{\tau^8}{8!} + 5 \frac{\tau^{10}}{10!} - \frac{6\tau^{12}}{12!} + \dots \right) + 2V_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \dots \right) = \\
1 - \cos(\tau) &= \frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \dots \Rightarrow \frac{\tau}{2} \frac{d}{d\tau} (1 - \cos(\tau)) = \frac{\tau}{2} \sin \tau = \frac{1}{2!} \tau^2 - 2 \frac{\tau^4}{4!} + 3 \frac{\tau^6}{6!} - 4 \frac{\tau^8}{8!} + 5 \frac{\tau^{10}}{10!} - \frac{6\tau^{12}}{12!} + \dots \\
U_{1m}^{n+1} &= U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + \tau \sin(\tau) f_{m,n} + 2V_{m,n} (1 - \cos(\tau)) = U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + \\
&+ \tau \sin(\tau) \sin(mh) \sin(n\tau) + 2 \left(1 - \left(\frac{2mh}{\pi} \right) \right) \cos(n\tau) (1 - \cos(\tau)), n = \overline{2, N}, m = \overline{1, M-1} \quad (23)
\end{aligned}$$

В первом примере по формуле(23) для бесконечного ряда получена *производящая функция* $\tau \sin(\tau) f_{m,n} + 2V_{m,n} (1 - \cos(\tau))$, состоящая из двух слагаемых, первое совпадает с аналогичным примером с той же неоднородной правой частью волнового уравнения и однородными краевыми условиями в работе[1,стр. 181] . Второе слагаемое обязано краевой функции из первого примера. Предположим, что аналитическое решение каждой частной задачи(18),(19) представимо в виде бесконечного медленно сходящегося ряда для каждой из подзадач с модифицированными неоднородным уравнением или с модифицированными начальными условиями. Тогда экономнее численно решать каждую из модифицированных подзадач, сравнивая их сумму и сумму с краевой функцией с известным общим точным решением. В таблице 1 по порядку записаны численные решения частных задач (8), (9), краевая функция и сумма всех трёх величин соответственно

$$U_1(x,t), U_2(x,t), V(x,t), U_1(x,t) + U_2(x,t) + V(x,t), t = 25.1327412287183с$$

Таблица 1

$U_1(x,t)$	$U_2(x,t)$	$V(x,t)$	$U_1(x,t) + U_2(x,t) + V(x,t)$
0.0000000000000000E+00	0.0000000000000000E+00	1.0000000000000000	1.0000000000000000
-3.88322207745093	0.151056516295153	0.8000000000000000	-2.93216556115578
-7.38632732196183	0.209016994374947	0.6000000000000000	-6.57731032758688
-10.1664073846305	0.187785252292473	0.4000000000000000	-9.57862213233804
-11.9513286589662	0.109016994374947	0.2000000000000000	-11.6423116645913
-12.5663706143592	-7.216449660063518E-16	.0000000000000000E+0	12.5663706143592
-11.9513286589662	-0.109016994374948	-0.2000000000000000	-12.2603456533412
-10.1664073846305	-0.187785252292473	-0.4000000000000000	-10.7541926369230
-7.38632732196184	-0.209016994374948	-0.6000000000000000	-8.19534431633678
-3.88322207745093	-0.151056516295154	-0.8000000000000000	-4.83427859374609
0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000	-1.0000000000000000	-1.0000000000000000

Таблица 2

x	<i>exact</i>	$(U_1(x,t) + U_2(x,t) + V(x,t))_{numerical}$
0.0000000000000000E+000	1.0000000000000000	1.0000000000000000
0.314159265358979	-2.93216556115578	-2.93216556115578
0.628318530717959	-6.57731032758688	-6.57731032758688
0.942477796076938	-9.57862213233805	-9.57862213233804
1.25663706143592	-11.6423116645913	-11.6423116645913
1.57079632679490	-12.5663706143592	-12.5663706143592
1.88495559215388	-12.2603456533412	-12.2603456533412
2.19911485751286	-10.7541926369230	-10.7541926369230
2.51327412287183	-8.19534431633677	-8.19534431633678
2.82743338823081	-4.83427859374609	-4.83427859374609
3.14159265358979	-1.0000000000000000	-1.0000000000000000

В первом столбце таблицы 2 с равномерным шагом указаны координаты узлов. Во втором столбце записаны значения решения согласно формуле (22) в узлах координатной сетки

$$u(x,t) = V(x,t) + U_1(x,t) + U_2(x,t) = \cos(x) \cos(t) + \frac{1}{2} (\sin(t) - t \cos(t)) \sin(x) + \frac{\sin(2x) \sin(2t)}{2}$$

В третьем столбце программа вычисляет сумму краевой функции и численных решений задач (8),(9). Программа с параметрами n=100,l=10,m=8, t=nmt=25.1327412287183с возвращает норму Чебышева для невязки задачи(7). Норма относительной погрешности имеет порядок 1E-15, что соответствует двойной точности решения. Последние столбцы таблиц 1 и 2 совпадают.

Относительная норма Чебышева равна 1.119445273655962E-015 . Среднее арифметическое от модуля численного решения в конечный момент времени по всем узлам составляет 7.93409415003782 . В примере 1 краевые условия $\mu_1(t) = \cos(t)$, $\mu_2(t) = -\cos(t)$ линейно зависимы.

Тестовый пример 2.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t \sin(x), x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(x/2), x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = \frac{1}{2} \cos(x/2), x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = \sin(t/2) = \mu_1(t), u(\pi, t) = \cos(t/2) = \mu_2(t), t \geq 0 \end{cases} \quad (24)$$

Точное решение, которого есть

$$u(x, t) = (t - \sin(t))\sin(x) + \sin(x/2)\cos(t/2) + \cos(x/2)\sin(t/2)$$

С краевой функцией $V(x, t) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2(t) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1(t) = \left(\frac{x}{\pi}\right)\cos(t/2) + \left(\frac{\pi-x}{\pi}\right)\sin(t/2)$ и модифицированной правой частью

$$\overline{f(x)} = f(x, t) - V_{tt}(x, 0) = t \sin(x) + \frac{x}{4\pi} \cos(t/2) + \left(\frac{\pi-x}{4\pi}\right)\sin(t/2)$$

а также с модифицированными начальными условиями

$$\overline{\varphi(x)} = \varphi(x) - V(x, 0) = \sin(x/2) - \frac{x}{\pi}, \overline{\psi(x)} = \psi(x) - V_t(x, 0) = \frac{1}{2} \cos(x/2) - \left(\frac{\pi-x}{2\pi}\right)$$

Тогда модифицированные правую часть волнового уравнения и начальные условия для второго тестового примера подставим в формулу (18)

$$\begin{aligned} U_{1m}^{n+1} &= U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \frac{\tau^8}{8!} + \frac{\tau^{10}}{10!} - \frac{\tau^{12}}{12!} + \dots \right) + 2V_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2^2 2!} - \frac{\tau^4}{2^4 4!} + \frac{\tau^6}{2^6 6!} - \frac{\tau^8}{2^8 8!} + \right. \\ &+ \left. \frac{\tau^{10}}{2^{10} 10!} - \frac{\tau^{12}}{2^{12} 12!} + \dots \right) = U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + 2f_{m,n} (1 - \cos(\tau)) + 2V_{m,n} \left(1 - \cos\left(\frac{\tau}{2}\right) \right) = U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - \\ &- U_{1m}^{n-1} + 2(n\tau) \sin(mh) (1 - \cos(\tau)) + 2 \left(\left(\frac{mh}{\pi}\right) \cos(n\tau/2) + \left(\frac{\pi-mh}{\pi}\right) \sin(n\tau/2) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{\tau}{2}\right) \right), \end{aligned} \quad (25)$$

$$n = \overline{2, N}, m = \overline{1, M-1}$$

Производящая функция $2f_{m,n}(1 - \cos(\tau)) + 2V_{m,n}\left(1 - \cos\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)$ в формуле(25) состоит из двух

слагаемых, первое слагаемое обусловлено правой частью волнового уравнения, второе определяется краевой функцией.

В таблице 3 собраны результаты численного решения примера 2 с параметрами программы $n = 100, l = 10, m = 8, t = n m \tau = 25.1327412287183c$

Таблица 3

x	<i>exact</i>	$(U_1(x, t) + U_2(x, t) + V(x, t))_{numerical}$
0.000000000000000E+000	-4.898425415289509E-016	-4.898425415289509E-016
0.314159265358979	7.92287861994210	7.92287861994209
0.628318530717959	15.0816716382986	15.0816716382986
0.942477796076938	20.7868052690006	20.7868052690006
1.25663706143592	24.4904425702249	24.4904425702249
1.57079632679490	25.8398480099049	25.8398480099049
1.88495559215388	24.7116743123074	24.7116743123074
2.19911485751286	21.2238212934494	21.2238212934494
2.51327412287183	15.7237111602188	15.7237111602188
2.82743338823081	8.75413249549701	8.75413249549700
3.14159265358979	1.00000000000000	1.00000000000000

Относительная норма Чебышева равна 3.004681541631892E-015 . Среднее арифметическое от модуля численного решения в конечный момент времени по всем узлам составляет 16.5534985368844. Норма погрешности имеет порядок 10^{-15} , т.е. программа работает с использованием алгоритма согласно формулам(11)-(20) с двойной точностью. В примере 2 краевые условия $\mu_1(t) = \cos(t/2)$, $\mu_2(t) = \sin(t/2)$ линейно независимы.

Тестовый пример 3.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(3t) \sin(3x), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \sin x, & x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{3x}{2}\right), & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = 0 = \mu_1(t), u(\pi, t) = -\sin\left(\frac{3t}{2}\right) = \mu_2(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (26)$$

Точное решение, которого есть

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{3t}{2}\right) + \frac{t}{6} \sin(3x) \sin(3t) + \sin x \cos t$$

С краевой функцией $V(x, t) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right) \mu_2(t) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right) \mu_1(t) = -\left(\frac{x}{\pi}\right) \sin\left(\frac{3t}{2}\right)$

и модифицированной правой частью

$$\overline{f(x)} = f(x, t) - V_{tt}(x, 0) = \cos(3t) \sin(3x) - \frac{9x}{4\pi} \sin\left(\frac{3t}{2}\right)$$

а также с модифицированными начальными условиями

$$\overline{\varphi(x)} = \varphi(x) - V(x, 0) = \sin x, \overline{\psi(x)} = \psi(x) - V_t(x, 0) = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{3x}{2\pi}$$

Тогда найденные модифицированные правую часть волнового уравнения и начальные условия для третьего тестового примера подставим в формулу (28)

$$\begin{aligned} U_{1m}^{n+1} &= U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} - 2 \frac{3^2 \tau^4}{4!} + 3 \frac{3^4 \tau^6}{6!} - 4 \frac{3^6 \tau^8}{8!} + 5 \frac{3^8 \tau^{10}}{10!} - 6 \frac{3^{10} \tau^{12}}{12!} + \dots \right) + 2V_{m,n} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{\tau^2}{2!} - \left(\frac{3}{2}\right)^4 \frac{\tau^4}{4!} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{3}{2}\right)^6 \frac{\tau^6}{6!} - \left(\frac{3}{2}\right)^8 \frac{\tau^8}{8!} + \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \frac{\tau^{10}}{10!} - \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \frac{\tau^{12}}{12!} + \dots \right) = U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + f_{m,n} (3\tau \sin(3\tau) - 8\tau^2) + \\ &+ 2V_{m,n} \left(1 - \cos\left(\frac{3\tau}{2}\right) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} 1 - \cos(3\tau) &= \frac{(3\tau)^2}{2!} - \frac{(3\tau)^4}{4!} + \frac{(3\tau)^6}{6!} - \dots \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \frac{d}{d\tau} (1 - \cos(3\tau)) = \frac{1}{2!} (3\tau)^2 - 2 \frac{(3\tau)^4}{4!} + 3 \frac{(3\tau)^6}{6!} - 4 \frac{(3\tau)^8}{8!} + \\ &+ 5 \frac{(3\tau)^{10}}{10!} - 6 \frac{(3\tau)^{12}}{12!} + \dots = 4\tau^2 + \frac{\tau^2}{2!} - 2 \frac{3^2 \tau^4}{4!} + 3 \frac{3^4 \tau^6}{6!} - 4 \frac{3^6 \tau^8}{8!} + 5 \frac{3^8 \tau^{10}}{10!} - 6 \frac{3^{10} \tau^{12}}{12!} + \dots = \frac{3\tau}{2} \sin(3\tau) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\tau^2}{2!} - 2 \frac{3^2 \tau^4}{4!} + 3 \frac{3^4 \tau^6}{6!} - 4 \frac{3^6 \tau^8}{8!} + 5 \frac{3^8 \tau^{10}}{10!} - 6 \frac{3^{10} \tau^{12}}{12!} + \dots = \frac{3\tau}{2} \sin(3\tau) - 4\tau^2 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{\tau^2}{2!} - \left(\frac{3}{2}\right)^4 \frac{\tau^4}{4!} + \left(\frac{3}{2}\right)^6 \frac{\tau^6}{6!} - \left(\frac{3}{2}\right)^8 \frac{\tau^8}{8!} + \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \frac{\tau^{10}}{10!} - \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \frac{\tau^{12}}{12!} + \dots &= 1 - \cos\left(\frac{3\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

функция $f_{m,n} (3\tau \sin(3\tau) - 8\tau^2) + 2V_{m,n} \left(1 - \cos\left(\frac{3\tau}{2}\right) \right)$ в формуле(27) состоит из двух слагаемых, первое слагаемое обусловлено правой частью волнового уравнения, второе соответствует краевой функции. В

таблице 4 показаны результаты численного решения примера 3 с параметрами программы $n = 200, l = 20, m = 4, t = n m \tau = 12.5663706143592c$

Таблица 4

x	<i>exact</i>	$(U_1(x,t)+U_2(x,t)+V(x,t))_{numerical}$
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
0.314159265358979	0.309016994374945	0.309016994374945
0.628318530717959	0.587785252292470	0.587785252292472
0.942477796076938	0.809016994374946	0.809016994374947
1.25663706143592	0.951056516295155	0.951056516295152
1.57079632679490	1.000000000000000	0.999999999999998
1.88495559215388	0.951056516295155	0.951056516295152
2.19911485751286	0.809016994374947	0.809016994374948
2.51327412287183	0.587785252292471	0.587785252292473
2.82743338823081	0.309016994374946	0.309016994374948
3.14159265358979	8.572244476756629E-016	7.347638122934264E-016

Относительная норма Чебышева равна 7.209524148017449E-015. Среднее арифметическое от модуля численного решения в конечный момент времени по всем узлам составляет 0.631375151467504. Норма погрешности имеет порядок 10^{-15} , т.е. программа работает с использованием алгоритма согласно формулам(11)-(20) с двойной точностью. В примере 3 задано только одно ненулевое краевое условие

$\mu_1(t) = 0, \mu_2(t) = -\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$. Таким образом, три рассмотренных примера исчерпывают все различные

случаи задания неоднородных условий показывающие, что программа, написанная по алгоритму формула (11)-(20) численно решает начально - краевую задачу волнового уравнения на отрезке с двойной точностью.

Для классического решения задач математической физики необходимо также согласовать начальные и краевые условия[3,4,стр.43], которые заключаются для постановки задачи(1) в выполнении условий $V(a,t) = \mu_1(t), V(b,t) = \mu_2(t), \varphi(a) = u(a,0) = \mu_1(0), \varphi(b) = u(b,0) = \mu_2(0)$ (28)

Отметим, что в первых двух примерах условие согласования классического решения выполнено на двух концах отрезка, и как следствие достигнуто меньшее значение нормы погрешности, чем в третьем примере, в котором условие согласования выполнено не левом конце отрезка, но не выполнено на правом его конце. $\varphi(a) - \mu_1(0) = 0, \varphi(b) - \mu_2(0) = 1 \neq 0$. В результате норма погрешности больше примерно в 10 раз, чем в первых двух примерах, тем не менее, устойчивость всех указанных алгоритмов разностных схем имеет место и в случае рассогласования начальных и граничных условий.

Программа написана на языке FORTRAN и использует входные функции тестового примера 2. Опишем входные функции программы, численно решающей произвольную неоднородную начально-краевую задачу для волнового уравнения на отрезке.

$$fy(x,t) = f(x,t) - v_n(x,t) = f(x,t) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2''(t) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1''(t) - \text{модифицированная}$$

правая часть волнового уравнения;

$$u0(x) = \varphi(x) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2(0) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1(0), u1(x) = \psi(x) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2'(0) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1'(0) -$$

модифицированные условия для начального смещения точек отрезка струны и модифицированные условия для начальной скорости точек струны. Сумма функций в программе $fan(x,t) + ff0(x,t) + f2(x,t)$ - равна известному точному решению. Если указанные функции найдены, то их записывают в программу (для определения нормы невязки задачи по Чебышеву). Первые два слагаемые представляют частные решения задачи(1), соответствующие неоднородным начальным условиям и неоднородным граничным условиям, третье слагаемое соответствует неоднородной правой части волнового уравнения.

Программа написана на языке FORTRAN, её особенностью является $m = 4k, k \in N$, быстродействие (время работы) составляет 0,01с.

```

program wave;integer(8), parameter::n=100,n1=10,ll=n/n1;integer(8)::i,j,k;integer(8),parameter::m=8
real(8):: num(0:n+1,0:m*n+1),num0(0:n+1,0:m*n+1);real(8)::par(0:n+1),sum,s,tay2,f00(0:n+1)
real(8)::res1(0:n+1),l(0:n+1),f0(0:n+1),aa33(0:n+1), res2(0:n+1);
real(8):: aa(0:n+1),bb(0:n+1),cc(0:n+1),ff(0:n+1),ccc(0:n+1),otv(0:n+1),otv0(0:n+1)
real(8)::eps(0:n+1),nu(0:n+1),eps0(0:n+1),f11(0:n+1),f22(0:n+1)
real(8)::a1(0:n+1), a2(0:n+1), b1(0:n+1), b2(0:n+1),aa11(0:n+1),cc11(0:n+1),bb11(0:n+1)
real(8)::eps00(0:n+1),otv00(0:n+1), l1(0:n+1),l2(0:n+1),res3(0:n+1)
real(8):: aa1(0:n+1),bb1(0:n+1),aa2(0:n+1),bb2(0:n+1),aa3(0:n+1),bb3(0:n+1)
real(8)::max1,max2,max3,max4,max44,epss(0:n+1);real(8)::max5,ch,t,yy,max55,mm,tay1,c1,ff0,v,pi

```



```

real(8)::u1,u0,f1,f2,fan,z,vel,x,y,a,b,c,d,h1,tay,tt,x1,x2,x3,x4,hh,fy
v(x,t)=(x/(2d0*dasin(1d0)))*dcos(t/2d0)+(((2d0*dasin(1d0))-x)/(2d0*dasin(1d0)))*dsin(t/2d0)
fy(x,t)=dsin(x)*t+(x/(4d0*(2d0*dasin(1d0))))*dcos(t/2d0)+(((2d0*dasin(1d0))-
x)/(4d0*(2d0*dasin(1d0))))*dsin(t/2d0)
u1(x)=dcos(x/2d0)/2d0-(((2d0*dasin(1d0))-x)/(2d0*(2d0*dasin(1d0))))
u0(x)=dsin(x/2d0)-(x/(2d0*dasin(1d0)));fan(x,t)=0d0;f1(x,tay)=-2d0*u0(x)-2d0*tay*u1(x);
ff0(x,t)=dsin(t/2d0)*dcos(x/2d0)+dsin(x/2d0)*dcos(t/2d0);f2(x,t)=dsin(x)*(t-dsin(t));
pi=2d0*dasin(1d0);a=0d0;b=pi;z=1d0;vel=1d0;max1=-100d0;max2=-100d0;max4=-100d0;max5=-100d0
max55=-1000d0;mm=-100d0;h1=(b-a)/dfloat(n);tay=dsqrt(z)*h1/vel
do k=0,n;x=a+h1*dfloat(k);x2=x+h1;x1=x-h1;x4=x+2d0*h1;x3=x-2d0*h1
aa(k)=1d0;bb(k)=1d0;cc(k)=4d0;f0(k)=f1(x,tay);ff(k)=3d0*u1(x)*tay+u0(x1)+u0(x2)+u0(x)
a1(k)=1d0;a2(k)=-4.5d0;b2(k)=1d0;b1(k)=-4.5d0;ccc(k)=-10d0;aa1(k)=1d0
bb3(k)=1d0;f11(k)=-fy(x,tay)*tay*tay;aa11(k)=z;bb11(k)=z;cc11(k)=2d0+2d0*z
f22(k)=-((fy(x1,tay)+fy(x2,tay))+fy(x,2d0*tay)-4.5d0*fy(x,tay))*tay*tay
enddo;nu(0)=0d0;nu(n)=0d0;l(0)=0d0;l(n)=0d0;res1(0)=nu(0);res1(n)=nu(n)
do k=1,n-1;x=a+h1*dfloat(k);f0(k)=f1(x,tay);nu(k)=(aa(k)*nu(k-1)-f0(k))/(cc(k)-aa(k)*l(k-1))
l(k)=bb(k)/(cc(k)-aa(k)*l(k-1));enddo;do k=n-1,1,-1;res1(k)=l(k)*res1(k+1)+nu(k);enddo
do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);par(j)=fan(x,tay);eps(j)=par(j)-res1(j)
if(eps(j)<=0d0)then;eps(j)=-eps(j);else;endif;enddo;do j=0,n;if(eps(j)>=max1)then;max1=eps(j);endif;enddo
print*,"norma C1=",max1;do k=0,n;res2(k)=res1(k);enddo;
l1(0)=0d0;l1(1)=0d0;l2(0)=0d0;l2(1)=0d0;l1(n)=0d0;l2(n)=0d0;l1(n-1)=0d0
l2(n-1)=0d0;nu(n-1)=res2(n-1);nu(n)=res2(n);nu(1)=res2(1);nu(0)=res2(0)
do j=2,n-2,1;l1(j)=(a1(j)*l1(j-2)*l2(j-1)+a2(j)*l2(j-1)+b1(j))/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a2(j)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2))
l2(j)=b2(j)/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-a2(j)*l1(j-1))
nu(j)=(a1(j)*l1(j-2)*nu(j-1)+a2(j)*nu(j-1)+a1(j)*nu(j-2)-ff(j))/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-a2(j)*l1(j-1))
enddo;do j=n-2,0,-1;res2(j)=l1(j)*res2(j+1)+l2(j)*res2(j+2)+nu(j);enddo
do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);par(j)=fan(x,tay);eps(j)=par(j)-res2(j)
if(eps(j)<=0d0)then;eps(j)=-eps(j);else;endif;enddo;do j=0,n
if(eps(j)>=max1)then;max1=eps(j);endif;enddo;do j=2,n-2;if(eps(j)>=max2)then
max2=eps(j);endif;if(mod(j,n1)==0)then;endif;enddo;print*,"norma C2=",max2
do i=0,n;if(mod(i,n1)==0)then;endif;enddo;do j=0,n1
x=a+h1*dfloat(j);num0(0,j)=0d0;num0(n,j)=0d0;num0(j,0)=u0(x);num0(j,1)=res2(j)
enddo;do j=1,n1-1;do i=1,n-1
num0(i,j+1)=num0(i+1,j)+num0(i-1,j)-num0(i,j-1);enddo;enddo;tay1=tay*dfloat(n1)
hh=h1*dfloat(n1);t=dfloat(n*m)*tay;num0(0,1)=0d0;num0(1,1)=0d0;num0(0,0)=0d0;num0(1,0)=0d0
do i=0,1;x=a+hh*dfloat(i);num0(i,1)=num0(i,n1);num0(i,0)=u0(x)
num0(0,i)=0d0;num0(1,i)=0d0;otv(i)=fan(x,t);enddo;do j=0,1;m;num0(0,j)=0d0;num0(1,j)=0d0;enddo
do j=1,1*m-1;do i=1,1-1;num0(i,j+1)=num0(i+1,j)+num0(i-1,j)-num0(i,j-1);enddo;enddo
do i=0,1;eps0(i)=num0(i,1*m)-otv(i);if(eps0(i)<0d0)then;eps0(i)=-eps0(i);endif
if(eps0(i)>max44)then;max44=eps0(i);endif
s=s+abs(otv(i));enddo;print*,"norma C404=",max44,max44*dfloat(1)/s
nu(0)=0d0;nu(n)=0d0;l(0)=0d0;l(n)=0d0;res1(0)=nu(0);res1(n)=nu(n)
do k=1,n-1;x=a+h1*dfloat(k);nu(k)=(aa11(k)*nu(k-1)-f11(k))/(cc11(k)-aa11(k)*l(k-1))
l(k)=bb11(k)/(cc11(k)-aa11(k)*l(k-1));enddo;do k=n-1,1,-1;res1(k)=l(k)*res1(k+1)+nu(k);enddo
do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);par(j)=f2(x,tay);eps(j)=par(j)-res1(j)
if(eps(j)<=0d0)then;eps(j)=-eps(j);else;endif;enddo;do j=0,n
if(eps(j)>=max4)then;max4=eps(j);endif;enddo;print*,"norma C101=",max4
do k=0,n;res2(k)=res1(k);enddo;l1(0)=0d0;l1(1)=0d0;l2(0)=0d0;l2(1)=0d0
l1(n)=0d0;l2(n)=0d0;l1(n-1)=0d0;l2(n-1)=0d0;nu(n-1)=res2(n-1)
nu(n)=res2(n);nu(1)=res2(1);nu(0)=res2(0);do j=2,n-2,1
l1(j)=(a1(j)*l1(j-2)*l2(j-1)+a2(j)*l2(j-1)+b1(j))/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a2(j)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2))
l2(j)=b2(j)/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-a2(j)*l1(j-1))
nu(j)=(a1(j)*l1(j-2)*nu(j-1)+a2(j)*nu(j-1)+a1(j)*nu(j-2)-f22(j))/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-a2(j)*l1(j-1))
enddo ;do j=n-2,0,-1;res2(j)=l1(j)*res2(j+1)+l2(j)*res2(j+2)+nu(j);enddo
do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);par(j)=f2(x,tay);eps(j)=par(j)-res2(j);if(mod(j,n1)==0)then;endif
if(eps(j)<=0d0)then;eps(j)=-eps(j);else;endif;enddo;do j=0,n;if(eps(j)>=max5)then;max5=eps(j);endif;enddo;
do j=0,n;if(eps(j)>=max5)then;max5=eps(j);endif;enddo;print*,"norma C202=",max5 !;pause
do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);num(j,0)=0d0;num(j,1)=res2(j);enddo;do j=1,n1-1;do i=1,n-1
x=a+h1*dfloat(i);y=tay*dfloat(j)
num(i,j+1)=num(i+1,j)+num(i-1,j)-num(i,j-1)+2d0*fy(x,t)*(1d0-cos(tay))+2d0*v(x,t)*(1d0-cos(tay/2d0))
enddo;enddo;do i=0,n;res3(i)=num(i,n1);enddo;hh=h1*dfloat(n1);tay1=tay*dfloat(n1)

```

```

t=tay*dfloat(n*m);print*,"t=",t;do i=0,ll;x=a+hh*dfloat(i);num(i,1)=res3(i*n1)
num(i,0)=0d0;otv(i)=f2(x,t);enddo;do j=0,ll*m;num(0,j)=0d0;num(ll,j)=0d0;enddo
do j=1,ll*m-1;do i=1,ll-1;x=a+hh*dfloat(i);t=tay1*dfloat(j)
num(i,j+1)=num(i+1,j)+num(i-1,j)-num(i,j-1)+2d0*fy(x,t)*(1d0-cos(tay1))+2d0*v(x,t)*(1d0-cos(tay1/2d0))
enddo;enddo;s=0d0;do i=0,ll;eps(i)=num(i,ll*m)-otv(i);if(eps(i)<=0d0)then;
eps(i)=-eps(i);endif;if(eps(i)>=max55)then;max55=eps(i);endif
if(otv(i)>=maax)then;maax=otv(i);endif;enddo;print*,"norma C505=",max55,max55*dfloat(ll)/maax;
t=tay1*dfloat(m*ll);s=0d0;do i=0,ll;x=a+hh*dfloat(i);otv00(i)=num(i,ll*m)+num0(i,ll*m)+v(x,t)
res3(i)=f2(x,t)+fan(x,t)+ff0(x,t);epss(i)=otv00(i)-res3(i);if(epss(i)<0d0)then;epss(i)=-epss(i);endif;s=s+res3(i);
if(epss(i)>mm)then;mm=epss(i);endif;print*,"x";print*,"res3(i),otv00(i);enddo
print*,"norma C=",mm*dfloat(ll)/abs(s),abs(s)/dfloat(ll);end program wave

```

В работе получены результаты:

- 1) Линейная неоднородная начально-краевая задача для волнового уравнения на отрезке редуцией сводится к решению двух частных задач с однородными краевыми условиями. Первая имеет однородное уравнение и модифицированные начальные условия. Вторая задача имеет однородные начальные условия и волновое уравнение с модифицированной правой частью.
- 2) В разностном виде получены формулы(11)-(20) для решения неоднородной краевой задачи, которые переходят в аналогичные формулы работы[1]((15)-(28)) в случае однородных краевых условий.
- 3) В явном виде получена невязка общего вида (формула(18)), состоящая из двух сумм,- слагаемые первой двойной суммы содержат производные четного порядка по координате и времени (как и в работе[1,стр.180]формула(26)), слагаемые второй суммы пропорциональны четным производным по времени от краевой функции. Краевой может быть любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, на границе области $\partial\Omega$ равная краевым условиям $\mu_i(t), i = \overline{1, l}$ и являющаяся одним из 3 слагаемых численного решения в замкнутой области $\overline{\Omega}$.
- 4) Все модифицированные функции – правая часть уравнения, начальные условия и общий вид невязки задачи в формуле(18) определяются также краевой функцией, т.е. полученные алгоритмы соответствуют традициям решения задач МФ сотрудниками семинара академика В.В. Алексева.
- 5) Написана программа и получены три тестовых примера (21),(24),(26)с точными решениями, при выборе оптимального параметра аппроксимации $z=1$, с которым как неоднородная краевая задача, так и задача с однородными условиями решаются с двойной точностью. Таким образом, все свойства (точность, масштабируемость алгоритма, метод производящих функций, быстрдействие и. т. д.) с оптимальным параметром аппроксимации сохраняются как в однородной краевой задаче, так и в неоднородной задаче с краевыми условиями Дирихле.
- 6) Благодаря алгоритму инициализации(15)(16),(18),(19),(22),(24)(что проверено программой) численное решение с использованием алгоритма(11) – (20)по норме Чебышева близко к точному решению не только при согласованных начальных и краевых условиях, но и при отсутствии их согласования в классическом смысле решения задач УМФ.

ЛИТЕРАТУРА

- 1) Пастухов, Д.Ф., Пастухов, Ю.Ф., Волосова, Н.К. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова//Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018 . - №4. С.167 - 186.
- 2) Пикулин, В.П. Практический курс по уравнениям математической физики : учеб. пособие / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М.: Наука,1995. – 224 с.
- 3) Тихонов А.Н. Уравнения математической физики./А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука,2008,729 с.
- 4) А.Г. Свешников. Лекции по математической физике./А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – М.: Издательство МГУ,1993. – 352с.
- 5) Пастухов, Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
- 6) Волосова Н.К. Преобразование Радона и краевой задачи для уравнения Пуассона в стеганографии. Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 6-11 июля 2018г. С. 61.
- 7) Вакуленко С.П. К методу оценки состояния железнодорожного полотна / С.П. Вакуленко, К.А. Волосов, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2016. – Т. 14, № 3 (64). – С. 20–35.
- 8) Вакуленко С.П., Волосова А.К., Волосова Н.К. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях. / С.П. Вакуленко А. К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.

- 9) Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами./А.А. Козлов//Дифференциальные уравнения.-2008.-Т.44,№10. С.1319-1335.
- 10) Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае./А.А. Козлов//Дифференциальные уравнения.-2007.-Т.43,№5. С.621-627.
- 11) Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Группы преобразований сохраняющие вариационную задачу со старшими производными. / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов //Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018 . - №4. С.194 - 209.
- 12) Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Чернов С.В. Тензор обобщённой энергии. / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, С.В.Чернов //Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017 . - №12. С.78 - 100.
- 13) Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика, 7:1(2001), 285-288.

TO QUESTION ABOUT REDUCTIONS OF THE LUMPY MARGINAL PROBLEM DIRIHLE FOR WAVE EQUATION ON LENGTH

D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV, N. VOLOSOVA

The Offered algorithm of the decision general initial-marginal problem of the lumpy wave equation on length with lumpy marginal condition. The Certain notion to marginal function. The Source problem with lumpy marginal condition is reduced to two simple modified problem i.e. to problem with modified by right part and to problem with modified initial condition, but with uniform border condition. It Is Received decomposition to inaccuracy of the problem in most general type for optimum parameter of the approximations разностной schemes $z=1$. The First double amount to inaccuracy complies with amount for problem with uniform marginal condition; the second single amount contains the composed proportional derived even order on time from marginal function. The Writtened program on base of the built algorithm to reductions, are solved exactly and numerically three test examples, showing that marginal conditions Dirihle save all characteristic of the task with uniform marginal condition when use the modified conditions and marginal function.

АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.

Аннотация: Предложен алгоритм решения уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности с восьмым алгебраическим порядком погрешности. Для симметрической пяти диагональной матрицы получены формулы прогонки системы линейных уравнений с краевым условием Дирихле. Доказаны достаточные условия корректности формул прогонки вперёд для пяти диагональной симметрической матрицы. Разложение в ряд с симметричным шаблоном для оператора Пуассона содержит только частные производные чётного порядка по каждой из координат.

Ключевые слова: численные методы решения эллиптических уравнений математической физики, достаточные условия корректности формул прогонки пяти диагональной матрицы.

THE APPROXIMATION OF THE EQUATION OF THE POISSON ON RECTANGLE RAISED ACCURACY
Pastuhov D.F., Pastuhov YU.F.

The Abstract: is Offered algorithm of the decision of the equation of the Poisson on rectangle raised accuracy with eighth algebraic rather inaccuracy. Formulas of the dugout of the system of the linear equations are received for symmetrical five diagonal matrixes with marginal condition Dirihle. It is proved sufficient conditions to correctness molded the dugout for five diagonal symmetrical matrixes onward. The Decomposition in row Taylor symmetrical pattern for operator of the Poisson contains only quotient of the derived even order on each of coordinates.

The Keywords: the numerical methods of the decision of the elliptical equations mathematical physicists, sufficient conditions to correctness molded the dugout five diagonal matrixes.

Введение

Задачи с численным решением уравнения Пуассона встречаются во многих физико-технических приложениях, большой класс краевых задач математической физики также сводится к уравнению Пуассона на прямоугольнике. В статье [1] Блохина Н.С. исходную гидродинамическую задачу сводит к замкнутой системе четырёх уравнений в частных производных относительно функций тока и вихря жидкости, три из которых являются уравнениями параболического типа, а четвёртое представляет уравнение Пуассона относительно функции тока, а правая часть уравнения равна функции вихря. Система данных уравнений решается многократно по циклу методом чередующихся направлений. Следовательно, точность аппроксимации уравнения Пуассона является актуальной задачей в прикладной математике. Важно выработать численные алгоритмы решения уравнения Пуассона с большим алгебраическим порядком погрешности для экономии времени счёта и сохранения небольшой нормы погрешности. На стр.227[2] приведена явная разностная формула на девятиточечном шаблоне, позволяющая найти решение уравнения Пуассона методом простой итерации. Симметричным девяти точечным шаблоном можно покрыть весь прямоугольник по общим границам, и он является универсальным внутри прямоугольника и на его сторонах (границах). Приведенная авторами формула простой итерации даёт четвёртый порядок невязки уравнения Пуассона в равномерной норме и общую относительную погрешность $10^{-5} - 10^{-6}$. Такой же порядок относительной погрешности приводится в программах для решения эллиптических уравнений у А.А. Самарского [3].

В данной работе нами предложен алгоритм для решения уравнения Пуассона. По формуле простой итерации и с шестым порядком погрешности находятся узловые значения решения вблизи четырёх вершин прямоугольника. Методом прогонки с трёх диагональной матрицей, устойчивость которой обеспечивает частично неявная разностная формула с шестым порядком погрешности, находятся приграничные узловые значения численного решения. Внутренние узловые значения решения на следующем итерационном слое находятся по частично неявной итерационной формуле с десятым порядком погрешности на симметричном 25 точечном шаблоне с пяти диагональной матрицей прогонки. Кроме вывода аппроксимирующих формул с указанными порядками погрешности нами получено достаточное условие корректности метода прогонки с пяти диагональной матрицей. Приведенный нами алгоритм даёт восьмой порядок (при числе узлов порядка 1600) невязки уравнения Пуассона в равномерной норме и общую относительную погрешность $10^{-13} - 10^{-14}$ при одних и тех же параметрах задачи, что и в работе [2]. Приведен пример, решённый аналитически, и написана программа на языке FORTRAN, поддерживающем максимальные размерности массивы решения. Пользователи языка C++ могут запускать программу из оболочки Microsoft Visual Studio общей с FORTRAN и с C++.

В качестве теста для разностной схемы решим уравнение Пуассона на прямоугольнике:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x), & 0 < x, y < \pi \\ u(0, y) = u(\pi, y) = \sin(y) \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = \sin(x) \\ 0 \leq x, y \leq \pi \end{cases} \quad (1)$$

Проведём редукцию линейной задачи (1)[4]. Т.е. сведём решение (1) к сумме решений 3 простых систем: $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y)$. Первая система содержит одно неоднородное краевое условие:

$$1) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, & 0 < x, y < \pi \\ u_1(0, y) = u_1(\pi, y) = \sin(y) \\ u_1(x, 0) = u_1(x, \pi) = 0 \\ 0 \leq x, y \leq \pi \end{cases}$$

Решаем задачу 1) методом разделения переменных $u(x, y) = X(x)Y(y)$, $X''Y + XY'' = 0$

Выберем функцию $Y(y) = \sin(y)$, совпадающую с неоднородным граничным условием на первой части границы и автоматически обращающее в 0 решение на второй части границы. Тогда для $X(x)$:

$$X'' \sin(y) - X \sin(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X'' - X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Общее решение последней краевой задачи находим на множестве гиперболических функций

$$X(x) = A \operatorname{sh}(x) + B \operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Используя граничные условия:

$$X(0) = A \operatorname{sh}(0) + B \operatorname{ch}(0) = B = 1; X(\pi) = A \operatorname{sh}(\pi) + \operatorname{ch}(\pi) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)}$$

$$\text{Запишем решение 1) частной задачи: } u_1(x, y) = \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) \right) \sin(y)$$

Ищем решение второй частной задачи

$$2) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, & 0 < x, y < \pi \\ u_2(0, y) = u_2(\pi, y) = 0 \\ u_2(x, 0) = u_2(x, \pi) = \sin(x) \\ 0 \leq x, y \leq \pi \end{cases}$$

Аналогично, разделяя переменные, выбираем функцию $X(x) = \sin(x)$, автоматически удовлетворяющую первому граничному условию 2) и совпадающую со вторым граничным условием.

$$Y'' \sin(x) - Y \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Y'' - Y = 0 \\ Y(0) = Y(\pi) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Краевые задачи (3) и (2) совпадают с точностью до замены переменных $X \rightarrow Y, x \rightarrow y$.

Поэтому выписываем ответ для задачи 2):

$$u_2(x, y) = \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) \right) \sin(x)$$

Находим решение третьей задачи с уравнением Пуассона и однородными краевыми условиями:

$$3) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = \sin(x), & 0 < x, y < \pi \\ u_3(0, y) = u_3(\pi, y) = 0 \\ u_3(x, 0) = u_3(x, \pi) = 0 \\ 0 \leq x, y \leq \pi \end{cases}$$

Разделяя переменные, выбираем функцию X и повторяющую неоднородность уравнения Пуассона $X(x) = \sin(x)$, $u(x, y) = \sin(x)Y(y)$. При этом автоматически выполняется первое краевое условие задачи 3), решение подставим в уравнение Пуассона:

$$-\sin(x)Y + Y'' \sin(x) = \sin(x) \Leftrightarrow Y'' - Y = 1$$

$$\begin{cases} Y'' - Y = 1 \\ Y(0) = Y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Находим частное решение дифференциального уравнения краевой задачи (4).

$Y_{part}(y) = -1$. Общее решение однородного уравнения следующее:

$$Y(y) = Ash(y) + Bch(y)$$

Общее решение неоднородного ОДУ есть сумма частного неоднородного и общего однородного уравнений.

$$Y_n(y) = -1 + Ash(y) + Bch(y)$$

Теперь нужно выполнить краевые условия задачи (4)

$$Y_n(0) = -1 + Ash(0) + Bch(0) = B - 1 = 0 \Leftrightarrow B = 1$$

$$Y_n(\pi) = -1 + Ash(\pi) + ch(\pi) = 0 \Leftrightarrow A = \left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)} \right)$$

Тогда решение краевой задачи (4) есть

$$u_3(x, y) = \left(-1 + \left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)} \right) sh(y) + ch(y) \right) \sin(x)$$

Решение исходной задачи (1) есть сумма решений 3 частных задач:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) = \left(\left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)} \right) sh(x) + ch(x) \right) \sin(y) + \\ & + \left(\left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)} \right) sh(y) + ch(y) \right) \sin(x) + \left(-1 + \left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)} \right) sh(y) + ch(y) \right) \sin(x) \end{aligned} \quad (5)$$

Подстановкой формулы (5) в три уравнения системы(1) убеждаемся, что она является решением задачи (1), а в силу теорем существования и единственности для эллиптического уравнения [4] её единственным решением.

Нам придётся раскладывать в ряд Тейлора сумму узловых значения функций на симметрично расположенных узлах с центральным значением $u_{0,0}$. Для сокращения выкладок докажем:

Утверждение 1. Пусть множество узлов шаблона с центром $(0,0)$ можно разбить на прямоугольники с вершинами в данных узлах и сторонами параллельными координатным осям, тогда разложение оператора Лапласа имеет только производные с чётным порядком по каждой из координат.

Доказательство. Обозначим координаты 4 вершин прямоугольника $(h_1, h_2), (h_1, -h_2), (-h_1, -h_2), (h_1, -h_2)$ соответственно с узловыми значениями $u_{1,2}, u_{1,-2}, u_{-1,-2}, u_{1,-2}$. В силу равно удаления узлов от центра и симметрии шаблона аппроксимация оператора Лапласа содержит узловые значения $u_{1,2}, u_{1,-2}, u_{-1,-2}, u_{1,-2}$ с равными весами. По формуле Ньютона - Лейбница имеем:

$$\begin{aligned} u_{1,2} + u_{1,-2} + u_{-1,-2} + u_{1,-2} = & \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m-k}}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^m}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{m!} \left(C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + (-1)^{m+k} + (-1)^m + (-1)^k\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \left\{ \begin{array}{l} 1 - (-1)^k - 1 + (-1)^k = 0, m = 2l + 1 \\ 2 + 2(-1)^k = \begin{cases} 0, k = 2s + 1 \\ 4, k = 2s \end{cases}, m = 2l \end{array} \right\} = \\ & = 4u_{0,0} + 4 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{2l} \frac{C_{2l}^{2s}}{(2l)!} h_1^{2s} h_2^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-k}} \end{aligned} \quad (6)$$

В формуле(6) частные производные $\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-k}}$ вычисляются в центральном узле (0,0). Множество узлов

шаблона разбивается на четверки вершин, и согласно формуле (6) разложение в ряд Тейлора содержит производные только чётного порядка $2l$ (и чётного порядка по каждой переменной $2s, 2l - 2s$). Тогда разложение оператора Лапласа в ряд с учётом всех узлов шаблона содержит только производные чётных порядков $2s, 2l - 2s$ (хотя каждая четвёрка вершин имеет свой весовой коэффициент в квадратурной формуле). Что и завершает доказательство **утверждения 1**.

Для аппроксимации уравнения Пуассона на внутренних узлах равномерной прямоугольной сетки исследуем симметричный 25 точечный шаблон, центральный узел указан белым кружком, ось y направим вниз, ось x вправо, координаты узлов в масштабах (h_1, h_2) отмечены на рисунке целыми числами:

$$\begin{array}{ccccc} \bullet -2,2 & \bullet -1,2 & \bullet 0,2 & \bullet 1,2 & \bullet 2,2 \\ \bullet -2,1 & \bullet -1,1 & \bullet 0,1 & \bullet 1,1 & \bullet 2,1 \\ \bullet -2,0 & \bullet -1,0 & \circ 0,0 & \bullet 1,0 & \bullet 2,0 \\ \bullet -2,-1 & \bullet -1,-1 & \bullet 0,-1 & \bullet 1,-1 & \bullet 2,-1 \\ \bullet -2,-2 & \bullet -1,-2 & \bullet 0,-2 & \bullet 1,-2 & \bullet 2,-2 \end{array}$$

Для удобства выберем одинаковый шаг сетки по обоим переменным, т.е. случай $h_1 = h_2 = h$. Тогда равномерная сетка на прямоугольнике имеет различное число узлов на его сторонах. Аппроксимируем оператор Лапласа линейной квадратурной формулой:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} \equiv \Delta u \equiv f(x, y) &= \frac{1}{h^2} (C_0 u_{0,0} + C_1 (u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}) + C_2 (u_{1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,1} + u_{-1,-1}) + \\ & C_3 (u_{0,2} + u_{0,-2} + u_{2,0} + u_{-2,0}) + C_4 (u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,-2} + u_{-2,1} + u_{-1,2} + u_{2,-1} + u_{-1,-2} + u_{-2,-1}) + \\ & C_5 (u_{2,2} + u_{2,-2} + u_{-2,2} + u_{-2,-2})) \end{aligned} \quad (7)$$

Формула (7) использует все 25 узловых значений шаблона. Разложим в ряд Тейлора суммы четвёрок узловых значений с точностью до $O(h^{10})$ по формуле (6):

$$\begin{aligned} u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0} &= 4u_{0,0} + h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \\ & \frac{h^6}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{h^8}{20160} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + O(h^{10}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Аналогично: } u_{1,1} + u_{-1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,-1} &= 4u_{0,0} + 2h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{6} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \\ & \frac{h^6}{180} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{h^8}{10080} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + 28 \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + 70 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + 28 \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + O(h^{10}) \end{aligned} \quad (9)$$

Заменим в (8) $h \rightarrow 2h$ и получим сразу формулу (10)

$$\begin{aligned} u_{0,2} + u_{0,-2} + u_{2,0} + u_{-2,0} &= 4u_{0,0} + 4h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{4h^4}{3} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \\ & \frac{8h^6}{45} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{4h^8}{315} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + O(h^{10}) \end{aligned} \quad (10)$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
& u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,-2} + u_{-2,1} + u_{-1,2} + u_{2,-1} + u_{-1,-2} + u_{-2,-1} = 8u_{0,0} + \frac{4(1^2 + 2^2)}{2!} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\
& \frac{h^4}{24} \left(4(1^4 + 2^4) \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + 4 \cdot 6(1^2 2^2 + 2^2 \cdot 1^2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \frac{h^6}{720} \left(4(1^6 + 2^6) \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + 4 \cdot 15 \cdot \right. \\
& \left. (1^2 2^4 + 2^2 \cdot 1^4) \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \frac{h^8}{40320} \left(4(1^8 + 2^8) \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + 4 \cdot 28(1^6 2^2 + 1^2 2^6) \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^6} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. 4 \cdot 70(1^4 2^4 + 1^4 2^4) \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^4 \partial x^4} \right) \right) \right) + O(h^{10}) = 8u_{0,0} + 10h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\
& \frac{h^4}{6} \left(17 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + 48 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \frac{h^6}{180} \left(65 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + 300 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) \right) + \\
& + \frac{h^8}{10080} \left(257 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + 1904 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \right) + 2240 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \right) + O(h^{10}) \quad (11)
\end{aligned}$$

Заменим в (9) $h \rightarrow 2h$ и получим формулу (12):

$$\begin{aligned}
& u_{2,2} + u_{2,-2} + u_{-2,2} + u_{-2,-2} = 4u_{0,0} + 8h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{8h^4}{3} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \\
& \frac{16h^6}{45} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{8h^8}{315} \left(\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + 28 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \right) + 70 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \right) \\
& + O(h^{10}) \quad (12)
\end{aligned}$$

Подставляя в формулу(7) разложения (8)-(12), группируя слагаемые по степеням h , получим:

$$\begin{aligned}
\Delta u \equiv f(x, y) &= \frac{u_{0,0}}{h^2} (C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 4C_3 + 8C_4 + 4C_5) + \Delta u (C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 10C_4 + 8C_5) + \\
& h^2 \left(\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4C_3}{3} + \frac{17C_4}{6} + \frac{8C_5}{3} \right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} (C_2 + 8C_4 + 16C_5) \right) + \\
& h^4 \left(\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{65C_4}{180} + \frac{16C_5}{45} \right) + \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) \left(\frac{15}{180} C_2 + \frac{300}{180} C_4 + \frac{16}{3} C_5 \right) \right) + \\
& h^6 \left(\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) \left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{257C_4}{10080} + \frac{8C_5}{315} \right) + \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \right) \left(\frac{28}{10080} C_2 + \frac{1904}{10080} C_4 + \frac{224}{315} C_5 \right) \right) + \\
& \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \left(\frac{70}{10080} C_2 + \frac{2240}{10080} C_4 + \frac{560}{315} C_5 \right) + O(h^8) \quad (13)
\end{aligned}$$

Замечание 1. Формула(13) аппроксимирует уравнение Пуассона с точностью до $O(h^8)$.

Левая и правая части формулы(13) должны быть равны с точностью до $O(h^8)$. В пределе при $h \rightarrow 0$

коэффициент $(C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 4C_3 + 8C_4 + 4C_5) = 0$ при $\frac{u_{0,0}}{h^2}$ равен 0, иначе первое слагаемое правой

части стремится к бесконечности. Коэффициент при Δu равен единице для тождественности (13) с нулевой

степени по $h^0: (C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 10C_4 + 8C_5 = 1)$. Так как

$$f_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, f_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2},$$

то в скобке при h^2 могут присутствовать только частные производные f_{xx}, f_{yy} (частные производные четного порядка и по x и по y), следовательно, получаем уравнение:

$$2\left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4C_3}{3} + \frac{17C_4}{6} + \frac{8C_5}{3}\right) = C_2 + 8C_4 + 16C_5$$

Учитывая операторное равенство для $\Delta^3 u$, свведём к нему коэффициент в (13) при h^4 :

$$\Delta^3 u \equiv \Delta^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^3 u = \left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} + 3\left(\frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4}\right) + \frac{\partial^6}{\partial y^6}\right) u = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4},$$

получим условие на коэффициенты $3\left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{65C_4}{180} + \frac{16C_5}{45}\right) = \frac{15}{180}C_2 + \frac{300}{180}C_4 + \frac{16}{3}C_5$

Учитывая операторное равенство для $\Delta^4 u$, свведём к нему коэффициент в (13) при h^6 :

$$\Delta^4 u \equiv \Delta^3 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^4 u = \left(\frac{\partial^8}{\partial x^8} + 4\left(\frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6}\right) + 6\frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{\partial^8}{\partial y^8}\right) u,$$

Получим два уравнения на коэффициенты

$$4\left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{257C_4}{10080} + \frac{8C_5}{315}\right) = \frac{28}{10080}C_2 + \frac{1904}{10080}C_4 + \frac{224}{315}C_5$$

$$6\left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{257C_4}{10080} + \frac{8C_5}{315}\right) = \frac{70}{10080}C_2 + \frac{2240}{10080}C_4 + \frac{560}{315}C_5$$

Соберём все написанные условия на коэффициенты в неоднородную систему линейных уравнений, предварительно приводя элементарные преобразования:

$$\begin{cases} C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 4C_3 + 8C_4 + 4C_5 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 10C_4 + 8C_5 = 1 \\ C_1 - 4C_2 + 16C_3 - 14C_4 - 64C_5 = 0 \\ C_1 - 8C_2 + 64C_3 - 70C_4 - 512C_5 = 0 \\ C_1 - 12C_2 + 256C_3 - 438C_4 - 3072C_5 = 0 \\ 3C_1 - 64C_2 + 768C_3 - 698C_4 - 16384C_5 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Система линейных неоднородных уравнений (14) имеет единственное решение

$$C_0 = -\frac{173}{70}, C_1 = \frac{8}{21}, C_2 = \frac{8}{45}, C_3 = \frac{1}{30}, C_4 = \frac{4}{315}, C_5 = \frac{1}{2520} \quad (15)$$

Используя явный вид коэффициентов (15) перепишем формулу (7):

$$\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4C_3}{3} + \frac{17C_4}{6} + \frac{8C_5}{3} = \frac{1}{2}(C_2 + 8C_4 + 16C_5) = \frac{4}{45} + \frac{16}{315} + \frac{8}{2520} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{65C_4}{180} + \frac{16C_5}{45} = \frac{1}{3}\left(\frac{15}{180}C_2 + \frac{300}{180}C_4 + \frac{16}{3}C_5\right) = \frac{8}{1620} + \frac{40}{5670} + \frac{16}{22680} = \frac{4}{315}$$

$$\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{257C_4}{10080} + \frac{8C_5}{315} = \frac{1}{4}\left(\frac{28}{10080}C_2 + \frac{1904}{10080}C_4 + \frac{224}{315}C_5\right) = \frac{1}{8100} + \frac{68}{113400} + \frac{1}{14175} = \frac{1}{1260}$$

$$f_{0,0} + h^2 \frac{\Delta f}{7} + \frac{4h^4}{315} (\Delta f)^2 + \frac{h^6}{1260} (\Delta f)^3 = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{173}{70} u_{0,0} + \frac{8}{21} (u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}) + \frac{8}{45} (u_{1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,1} + u_{-1,-1}) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{30} (u_{0,2} + u_{0,-2} + u_{2,0} + u_{-2,0}) + \frac{4}{315} (u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,-2} + u_{-2,1} + u_{-1,2} + u_{2,-1} + u_{-1,-2} + u_{-2,-1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2520} (u_{2,2} + u_{2,-2} + u_{-2,2} + u_{-2,-2}) + O(h^8) \right) \quad (16)$$

Замечание 2. Из формулы (16) видно, что квадратурная формула уравнения Пуассона для внутренних узлов сетки содержит степенной ряд относительно аргумента $h^2 \Delta f$ - результат того, что точный

дифференциальный оператор Δu заменяется приближённой квадратурной формулой с точностью $O(h^{2l})$, как видно из (16), старшая степень степенного ряда равна $l-1$.

Выразим из формулы(16) центральное узловое значение $u_{0,0}$ и присвоим ему верхний индекс итерации на единицу больше, чем остальным узловым значениям решения, тогда получим формулу простой итерации:

$$u_{0,0}^{k+1} = \frac{70}{173} \left[\frac{8}{21} (u_{0,1}^k + u_{0,-1}^k + u_{1,0}^k + u_{-1,0}^k) + \frac{8}{45} (u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k) + \right. \\ \left. \frac{1}{30} (u_{0,2}^k + u_{0,-2}^k + u_{2,0}^k + u_{-2,0}^k) + \frac{4}{315} (u_{1,2}^k + u_{2,1}^k + u_{1,-2}^k + u_{-2,1}^k + u_{-1,2}^k + u_{2,-1}^k + u_{-1,-2}^k + u_{-2,-1}^k) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2520} (u_{2,2}^k + u_{2,-2}^k + u_{-2,2}^k + u_{-2,-2}^k) - h^2 \left(f_{0,0} + h^2 \frac{\Delta f}{7} + \frac{4h^4}{315} (\Delta f)^2 + \frac{h^6}{1260} (\Delta f)^3 \right) + O(h^{10}) \right] \quad (17)$$

С точки зрения устойчивости численного решения предпочтительнее использовать неявные итерационные формулы[3], тем более что, тождественно преобразуя формулу (16), мы не изменим порядок её погрешности. Запишем узловые значения $u_{0,-2}^{k+1}, u_{0,-1}^{k+1}, u_{0,0}^{k+1}, u_{0,1}^{k+1}, u_{0,2}^{k+1}$ (в вертикальном разрезе, проходящем через узел(0,0)) в левой части уравнения на $k+1$ слое итерации, а в правую часть перенесём все остальные слагаемые, в которой узловые значения решения находятся в слое с номером итерации k :

$$\frac{1}{30} u_{0,-2}^{k+1} + \frac{8}{21} u_{0,-1}^{k+1} - \frac{173}{70} u_{0,0}^{k+1} + \frac{8}{21} u_{0,1}^{k+1} + \frac{1}{30} u_{0,2}^{k+1} = -\frac{8}{21} (u_{-1,0}^k + u_{1,0}^k) - \frac{1}{30} (u_{-2,0}^k + u_{2,0}^k) - \\ - \frac{8}{45} (u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k) - \frac{4}{315} (u_{1,2}^k + u_{2,1}^k + u_{1,-2}^k + u_{-2,1}^k + u_{-1,2}^k + u_{2,-1}^k + u_{-1,-2}^k + u_{-2,-1}^k) - \\ - \frac{1}{2520} (u_{2,2}^k + u_{2,-2}^k + u_{-2,2}^k + u_{-2,-2}^k) + h^2 \left(f_{0,0} + h^2 \frac{\Delta f}{7} + \frac{4h^4}{315} (\Delta f)^2 + \frac{h^6}{1260} (\Delta f)^3 \right) + O(h^{10}) \quad (18)$$

Неоднородная линейная система уравнений (18) относительно неизвестных узловых значений $u_{j,i}^{k+1}$ имеет пяти диагональную матрицу системы, которую можно решить методом прогонки. Рассмотрим сетку (множество из $n+1$ произвольных узлов) $\omega_{n+1} = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$. Запишем систему линейных уравнений с пяти диагональной матрицей в общем виде:

$$A_{1k} x_{k-2} + A_{2k} x_{k-1} - C_k x_k + B_{1k} x_{k+1} + B_{2k} x_{k+2} = F_k, k = \overline{2, n-2} \quad (19)$$

Граничными условиями для (20) являются заданными значения решения в двух приграничных слоях, т.е. x_0, x_1, x_{n-1}, x_n - известны, $x_k, k = \overline{2, n-2}$ подлежит решению с использованием (19). В разностном уравнении (19) максимальная разность индексов равна 4, что соответствует краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения 4 порядка, а задание 4 приграничных значений функций является аналогом граничного условия 1 рода (Дирихле) для уравнения 2 порядка с 2 известными концевыми значениями функции на отрезке.

$$\text{Решение (19) ищем в виде: } x_k = \lambda_{1k} x_{k+1} + \lambda_{2k} x_{k+2} + \nu_k, k = \overline{n-2, 2} \quad (20)$$

$$\text{Тогда из(20): } x_{k-1} = \lambda_{1k-1} x_k + \lambda_{2k-1} x_{k+1} + \nu_{k-1}, x_{k-2} = \lambda_{1k-2} x_{k-1} + \lambda_{2k-2} x_k + \nu_{k-2} \quad (21)$$

Выразим и подставим x_{k-2}, x_{k-1} в (19) используя (21):

$$A_{1k} (\lambda_{1k-2} (\lambda_{1k-1} x_k + \lambda_{2k-1} x_{k+1} + \nu_{k-1}) + \lambda_{2k-2} x_k + \nu_{k-2}) + A_{2k} (\lambda_{1k-1} x_k + \lambda_{2k-1} x_{k+1} + \nu_{k-1}) - \\ - C_k x_k + B_{1k} x_{k+1} + B_{2k} x_{k+2} = F_k \Leftrightarrow x_k = \frac{x_{k+1} (B_{1k} + A_{2k} \lambda_{2k-1} + A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{2k-1})}{C_k - A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{1k-1} - A_{1k} \lambda_{2k-2} - A_{2k} \lambda_{1k-1}} + \\ + \frac{x_{k+2} B_{2k}}{C_k - A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{1k-1} - A_{1k} \lambda_{2k-2} - A_{2k} \lambda_{1k-1}} + \frac{A_{1k} \lambda_{1k-2} \nu_{k-1} + A_{1k} \nu_{k-2} + A_{2k} \nu_{k-1} - F_k}{C_k - A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{1k-1} - A_{1k} \lambda_{2k-2} - A_{2k} \lambda_{1k-1}} \quad (22)$$

Сравнивая формулы(20),(22) получим значения прогоночных коэффициентов:

$$\lambda_{1k} = \frac{B_{1k} + A_{2k} \lambda_{2k-1} + A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{2k-1}}{C_k - A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{1k-1} - A_{1k} \lambda_{2k-2} - A_{2k} \lambda_{1k-1}}, \lambda_{2k} = \frac{B_{2k}}{C_k - A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{1k-1} - A_{1k} \lambda_{2k-2} - A_{2k} \lambda_{1k-1}},$$

$$v_k = \frac{A_{1k}\lambda_{1k-2}v_{k-1} + A_{1k}v_{k-2} + A_{2k}v_{k-1} - F_k}{C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}}, k = \overline{2, n-2} \quad (23)$$

Кроме того, из формул (20) ($k = 0, 1$) следует, что

$$x_0 = \lambda_{10}x_1 + \lambda_{20}x_2 + v_0, x_1 = \lambda_{11}x_2 + \lambda_{21}x_3 + v_1, \quad (24)$$

$$x_{n-2} = \lambda_{1n-2}x_{n-1} + \lambda_{2n-2}x_n + v_{n-2}$$

Из формул (24) видно, что x_0, x_1 принимают фиксированные значения (условие Дирихле) при любых соседних узловых значениях, если положить $v_0 = x_0, \lambda_{10} = \lambda_{20} = 0, v_1 = x_1, \lambda_{11} = \lambda_{21} = 0$.

После определения коэффициентов $v_0, \lambda_{10}, \lambda_{20}, v_1, \lambda_{11}, \lambda_{21}$ по формулам (23) определяются остальные коэффициенты $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, v_k$ (*формулы прогонки вперёд* $k = \overline{2, n-2}$). Зная x_{n-1}, x_n по формуле (24) находим x_{n-2} , так как $\lambda_{1n-2}, \lambda_{2n-2}, v_{n-2}$ найдены по формуле (23) прогонкой вперёд. Используя (20) находим все неизвестные узловые значения (*формулы прогонки назад* $k = \overline{n-2, 2}$). Доказано:

Утверждение 2. Решение линейной системы уравнений с пяти диагональной матрицей (19) и известными фиксированными значениями x_0, x_1, x_{n-1}, x_n даётся алгоритмом – формулы прогонки вперёд (23) с краевыми условиями ($v_0 = x_0, \lambda_{10} = \lambda_{20} = 0, v_1 = x_1, \lambda_{11} = \lambda_{21} = 0$) и формулы прогонки назад (20).

Коэффициенты неявного разностного уравнения (18) свяжем с прогоночными коэффициентами (19):

$$A_{1k} = \frac{1}{30}, A_{2k} = \frac{8}{21}, C_k = \frac{173}{70}, B_{1k} = \frac{8}{21}, B_{2k} = \frac{1}{30}, F_k = -\frac{8}{21}(u_{-1,0}^k + u_{1,0}^k) - \frac{1}{30}(u_{-2,0}^k + u_{2,0}^k) - \frac{8}{45}(u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k) - \frac{4}{315}(u_{1,2}^k + u_{2,1}^k + u_{1,-2}^k + u_{-2,1}^k + u_{-1,2}^k + u_{2,-1}^k + u_{-1,-2}^k + u_{-2,-1}^k) - \frac{1}{2520}(u_{2,2}^k + u_{2,-2}^k + u_{-2,2}^k + u_{-2,-2}^k) + h^2 \left(f_{0,0} + h^2 \frac{\Delta f}{7} + \frac{4h^4}{315} (\Delta f)^2 + \frac{h^6}{1260} (\Delta f)^3 \right), k = \overline{2, n-2} \quad (25)$$

Утверждение 3. Пусть пяти диагональная матрица линейной системы уравнений (19) с краевым условием Дирихле (известны $x_0, x_1, x_{n-1}, x_n \Leftrightarrow \lambda_{10} = \lambda_{11} = \lambda_{20} = \lambda_{21} = 0$) является:

- 1) симметрической: $A_{1k} = B_{2k}, A_{2k} = B_{1k}, k = \overline{2, n-2} (A_{1k} \neq 0, A_{2k} \neq 0)$
- 2) $\frac{3}{2}(|A_{1k}| + |A_{2k}| + |B_{1k}| + |B_{2k}|) < |C_k| (k = \overline{2, n-2}), \frac{3}{2}(|A_{21}| + |B_{11}| + |B_{21}|) < |C_1| (k = 1),$
 $\frac{3}{2}(|B_{10}| + |B_{20}|) < |C_0| (k = 0), \frac{3}{2}(|A_{1n-1}| + |A_{2n-1}| + |B_{1n-1}|) < |C_{n-1}| (k = n-1), \frac{3}{2}(|A_{1n}| + |A_{2n}|) < |C_n| (k = n)$

второе условие можно назвать *строгим полуторным диагональным преобладанием*

Тогда:

$$1) |\lambda_{1k}| < 1, |\lambda_{2k}| < 1, k = \overline{2, n-2}$$

2) Формулы прогоночных коэффициентов (23) корректны

Доказательство 1) утверждения проведём по индукции. Для базы индукции $k = 0, 1, 2$ из (23) имеем:

$$|\lambda_{10}| = |\lambda_{11}| = 0 < 1, |\lambda_{12}| = \left| \frac{B_{12} + A_{22}\lambda_{21} + A_{12}\lambda_{10}\lambda_{21}}{C_2 - A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11} - A_{12}\lambda_{20} - A_{22}\lambda_{11}} \right| = \left| \frac{B_{12}}{C_2} \right| < \left| \frac{C_2}{C_2} \right| = 1$$

$$|\lambda_{20}| = |\lambda_{21}| = 0 < 1, |\lambda_{22}| = \left| \frac{B_{22}}{C_2 - A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11} - A_{12}\lambda_{20} - A_{22}\lambda_{11}} \right| = \left| \frac{B_{22}}{C_2} \right| < \left| \frac{C_2}{C_2} \right| = 1$$

Если $|\lambda_{1k-1}| < 1, |\lambda_{2k-1}| < 1, |\lambda_{1k-2}| < 1, |\lambda_{2k-2}| < 1$, то согласно (23) и утверждению 3 при $k = \overline{2, n-2}$:

$$|\lambda_{2k}| = \frac{|B_{2k}|}{|C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}|} < \frac{|B_{2k}|}{|C_k| - |B_{2k}| - |A_{1k}| - |A_{2k}|} < \frac{|B_{2k}|}{|B_{1k}| + \frac{1}{2}(|B_{2k}| + |B_{1k}| + |A_{1k}| + |A_{2k}|)} < \frac{|B_{2k}|}{|B_{2k}|} = 1$$

$$|\lambda_{1k}| = \frac{|B_{1k} + A_{2k}\lambda_{2k-1} + A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{2k-1}|}{|C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}|} < \frac{|B_{1k}| + |A_{2k}| + |A_{1k}|}{|C_k| - |B_{2k}| - |A_{1k}| - |A_{2k}|} < \frac{|B_{1k}| + |A_{2k}| + |A_{1k}|}{|B_{1k}| + \frac{1}{2}(|B_{2k}| + |B_{1k}| + |A_{1k}| + |A_{2k}|)} =$$

$$= \frac{|B_{1k}| + |A_{2k}| + |A_{1k}|}{|B_{1k}| + |A_{1k}| + |A_{2k}|} = 1. \text{ Т.е. из } |\lambda_{1k-1}| < 1, |\lambda_{2k-1}| < 1, |\lambda_{1k-2}| < 1, |\lambda_{2k-2}| < 1 \Rightarrow |\lambda_{1k}| < 1, |\lambda_{2k}| < 1$$

Что и требовалось доказать.

2) Для корректности формул (23) достаточно, чтобы знаменатель формул не обращался в 0.

С учётом доказанного первого утверждения $|\lambda_{10}| = |\lambda_{11}| = 0 < 1, |\lambda_{20}| = |\lambda_{21}| = 0 < 1,$

$|\lambda_{1k}| < 1, |\lambda_{2k}| < 1, k = 2, n-2$ имеем $\forall k = 2, n-2$:

$$|C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}| > |C_k| - |B_{2k}| - |A_{1k}| - |A_{2k}| > |B_{1k}| + \frac{1}{2}(|B_{2k}| + |B_{1k}| + |A_{1k}| + |A_{2k}|) > 0$$

Другими словами, знаменатели трёх формул (23) сохраняют знак и в 0 не обращаются. Что и т.д.

Замечание 3. Непосредственной проверкой убеждаемся коэффициенты линейной системы уравнений (25) удовлетворяют условию корректности (**утверждение 3**):

$$\frac{173}{70} \approx 2.471 > \frac{3}{2} \left(\frac{1}{30} + \frac{8}{21} \right) = 1.242 - \text{ неявная система разностных уравнений (25) с пяти диагональной}$$

симметрической матрицей устойчива относительно прогночных формул(20),(23),(24).

Аппроксимация граничного оператора

Для шаблона граничного оператора рассмотрим симметричный 15 точечный шаблон, координатные оси x, y направлены вверх и вправо, центральный узел с координатами $(0,0)$ выделен светлым кружком.

Границей квадрата является его левая сторона и 5 узлы с $x = -1$, расположенные на ней.

- -1,2 • 0,2 • 1,2
- -1,1 • 0,1 • 1,1
- -1,0 • 0,0 • 1,0
- -1,-1 • 0,-1 • 1,-1
- -1-2 • 0,-2 • 1,-2

Рассмотрим случай с одинаковым шагом сетки по обоим переменным $h_1 = h_2 = h$.

Аппроксимируем оператор Лапласа линейной квадратурной формулой:

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv \Delta u \equiv f(x, y) = \frac{1}{h^2} (C_0 u_{0,0} + C_1 (u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}) + C_2 (u_{1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,1} + u_{-1,-1}) + C_3 (u_{0,2} + u_{0,-2}) + C_4 (u_{1,2} + u_{-1,2} + u_{-1,-2} + u_{1,-2})) \quad (26)$$

Используем формулу (6) для разложения в ряд Тейлора суммы 4 узловых значений в вершинах прямоугольника

$$u_{1,2} + u_{-1,2} + u_{-1,-2} + u_{1,-2} = 4u_{0,0} + 2h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{6} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 24 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 16 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^6}{180} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 60 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 240 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 64 \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{h^8}{10080} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + 112 \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + 1120 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + 1792 \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} + 256 \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + O(h^{10}) \quad (27)$$

$$u_{0,2} + u_{0,-2} = 2u_{0,0} + 4h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{4h^4}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{8h^6}{45} \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + \frac{4h^8}{315} \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} + O(h^{10}) \quad (28)$$

Подставим разложения (27),(28),(8),(9) в формулу (26) и сгруппируем слагаемые по степеням h^{2l} :

$$\begin{aligned} \Delta u \equiv f(x, y) = & \frac{u_{0,0}}{h^2} (C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 2C_3 + 4C_4) + \Delta u (C_1 + 2C_2 + 2C_4) + u_{yy} (4C_3 + 6C_4) + \\ & h^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{C_4}{6} \right) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4}{3}C_3 + \frac{8C_4}{3} \right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} (C_2 + 4C_4) \right) + \\ & h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{C_4}{180} \right) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} \left(\frac{15}{180}C_2 + \frac{C_4}{3} \right) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \left(\frac{15}{180}C_2 + \frac{4C_4}{3} \right) + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{64C_4}{180} \right) \right) + \\ & h^6 \left\{ \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} \left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{C_4}{10080} \right) + \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} \left(\frac{28}{10080}C_2 + \frac{112}{10080}C_4 \right) + \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \left(\frac{70}{10080}C_2 + \frac{1120}{10080}C_4 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \left(\frac{28}{10080}C_2 + \frac{1792}{10080}C_4 \right) + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{256C_4}{10080} \right) + O(h^8) \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

Левая и правая части формулы(29) должны быть равны с точностью до $O(h^8)$. В пределе при $h \rightarrow 0$ коэффициент $C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 2C_3 + 4C_4 = 0$ при $\frac{u_{0,0}}{h^2}$ равен 0, иначе первое слагаемое правой части стремится к бесконечности. Коэффициент при Δu равен единице для тождественности (13) с нулевой степенью по h : $(C_1 + 2C_2 + 2C_4 = 1)$. Коэффициент при u_{yy} должен быть равен 0, т.е. $4C_3 + 6C_4 = 0$. Все остальные слагаемые в (13) необходимо выразить через частные производные чётного порядка (и по x и по y) от правой части уравнения Пуассона – функции $f(x, y)$. Так как в скобке при h^2 могут присутствовать только частные производные f_{xx}, f_{yy} , то в общем случае получаем:

$$B_1 f_{xx} + B_2 f_{yy} = B_1 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + B_2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = B_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (B_1 + B_2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

В силу последнего уравнения в (29)имеем связь: $\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{C_4}{6} + \frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4}{3}C_3 + \frac{8C_4}{3} = (C_2 + 4C_4)$

Найдём связь коэффициентов в (29) с h^4 . Вообще говоря, сумма со всеми чётными производными $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} B_1 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + B_2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + B_3 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} &= B_1 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} \right) + B_2 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + B_3 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial y^4 \partial x^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) = \\ &= B_1 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + (B_1 + B_2) \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + (B_2 + B_3) \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + B_3 \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \end{aligned}$$

В силу последнего уравнения в скобке с h^4 в(29) получаем уравнение связи:

$$\frac{15}{180}C_2 + \frac{C_4}{3} - \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{C_4}{180} \right) = \frac{15}{180}C_2 + \frac{4C_4}{3} - \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{64C_4}{180} \right) \Leftrightarrow 32C_3 - 117C_4 = 0$$

По сравнению с формулой(13),у которой восьмой алгебраический порядок погрешности погрешность (29) равен шести, т.е. h^6 . Соберём все условия на коэффициенты в систему линейных уравнений, предварительно приводя элементарные преобразования:

$$\begin{cases} C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 2C_3 + 4C_4 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 2C_4 = 1 \\ 4C_3 + 6C_4 = 0 \\ C_1 - 4C_2 + 8C_3 - 7C_4 = 0 \\ 32C_3 - 117C_4 = 0 \end{cases} \quad (30)$$

Система линейных неоднородных уравнений (30) имеет единственное решение

$$C_0 = -\frac{10}{3}, C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = \frac{1}{6}, C_3 = 0, C_4 = 0, \frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} = \frac{1}{12}, \frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} = \frac{1}{360}, \frac{15}{180}C_2 = \frac{1}{72} \quad (31)$$

Перепишем формулу(29) с найденными коэффициентами (31)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h^2} \left(-\frac{10}{3} u_{0,0} + \frac{2}{3} (u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}) + \frac{1}{6} (u_{1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,1} + u_{-1,-1}) \right) = \\
& = \Delta u + h^2 \left(\frac{1}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + h^4 \left(\frac{1}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{1}{72} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) \right) + O(h^6) = \\
& = f + \frac{h^2}{12} \Delta f + h^4 \left(\frac{1}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) + \frac{1}{90} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + O(h^6) = f_{0,0} + \frac{h^2}{12} \Delta f + h^4 \left(\frac{\Delta f^2}{360} + \frac{1}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + O(h^6) \quad (32)
\end{aligned}$$

Из (32) явно выразим $u_{0,0}^{k+1}$ центральное узловое значение на $k+1$ слое итерации, остальные узловые значения расположим на k слое итерации

$$\begin{aligned}
u_{0,0}^{k+1} &= \frac{1}{5} (u_{0,1}^k + u_{0,-1}^k + u_{1,0}^k + u_{-1,0}^k) + \frac{1}{20} (u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k) - \\
& - \frac{3}{10} h^2 f_{0,0} - h^4 \frac{\Delta f}{40} - h^6 \frac{\Delta f^2}{1200} - \frac{h^6}{600} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + O(h^8) \quad (33)
\end{aligned}$$

Формула простой итерации, приведенная в сборнике[2] Волкова К.Н. и др., отличается от полученной нами формулы (33) отсутствием последних двух слагаемых, поэтому у нас порядок погрешности на 2 выше, а формула точнее. Из формулы (32) легко образовать неявную формулу для линейной системы уравнений с трёх диагональной матрицей прогонки, получаемая как частный случай из (19) ($A_{1k} = B_{2k} = 0$):

$$\frac{2}{3} u_{0,-1}^{k+1} - \frac{10}{3} u_{0,0}^{k+1} + \frac{2}{3} u_{0,1}^{k+1} = -\frac{1}{6} (u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k) - \frac{2}{3} (u_{1,0}^k + u_{-1,0}^k) + h^2 \left(f_{0,0} + \frac{h^2}{12} \Delta f + h^4 \left(\frac{\Delta f^2}{360} + \frac{1}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right) \quad (34)$$

$$A_k x_{k-1} - C_k x_k + B_k x_{k+1} = F_k, A_k = B_k = \frac{2}{3}, C_k = \frac{10}{3},$$

$$F_k = -\frac{1}{6} (u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k) - \frac{2}{3} (u_{1,0}^k + u_{-1,0}^k) + h^2 \left(f_{0,0} + \frac{h^2}{12} \Delta f + h^4 \left(\frac{\Delta f^2}{360} + \frac{1}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right), k = \overline{1, n-1} \quad (35)$$

$$\text{Из (21),(23) получим формулы прогонки назад: } x_k = \lambda_k x_{k+1} + \nu_k, k = \overline{n-1, 1} \quad (36)$$

$$\lambda_k = \frac{B_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}, \nu_k = \frac{A_k \nu_{k+1} - F_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}, k = \overline{1, n-1}, \lambda_0 = 0, \nu_0 = x_0 \quad (37)$$

и (37) формулы прогонки вперёд. Условие устойчивости $|A_k| + |B_k| < |C_k|, k = \overline{n-1, 1} \Leftrightarrow \frac{4}{3} < \frac{10}{3}$

выполнено автоматически[3]. Программа для решения уравнения Пуассона написана на FORTRAN:

```

program puasson;use dfimsl
integer(8),parameter::n=120,n1=60,m=20000; integer(8)::i,j,k,kk
real(8)::u(0:m+1,0:n1+1,0:n+1),a,b,d,pi,x,y
real(8)::res(0:n1+1,0:n+1),delta(0:n1+1,0:n+1),max,fif1(0:n+1),fif0(0:n+1),fif10(0:n+1),fif11(0:n+1)
real(8)::c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,nu00(0:n+1),ll(0:n+1)
real(8)::c(0:n+1),fif(0:n+1),l1(0:n+1),l2(0:n+1),nu(0:n+1),nu0(0:n+1),l(0:n+1)
real(8)::cch,ssh,a1(0:n+1),a2(0:n+1),b1(0:n+1),b2(0:n+1),f,laplf1,laplf2,laplf
real(8)::h1,h2,h,aa(0:n+1),bb(0:n+1),c0(0:n+1)
real(8)::ss1,ss2,aa1,aa2,bb1,bb2,cc ,c11,c22,c33,c44,c55,c66
cch(x)=(dexp(x)+dexp(-x))/2d0;ssh(x)=(dexp(x)-dexp(-x))/2d0
aa1(x,y)=dsin(y);aa2(x,y)=dsin(y);bb1(x,y)=dsin(x)
bb2(x,y)=dsin(x);f(x,y)=dsin(x)
laplf1(h1,x,y)=-h1*h1*dsin(x);ss1(h1,x,y)=h1*h1*h1*dsin(x)
ss2(h1,x,y)=-h1*h1*h1*h1*dsin(x);laplf(h1,x,y)=-h1*h1*dsin(x)
max=-1000d0;pi=2d0*dasin(1d0);a=0d0;b=2d0*pi;cc=0d0;d=pi
h1=(b-a)/dfloat(n);h2=(d-cc)/dfloat(n1)
do i=1,n-1,1;do j=1,n1-1,1
u(0,j,i)=0d0
enddo;enddo
do k1=0,m,1; do i=0,n,1; do j=0,n1,1
x=a+h1*dfloat(i); y=cc+h1*dfloat(j)
if(i==0.or.i==n.or.j==0.or.j==n1)then

```

```

u(k1,0,i)=bb1(x,cc);u(k1,n1,i)=bb2(x,d);u(k1,j,0)=aa1(a,y);u(k1,j,n)=aa2(b,y)
endif; enddo; enddo; enddo
do kk=0,n1,1
a1(kk)=1d0/30d0;a2(kk)=8d0/21d0;b1(kk)=8d0/21d0;b2(kk)=1d0/30d0;c(kk)=173d0/70d0
enddo
do k=0,m,1; do i=1,n-1,1; do j=1,n1-1,1
if((i==1.and.j==1).or.(i==1.and.j==n1-1).or.(i==n-1.and.j==n1-1).or.(i==n-1.and.j==1))then
y=cc+h1*dfloat(j);x=a+h1*dfloat(i)
c1= 2d-1*(u(k,j-1,i)+u(k,j+1,i)+u(k,j,i-1)+u(k,j,i+1))
c2=5d-2*(u(k,j+1,i+1)+u(k,j+1,i-1)+u(k,j-1,i-1)+u(k,j-1,i+1))
c3=-(3d-1)*h1*h1*f(x,y)-(2.5d-2)*h1*h1*laplf(h1,x,y)-ss1(h1,x,y)*h1*h1/1200d0
u(k+1,j,i)=c1+c2+c3
endif; enddo; enddo
l(1)=0d0;l(n1-1)=0d0;ll(1)=0d0;ll(n1-1)=0d0;nu0(1)=u(k+1,1,1)
nu0(n1-1)=u(k+1,n1-1,1);nu00(1)=u(k+1,1,n-1);nu00(n1-1)=u(k+1,n1-1,n-1)
do kk=1,n1-1,1
bb(kk)=240d0; aa(kk)=240d0;c0(kk)=1200d0
enddo
do j=2,n1-2,1
y=cc+h1*dfloat(j);x=a+h1*dfloat(i)
c4=-60d0*(u(k,j+1,2)+u(k,j+1,0)+u(k,j-1,0)+u(k,j-1,2));c5=-240d0*(u(k,j,2)+u(k,j,0))
c6=h1*h1*360d0*f(a+h1,y)+30d0*h1*h1*laplf(h1,a+h1,y)+ss1(h1,a+h1,y)*h1*h1
fif(j)=c4+c5+c6; l(j)=bb(j)/(c0(j)-aa(j)*l(j-1));nu0(j)=(aa(j)*nu0(j-1)-fif(j))/(c0(j)-aa(j)*l(j-1))
c44=-60d0*(u(k,j+1,n)+u(k,j+1,n-2)+u(k,j-1,n)+u(k,j-1,n-2));c55=-240d0*(u(k,j,n)+u(k,j,n-2))
c66=h1*h1*360d0*f(b-h1,y)+30d0*h1*h1*laplf(h1,b-h1,y)+ss1(h1,b-h1,y)*h1*h1
fif1(j)=c44+c55+c66; ll(j)=bb(j)/(c0(j)-aa(j)*ll(j-1));nu00(j)=(aa(j)*nu00(j-1)-fif1(j))/(c0(j)-aa(j)*ll(j-1))
enddo
do j=n1-2,2,-1
u(k+1,j,1)=l(j)*u(k,j+1,1)+nu0(j);u(k+1,j,n-1)=ll(j)*u(k,j+1,n-1)+nu00(j)
enddo
l(1)=0d0;l(n-1)=0d0;ll(1)=0d0;ll(n-1)=0d0;nu0(1)=u(k+1,1,1)
nu0(n-1)=u(k+1,1,n-1);nu00(1)=u(k+1,n1-1,1);nu00(n-1)=u(k+1,n1-1,n-1)
do kk=1,n-1,1
bb(kk)=240d0;aa(kk)=240d0;c0(kk)=1200d0
enddo
do i=2,n-2,1
x=a+h1*dfloat(i);y=cc+h1*dfloat(j)
c4=-60d0*(u(k,2,i+1)+u(k,0,i+1)+u(k,0,i-1)+u(k,2,i-1));c5=-240d0*(u(k,2,i)+u(k,0,i))
c6= h1*h1*360d0*f(x,cc+h1)+30d0*h1*h1*laplf(h1,x,cc+h1)+ss1(h1,x,cc+h1)*h1*h1
fif0(i)=c4+c5+c6; l(i)=bb(i)/(c0(i)-aa(i)*l(i-1));nu0(i)=(aa(i)*nu0(i-1)-fif0(i))/(c0(i)-aa(i)*l(i-1))
c44=-60d0*(u(k,n1,i+1)+u(k,n1-2,i+1)+u(k,n1,i-1)+u(k,n1-2,i-1))
c55=-240d0*(u(k,n1,i)+u(k,n1-2,i))
c66= h1*h1*360d0*f(x,d-h1)+30d0*h1*h1*laplf(h1,x,d-h1)+ss1(h1,x,d-h1)*h1*h1
fif10(i)=c44+c55+c66; ll(i)=bb(i)/(c0(i)-aa(i)*ll(i-1));nu00(i)=(aa(i)*nu00(i-1)-fif10(i))/(c0(i)-aa(i)*ll(i-1))
enddo
do i=n-2,2,-1
u(k+1,1,i)=l(i)*u(k,1,i+1)+nu0(i);u(k+1,n1-1,i)=ll(i)*u(k,n1-1,i+1)+nu00(i)
enddo
do i=2,n-2,1
l1(0)=0d0;l1(1)=0d0;l2(0)=0d0;l2(1)=0d0;l1(n1)=0d0;l2(n1)=0d0;l1(n1-1)=0d0;
l2(n1-1)=0d0;nu(n1-1)=u(k+1,n1-1,i);nu(n1)=u(k+1,n1,i);nu(1)=u(k+1,1,i);nu(0)=u(k+1,0,i)
do j=2,n1-2,1
x=a+h1*dfloat(i); y=cc+h1*dfloat(j);c1=-8d0/21d0*(u(k,j,i+1)+u(k+1,j,i-1))
c2=-(8d0/45d0)*(u(k,j+1,i+1)+u(k+1,j-1,i-1)+u(k,j-1,i+1)+u(k+1,j+1,i-1))
c11=-(1d0/30d0)*(u(k,j,i+2)+u(k+1,j,i-2))
c3=-(4d0/315d0)*(u(k+1,j+1,i-2)+u(k,j+1,i+2)+u(k+1,j-1,i-2)+u(k,j-1,i+2))
c33=-(4d0/315d0)*(u(k+1,j+2,i-1)+u(k,j+2,i+1)+u(k+1,j-2,i-1)+u(k,j-2,i+1))
c22=-(1d0/2520d0)*(u(k,j+2,i+2)+u(k+1,j-2,i-2)+u(k,j-2,i+2)+u(k+1,j+2,i-2))
c5=h1*h1*f(x,y)+(1d0/7d0)*(laplf(h1,x,y)+(4d0/315d0)*ss1(h1,x,y)+(1d0/1260d0)*ss2(h1,x,y))
fif11(j)=c1+c2+c11+c3+c33+c22+c5
l1(j)=(a1(j)*l1(j-2)*l2(j-1)+a2(j)*l2(j-1)+b1(j))/(c(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a2(j)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2))
l2(j)=b2(j)/(c(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-a2(j)*l1(j-1))

```

```

nu(j)=(a1(j)*11(j-2)*nu(j-1)+a2(j)*nu(j-1)+a1(j)*nu(j-2)-fif11(j))/(c(j)-a1(j)*11(j-2)*11(j-1)-a1(j)*12(j-2) -a2(j)*11(j-1) )
enddo
do j=n1-2,2,-1
u(k+1,j,i)=11(j)*u(k,j+1,i)+12(j)*u(k,j+2,i)+nu(j)
enddo; enddo; enddo
do j=0,n1,1; do i=0,n,1
x=a+h1*dfloat(i); y=cc+h2*dfloat(j)
!c1= (cch(x)+ssh(x)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))*dsin(y)
!c2= dsin(x)*(cch(y)+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))
!c3= dsin(x)*(cch(y)-1d0+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))
c1= (cch(x)+ssh(x)*(1d0-cch(2d0*pi))/ssh(2d0*pi))*dsin(y); c2= dsin(x)*(cch(y)+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))
c3= dsin(x)*(cch(y)-1d0+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi)); res(j,i)=c1+c2+c3; delta(j,i)= u(m,j,i)- res(j,i)
if( delta(j,i)<0d0)then
delta(j,i)=- delta(j,i); endif
if( delta(j,i)>max)then
max=delta(j,i); endif; enddo; enddo;
print*, "norma C =", max; end program puasson

```

При $n = n_1 = 20, m = 5000$ программа возвращает невязку задачи (1) в равномерной норме:

norma C = 1.1751864209253995e-10, а при $n = n_1 = 40, m = 5000$ norma C = 7.476241847825804e-13, что

даёт 8 порядок погрешности: $\frac{\|\delta u_1\|_C}{\|\delta u_2\|_C} = \frac{1.1751864209253995e-10}{7.476241847825804e-13} \approx 234 \approx 2^8 = 256$ (так как

алгебраический порядок погрешности внутреннего разностного оператора(18) равен восьми). Кроме того, при $n = n_1 = 100, m = 20000$ программа возвращает: norma C = 6.61378111e-14 ,близка к 1e-16 двойной точности double, в то время как по формуле простой итерации у авторов[2] ($n = n_1 = 100, m = 20000$) получим: norma C = 4.567879487049620e-6 > 1e-8 (не достигает первой точности float и порядок погрешности только четвёртый) (n, n_1, m число интервалов по осям x, y и число итераций). Решим также численно и аналитически задачу Пуассона на прямоугольнике:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x), & 0 < x < 2\pi, 0 < y < \pi \\ u(0, y) = u(2\pi, y) = \sin(y), & 0 \leq y \leq \pi \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = \sin(x), & 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

С аналитическим решением:

$$u(x, y) = \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch}(2\pi)}{\operatorname{sh}(2\pi)} \right) \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) \right) \sin(y) + \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) \right) \sin(x) + \left(-1 + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) \right) \sin(x)$$

С учётом того, что высота прямоугольника в 2 раза меньше его ширины: $n = 120, n_1 = 60, m = 20000$

Программа возвращает невязку последней задачи в равномерной норме: norma C = 5.972999872483342e-14.

Выводы:

- 1) Получены формулы прогонки для пяти диагональной системы линейных уравнений с 4 известными узловыми значениями на концах отрезка и соседних к концам узлах (краевое условие Дирихле).
- 2) Для симметрической матрицы со строгим полуторным диагональным преобладанием имеет место корректность полученных формул прогонки вперёд.
- 3) Предложен 3 – этапный алгоритм для точного решения уравнения Пуассона на прямоугольнике. 1. по формуле простой итерации(33) находят 4 значения $u^{k+1}_{1,n-1}, u^{k+1}_{1,1}, u^{k+1}_{n-1,1}, u^{k+1}_{n-1,n-1}$. 2. По формулам(34)-(37) прогонкой находят $u^{k+1}_{1,j}, u^{k+1}_{n-1,j}, u^{k+1}_{i,1}, u^{k+1}_{i,n-1}, i, j = \overline{1, n-1}$. 3. По формулам(20), (23),(25) методом пяти диагональной прогонки и краевым условием Дирихле определяют $u^{k+1}_{i,j}, i, j = \overline{2, n-2}$.

- 4) Доказано утверждение: на симметричных шаблонах аппроксимация оператора Лапласа выражается через частные производные чётного порядка от неизвестной функции по каждой переменной.
- 5) С помощью указанного алгоритма и написанной программы показано, что при небольшом числе узлов равномерной сетки(1600) алгебраический порядок погрешности равен восьми.

Литература

- 1) Влияние ветра на динамику развития термобара в период весеннего прогрева водоёма. Н.С. Блохина, Д.А.Соловьёв. Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. Изд. МГУ им.М.В.Ломоносова.2006.№3. С59-63.
- 2) Методы ускорения газодинамических расчётов на неконструированных сетках. К.Н.Волков, Ю. Н. Дерюгин, В.Н.Емельянов, А.Г.Карпенко, И. В. Тетерина. Москва, Физматлит, 2013, 536 стр.
- 3) Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: Учебное пособие. – М.: Издательство ЛКИ, 2014. – 480 с.
- 4) А.Г.Свешников, А.Н.Боголюбов, В.В.Кравцов. Лекции по математической физике. – М.: Изд. – во МГУ, 1993 – 332 с.

УДК 517.6: 517.958

МИНИМАЛЬНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПАРALLEЛЕПИПЕДЕ С ШЕСТЫМ ПОРЯДКОМ ПОГРЕШНОСТИ

Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов (Полоцкий государственный университет),

Н.К. Волосова (Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана)

Предложен алгоритм решения общей неоднородной краевой задачи Дирихле для трехмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности и с минимальным 27 точечным шаблоном. Численно проверена устойчивость алгоритма к разрывам первого рода граничных условий на гранях параллелепипеда. Получено разложение невязки задачи в общем виде для неравномерной сетки через производные четного порядка от решения и правой части уравнения и четного порядка по каждой из трех переменных. Написана программа на основе построенного алгоритма и принципа сжатых отображений для явной формулы простой итерации. Решен точно тестовый пример и проведено сравнение его решения с численным решением, которое подтверждает шестой порядок погрешности для формул полученного алгоритма.

Ключевые слова: *трехмерное уравнение Пуассона на параллелепипеде, неоднородно-краевая задача Дирихле, принцип сжатых отображений, уравнения математической физики*

Введение

Рассмотрим неоднородную краевую задачу для трехмерного уравнения Пуассона в параллелепипеде с краевыми условиями Дирихле. Известны разностные схемы для уравнения Пуассона с погрешностью второго порядка в двухмерной области А.А. Самарского[1], с погрешностью четвертого порядка на равномерной сетке К.Н. Волкова [2], также схемы большего порядка на прямоугольнике и на равномерной сетке[4]. Во всех случаях для тестирования алгоритма необходимы примеры с точными аналитическими решениями[3]. Однако, как показано в работе[1,стр.57], для схем второго порядка в задаче уравнения Пуассона на плоскости удается достичь равномерно непрерывной нормы погрешности $3 \cdot 10^{-3}$ при делении сторон прямоугольника на 160 частей. Отметим работу[11] с формулами для трехмерного лапласиана.

В данной работе предложен простой алгоритм решения трехмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде с использованием минимального симметричного шаблона для аппроксимации(27 узлов) и достижения равномерно непрерывной нормы погрешности 10^{-9} при делении ребра параллелепипеда на 60 частей и с аппроксимацией шестым порядком погрешности. Сложность трехмерной задачи по сравнению с двухмерной задачей заключается в быстром росте количества вычислений и в увеличении общего числа узлов. Например, 10000 узлов на прямоугольнике и 1000000 узлов в параллелепипеде. По сравнению с работой[4], в котором использовались два шаблона, граничный и внутренний на прямоугольнике с 8 порядком погрешности, в данной работе использование одного универсального шаблона позволяет экономить число и время вычислений в $n^3(3^3 + 5^3)/3^3 = 5.6n^3$ число раз за счет выбора 1 шаблона, но с 6 порядком погрешности. Кроме того, нужно учитывать, что использование двойного шаблона увеличивает число вычислений в 2-3 раза в каждом узле и уменьшает быстродействие. В работе использована модифицированная формула бинома Ньютона – тринома Ньютона.

Полученный алгоритм численного решения трехмерной задачи для уравнения Пуассона может быть применен в различных областях механики[5], кристаллографии, стеганографии[6,7], для численных задач математической физики, содержащих трехмерный оператора Лапласа, например, волновое уравнение[11,14,15,16,17].

Постановка задачи

Рассмотрим неоднородную краевую задачу для трехмерного уравнения Пуассона в параллелепипеде для достаточно гладкого решения $u(x, y, z)$ как функции трех переменных:

$$\begin{cases} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x, y, z), x \in (a, b), y \in (c, d), z \in (e, r) \\ u(a, y, z) = \mu_1(y, z), u(b, y, z) = \mu_2(y, z), (y, z) \in [c, d] \times [e, r] \\ u(x, c, z) = \mu_3(x, z), u(x, d, z) = \mu_4(x, z), (x, z) \in [a, b] \times [e, r] \\ u(x, y, e) = \mu_5(x, y), u(x, y, r) = \mu_6(x, y), (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \end{cases} \quad (1)$$

В задаче(1) $f(x, y, z)$ - неоднородная правая часть уравнения Пуассона в параллелепипеде $[a, b] \times [c, d] \times [e, r]$, $\mu_1(y, z)$, $\mu_2(y, z)$, $\mu_3(x, z)$, $\mu_4(x, z)$, $\mu_5(x, y)$, $\mu_6(x, y)$ - неоднородные краевые

условия, (x, y, z) - координаты точки. Обозначим внутреннее и граничное множества задачи(1)
 $\Omega = (a, b) \times (c, d) \times (e, r), \partial\Omega = [c, d] \times [e, r](x = a, b) \cup [a, b] \times [e, r](y = c, d) \cup [a, b] \times [c, d](z = e, r)$

В классической постановке задач математической физики необходимо требовать непрерывности граничных условий на пересечении их областей определения, т.е. в непрерывность краевых условий на 12 ребрах для параллелепипеда, например,

$$\mu_1(0, z) = \mu_3(0, z), \forall z \in [e, r]$$

Рассмотрим аппроксимацию задачи (1) на шаблоне, содержащем минимальное количество узлов и покрывающем всю область параллелепипеда. Ясно, что 27 точечный шаблон, который содержит коробка со сторонами $2h_1, 2h_2, 2h_3$ и решает поставленную задачу с минимальным числом узлов в шаблоне. Такой шаблон является универсальным как на границе рассматриваемого параллелепипеда, так и внутри данной области и покрывает параллелепипед объема $(b-a)(d-c)(r-e)$ ”кирпичиками” с объемом $8h_1h_2h_3$.

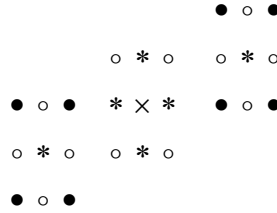


Рис.1 Классификация 27 узлов куба (параллелепипеда) по расстоянию от центра и свойствам симметрии соответственно(1,6,12,8) узлов.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть решение задачи(1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^{2p}(\Omega)$, тогда для суммы узловых значений решения в 6 центральных узлах грани куба (параллелепипеда) справедлива формула разложения в ряд Тейлора с центром в узле (m, n, k)

$$u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1} = 6u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_1^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + h_2^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2l}} + h_3^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial z^{2l}} \right) + O(h_1^{2p+2} + h_2^{2p+2} + h_3^{2p+2}) \quad (2)$$

Доказательство. Объединяя попарно противоположные узлы на каждой координатной оси относительно центра (m, n, k) , учитывая, что в силу симметрии сохраняются только частные производные четной степени по соответствующей координате, получим

$$\begin{aligned} u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1} &= (u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k}) + (u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k}) + (u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1}) = \\ &= 2u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_1^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} \right) + O(h_1^{2p+2}) + 2u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_2^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2l}} \right) + O(h_2^{2p+2}) + 2u_{m,n,k} + \\ &+ 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_3^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial z^{2l}} \right) + O(h_3^{2p+2}) = 6u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_1^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + h_2^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2l}} + h_3^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial z^{2l}} \right) + O(h_1^{2p+2} + h_2^{2p+2} + h_3^{2p+2}) \end{aligned}$$

Что завершает доказательство формулы(2) Леммы 1. В частности для равномерной сетки получим из(2) формулу(3)

$$u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1} = 6u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{h^{2l}}{(2l)!} \left(\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2l}} + \frac{\partial^{2l} u}{\partial z^{2l}} \right) + O(h^{2p+2}) \quad (3)$$

Лемма 2. Пусть решение задачи(1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^{2p}(\Omega)$, тогда для суммы узловых значений решения в 12 узлах - серединах ребер куба (параллелепипеда) справедлива формула разложения в ряд Тейлора с центром в узле (m, n, k)

$$\begin{aligned} u_{m-1,n+1,k} + u_{m-1,n,k+1} + u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n,k-1} + u_{m+1,n+1,k} + u_{m+1,n,k+1} + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n,k-1} + u_{m,n-1,k-1} + u_{m,n-1,k+1} + u_{m,n+1,k-1} + u_{m,n+1,k+1} = \\ = 12u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{1}{(2s)!(2l-2s)!} \left(h_1^{2s} h_2^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + h_1^{2s} h_3^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial z^{2l-2s}} + h_2^{2s} h_3^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2s} \partial z^{2l-2s}} \right) + \\ + O\left(\sum_{i=0}^{p+1} (h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i} + h_2^{2p+2-2i} h_3^{2i} + h_3^{2p+2-2i} h_1^{2i})\right) \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Сгруппируем в формуле (4) суммы 3 четверок узлов, расположенных в плоскостях параллельных граням куба (параллелепипеда) и проходящих через центральный узел (m, n, k) . Для каждой четверки узлов разложим в ряд Тейлора сумму четырёх узловых значений, например, в узлах плоскости Oxy получим разложение по формуле бинорма Ньютона

$$\begin{aligned} A &= u_{m-1, n-1, k} + u_{m-1, n+1, k} + u_{m+1, n-1, k} + u_{m+1, n+1, k} = 4u_{m, n, k} + \sum_{l=1}^{2p} \sum_{s=0}^l \frac{C_l^s}{l!} \left(\frac{\partial^l u}{\partial x^s \partial y^{l-s}} (-h_1)^s (-h_2)^{l-s} + \frac{\partial^l u}{\partial x^s \partial y^{l-s}} (-h_1)^s (h_2)^{l-s} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^l u}{\partial x^s \partial y^{l-s}} (h_1)^s (-h_2)^{l-s} + \frac{\partial^l u}{\partial x^s \partial y^{l-s}} (h_1)^s (h_2)^{l-s} \right) + O\left(\sum_{i=0}^{2p+1} (h_1^{2p+1-i} h_2^i)\right) = \\ &= 4u_{m, n, k} + \sum_{l=1}^{2p} \sum_{s=0}^l \frac{C_l^s}{l!} (h_1)^s (h_2)^{l-s} \frac{\partial^l u}{\partial x^s \partial y^{l-s}} \left((-1)^{s+l-s} + (-1)^s + (-1)^{l-s} + 1 \right) \end{aligned}$$

Так как

$$(-1)^{s+l-s} + (-1)^s + (-1)^{l-s} + 1 = (-1)^l (1 + (-1)^s) + (-1)^s + 1 = ((-1)^s + 1)(1 + (-1)^l) = \begin{cases} 4, s = 2s_1 \wedge l = 2l_1 \\ 0, s = 2s_1 + 1 \vee l = 2l_1 + 1 \end{cases} \quad (5)$$

И $(s_1 \rightarrow s, l_1 \rightarrow l)$ получим $A = 4u_{m, n, k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{C_{2l}^{2s}}{(2l)!} h_1^{2s} h_2^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + O\left(\sum_{i=0}^{p+1} (h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i})\right)$.

Так как $\frac{C_{2l}^{2s}}{(2l)!} = \frac{(2l)!}{(2l)!(2s)!(2l-2s)!} = \frac{1}{(2s)!(2l-2s)!}$, то последняя формула примет вид

$$u_{m-1, n-1, k} + u_{m-1, n+1, k} + u_{m+1, n-1, k} + u_{m+1, n+1, k} = 4u_{m, n, k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{h_1^{2s} h_2^{2l-2s}}{(2s)!(2l-2s)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + O\left(\sum_{i=0}^{p+1} (h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i})\right) \quad (6)$$

Две четверки узлов и суммы узловых значений решения в соответствующих узлах в плоскостях Oxz , Oyz имеем ту же симметрию и формулы разложения аналогично(6), меняя циклически индексы, и складывая все 12 узловых значений получим, что

$$\begin{aligned} &4u_{m, n, k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{h_1^{2s} h_2^{2l-2s}}{(2s)!(2l-2s)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + 4u_{m, n, k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{h_1^{2s} h_3^{2l-2s}}{(2s)!(2l-2s)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial z^{2l-2s}} + \\ &+ 4u_{m, n, k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{h_2^{2s} h_3^{2l-2s}}{(2s)!(2l-2s)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2s} \partial z^{2l-2s}} + O\left(\sum_{i=0}^{p+1} (h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i} + h_2^{2p+2-2i} h_3^{2i} + h_3^{2p+2-2i} h_1^{2i})\right) = \\ &= 12u_{m, n, k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{1}{(2s)!(2l-2s)!} \left(h_1^{2s} h_2^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + h_1^{2s} h_3^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial z^{2l-2s}} + h_2^{2s} h_3^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2s} \partial z^{2l-2s}} \right) + \\ &+ O\left(\sum_{i=0}^{p+1} (h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i} + h_2^{2p+2-2i} h_3^{2i} + h_3^{2p+2-2i} h_1^{2i})\right) \end{aligned}$$

Лемма 2 и формула (4) доказаны. В частности, для равномерной сетки получим формулу (7)

$$= 12u_{m, n, k} + 4 \sum_{l=1}^p h^{2l} \sum_{s=0}^l \frac{1}{(2s)!(2l-2s)!} \left(\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial z^{2l-2s}} + \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2s} \partial z^{2l-2s}} \right) + O(h^{2p+2}) \quad (7)$$

Рассмотрим модифицированную формулу Ньютона (8):

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} C_n^{k_1, k_2, k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}, \quad \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} C_n^{k_1, k_2, k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}, C_n^{k_1, k_2, k_3} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!} \quad (8)$$

Доказательство формулы(8).

Введем переменные

$$k_1 = j_0^i \in [0, i], k_2 = i - j_0^i \in [i, 0], k_3 = n - i, k_1 + k_2 + k_3 = j + i - j + n - i = n, \text{ поскольку } i \in [0, n], \text{ то}$$

области изменения переменных $k_1 \in [0, n], k_2 \in [n, 0], k_3 = n - i \in [n, 0]$, тогда имеем:

$$(a+b+c)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i (a+b)^i c^{n-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i C_n^i C_i^j a^j b^{i-j} c^{n-i} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{i!}{j!(i-j)!} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} \frac{n!}{j!(i-j)!(n-i)!} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} = \\
&= \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} C_n^{k_1, k_2, k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}, \quad C_n^{k_1, k_2, k_3} = \frac{n!}{j!(i-j)!(n-i)!} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!}. \text{ Формула(8) доказана.}
\end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть решение задачи(1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^{2p}(\Omega)$, тогда для суммы узловых значений решения в 8 вершинах куба (параллелепипеда) справедлива формула разложения в ряд Тейлора с центром в узле (m, n, k)

$$\begin{aligned}
&u_{m-1, n-1, k-1} + u_{m-1, n-1, k+1} + u_{m-1, n+1, k-1} + u_{m-1, n+1, k+1} + u_{m+1, n-1, k-1} + u_{m+1, n-1, k+1} + u_{m+1, n+1, k-1} + u_{m+1, n+1, k+1} = 8u_{m, n, k} + \\
&+ 8 \sum_{l=1}^p \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1+s_2+s_3=l}} \frac{h_1^{2s_1} h_2^{2s_2} h_3^{2s_3}}{(2s_1)!(2s_2)!(2s_3)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s_1} \partial y^{2s_2} \partial z^{2s_3}} + O \left(\sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l+1 \\ 0 \leq s_2 \leq l+1 \\ 0 \leq s_3 \leq l+1 \\ s_1+s_2+s_3=l+1}} h_1^{2s_1} h_2^{2s_2} h_3^{2s_3} \right) \quad (9)
\end{aligned}$$

Доказательство. Разложим в формуле(9) сумму 8 узловых значений в ряд Тейлора в точках, совпадающих с вершинами куба (параллелепипеда) относительно центрального узла (m, n, k) . Воспользуемся модифицированной формулой бинома Ньютона

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq n \\ 0 \leq s_2 \leq n \\ 0 \leq s_3 \leq n \\ s_1+s_2+s_3=n}} C_n^{s_1, s_2, s_3} a^{s_1} b^{s_2} c^{s_3}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad C_n^{s_1, s_2, s_3} = \frac{n!}{s_1! s_2! s_3!}, \quad s_1 + s_2 + s_3 = n$$

Подставляя восемь раз (8) в левую часть(9), учитывая $\frac{C_n^{s_1, s_2, s_3}}{n!} = \frac{n!}{n! s_1! s_2! s_3!} = \frac{1}{s_1! s_2! s_3!}, s_1 + s_2 + s_3 = n$, получим относительно центрального узла (m, n, k)

$$\begin{aligned}
&u_{m-1, n-1, k-1} + u_{m-1, n-1, k+1} + u_{m-1, n+1, k-1} + u_{m-1, n+1, k+1} + u_{m+1, n-1, k-1} + u_{m+1, n-1, k+1} + u_{m+1, n+1, k-1} + u_{m+1, n+1, k+1} = 8u_{m, n, k} + \\
&+ \sum_{l=1}^{2p} \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1+s_2+s_3=l}} \frac{C_l^{s_1, s_2, s_3}}{l!} h_1^{s_1} h_2^{s_2} h_3^{s_3} \frac{\partial^l u}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \left((-1)^{s_1+s_2+s_3} + (-1)^{s_1+s_2} + (-1)^{s_1+s_3} + (-1)^{s_1} + \right. \\
&\left. + (-1)^{s_2+s_3} + (-1)^{s_2} + (-1)^{s_3} + 1 \right) + O \left(\sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq 2p+1 \\ 0 \leq s_2 \leq 2p+1 \\ 0 \leq s_3 \leq 2p+1 \\ s_1+s_2+s_3=2p+1}} h_1^{s_1} h_2^{s_2} h_3^{s_3} \right)
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
&(-1)^{s_1+s_2+s_3} + (-1)^{s_1+s_2} + (-1)^{s_1+s_3} + (-1)^{s_1} + (-1)^{s_2+s_3} + (-1)^{s_2} + (-1)^{s_3} + 1 = (-1)^{s_1} \left((-1)^{s_2} + 1 \right) + (-1)^{s_3} \left((-1)^{s_2} + 1 \right) + \\
&(-1)^{s_1+s_3} \left((-1)^{s_2} + 1 \right) + (-1)^{s_2} + 1 = \left((-1)^{s_2} + 1 \right) \left((-1)^{s_1} + (-1)^{s_3} + (-1)^{s_1+s_3} + 1 \right) = \left((-1)^{s_2} + 1 \right) \left((-1)^{s_1} \left(1 + (-1)^{s_3} \right) + \right. \\
&\left. 1 + (-1)^{s_3} \right) = \left((-1)^{s_2} + 1 \right) \left((-1)^{s_3} + 1 \right) \left((-1)^{s_1} + 1 \right) = \begin{cases} 8, s_1 = 2s_1' \wedge s_2 = 2s_2' \wedge s_3 = 2s_3' \\ 0, s_1 = 2s_1' + 1 \vee s_2 = 2s_2' + 1 \vee s_3 = 2s_3' + 1 \end{cases} \quad (10)
\end{aligned}$$

То, упрощая последнюю формулу, и возвращаясь к переменным $s_1' \rightarrow s_1, s_2' \rightarrow s_2, s_3' \rightarrow s_3, l' \rightarrow l$ получим $l = s_1 + s_2 + s_3 = 2(s_1' + s_2' + s_3') = 2l', s_1' \rightarrow s_1, s_2' \rightarrow s_2, s_3' \rightarrow s_3, l' \rightarrow l$

$$\sum_{l=1}^{2p} \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1 + s_2 + s_3 = l}} \frac{C_l^{s_1, s_2, s_3}}{l!} h_1^{s_1} h_2^{s_2} h_3^{s_3} \frac{\partial^l u}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \left((-1)^{s_1 + s_2 + s_3} + (-1)^{s_1 + s_2} + (-1)^{s_1 + s_3} + (-1)^{s_1} + (-1)^{s_2 + s_3} + (-1)^{s_2} + (-1)^{s_3} + 1 \right) +$$

$$+ O \left(\sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq 2p+1 \\ 0 \leq s_2 \leq 2p+1 \\ 0 \leq s_3 \leq 2p+1 \\ s_1 + s_2 + s_3 = 2p+1}} h_1^{s_1} h_2^{s_2} h_3^{s_3} \right) = 8 \sum_{l=1}^p \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1 + s_2 + s_3 = l}} \frac{h_1^{2s_1} h_2^{2s_2} h_3^{2s_3}}{(2s_1)!(2s_2)!(2s_3)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s_1} \partial y^{2s_2} \partial z^{2s_3}} + O \left(\sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq p+1 \\ 0 \leq s_2 \leq p+1 \\ 0 \leq s_3 \leq p+1 \\ s_1 + s_2 + s_3 = p+1}} h_1^{2s_1} h_2^{2s_2} h_3^{2s_3} \right) \quad (11)$$

Добавляя к(11) $8u_{m,n,k}$, получим формулу(9). **Лемма 3** доказана. В частности, на равномерной сетке формула(11) переходит в формулу(12)

$$u_{m-1,n-1,k-1} + u_{m-1,n-1,k+1} + u_{m-1,n+1,k-1} + u_{m-1,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k-1} + u_{m+1,n-1,k+1} + u_{m+1,n+1,k-1} + u_{m+1,n+1,k+1} =$$

$$= 8u_{m,n,k} + 8 \sum_{l=1}^p h^{2l} \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1 + s_2 + s_3 = l}} \frac{1}{(2s_1)!(2s_2)!(2s_3)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s_1} \partial y^{2s_2} \partial z^{2s_3}} + O(h^{2p+2}) \quad (12)$$

Лемма 4. Пусть решение уравнения Пуассона(1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^4(\Omega)$ и неоднородная правая часть уравнения $f(x, y, z) \in C^2(\Omega)$, и пусть наложена связь на коэффициенты в линейной комбинации производных четвертого порядка от решения уравнения Пуассона: “Сумма коэффициентов для несмешанных частных производных равна половине суммы коэффициентов от смешанных производных в линейной комбинации”, тогда этого достаточно для преобразования линейной комбинации в сумму частных производных второго порядка от правой части уравнения Пуассона.

Доказательство. Используя уравнение Пуассона, найдём его вторые частные производные от правой части

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = u_x^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \\ f_{yy} = u_{(2)x}^{(4)} + u_y^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \\ f_{zz} = u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_z^{(4)} \end{cases} \quad (13)$$

Где символ $u_{(2)y}^{(4)}$ обозначает частную производную 4 порядка 2 порядка по переменной x и 2 порядка по y.

Тогда для линейной комбинации вторых производных получим с учетом(13)

$$Af_{xx} + Bf_{yy} + Cf_{zz} = A \left(u_x^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \right) + B \left(u_{(2)x}^{(4)} + u_y^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \right) + C \left(u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_z^{(4)} \right) =$$

$$= Au_x^{(4)} + Bu_y^{(4)} + Cu_z^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)}(A+B) + u_{(2)x}^{(4)}(A+C) + u_{(2)z}^{(4)}(B+C) \quad (14)$$

Из последней формулы следует, что $(A) + (B) + (C) = \frac{1}{2}((A+B) + (A+C) + (B+C))$.

То есть сумма коэффициентов при несмешанных частных производных равна половине суммы коэффициентов при смешанных производных в линейной комбинации производных четвертого порядка от решения уравнения Пуассона. **Лемма 4** доказана.

Как было показано в леммах 1-3 аппроксимация трех различных сумм узловых значений решения на 27 точечном шаблоне содержит частные производные от решения только четного порядка, а, следовательно, и производные четного порядка от правой части. Поэтому линейная комбинация производных четвертого порядка и четного порядка по каждой из координат является общим видом разложения в ряд Тейлора для слагаемых при 4 степени шага сетки. Т.е. утверждение леммы 4 учитывает общий случай разложения в ряд Тейлора для 27 точечного шаблона.

Лемма 5. Пусть решение задачи(1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^6(\Omega)$ и неоднородная правая часть уравнения $f(x, y, z) \in C^4(\Omega)$, и пусть наложена связь на коэффициенты в линейной комбинации производных шестого порядка от решения уравнения Пуассона: “Сумма коэффициентов для несмешанных частных производных и коэффициента при симметричной смешанной производной $u_{(2)x(2)y(2)z}^{(6)}$ равна половине суммы коэффициентов от несимметричных смешанных производных шестого порядка”.

Тогда этого достаточно для преобразования линейной комбинации в сумму частных производных четвертого порядка от правой части уравнения Пуассона.

Доказательство. Используя уравнение Пуассона, найдём его четвертые частные производные от правой части

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = u_x^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \\ f_{yy} = u_{(2)x}^{(4)} + u_y^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} \\ f_{zz} = u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_z^{(4)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x^{(4)} = u_x^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} \\ f_{(2)x}^{(4)} = u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} \\ f_{(2)z}^{(4)} = u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} \\ f_y^{(4)} = u_{(2)x}^{(6)} + u_y^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \\ f_{(2)y}^{(4)} = u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} \\ f_z^{(4)} = u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_z^{(6)} \end{cases} \quad (15)$$

Тогда для линейной комбинации четвертых производных от правой части уравнения Пуассона получим

$$\begin{aligned} Af_x^{(4)} + Bf_{(2)x}^{(4)} + Cf_{(2)z}^{(4)} + Df_y^{(4)} + Ef_{(2)y}^{(4)} + Ff_z^{(4)} &= A \left(u_x^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} \right) + B \left(u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} \right) + \\ C \left(u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} \right) + D \left(u_{(2)x}^{(6)} + u_y^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \right) + E \left(u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} \right) + F \left(u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_z^{(6)} \right) &= \\ = Au_x^{(6)} + Du_y^{(6)} + Fu_z^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)}(A+B) + u_{(2)x}^{(6)}(D+B) + u_{(2)x}^{(6)}(C+F) + u_{(4)x}^{(6)}(C+A) + & \\ + u_{(2)y}^{(6)}(E+F) + u_{(4)y}^{(6)}(D+E) + u_{(2)y}^{(6)}(B+C+E) & \end{aligned} \quad (16)$$

Из последней формулы следует, что

$$(A) + (D) + (F) + (B + C + E) = \frac{1}{2} \left((A + B) + (D + B) + (C + F) + (C + A) + (E + F) + (D + E) \right),$$

то есть сумма коэффициентов для несмешанных частных производных и коэффициента при симметричной смешанной производной $u_{(2)x(2)y(2)z}^{(6)}$ равна половине суммы коэффициентов от несимметричных

смешанных производных шестого порядка линейной комбинации от решения уравнения Пуассона. **Лемма 5** доказана.

Как было показано в леммах 1-3 аппроксимация трех различных сумм узловых значений решения на 27 точечном шаблоне содержит частные производные от решения только четного порядка. Поэтому линейная комбинация производных шестого порядка и четного порядка по каждой из координат является общим видом разложения в ряд Тейлора для слагаемых при 6 степени шага сетки. Т.е. утверждение леммы 5 учитывает общий случай разложения суммы узловых значений функций для 27 точечного шаблона.

Теорема 1. Пусть решение задачи(1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^{2p}(\Omega)$ и неоднородная правая часть уравнения $f(x, y, z) \in C^{2p-2}(\Omega)$, тогда симметричный 27 точечный шаблон на равномерной сетке обеспечивает аппроксимацию 3 мерного уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности $O(h^6)$. Более того, невозможно получить порядок невязки 27 точечным шаблоном выше шестого. Имеет место разностное уравнение для трёхмерного уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \left(-\frac{64}{15} u_{mnk} + \frac{7}{15} (u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1}) + \frac{1}{10} (u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n,k-1} + u_{m-1,n+1,k} + u_{m-1,n,k+1} + u_{m,n-1,k-1} + \right. \\ & \left. + u_{m,n+1,k-1} + u_{m,n-1,k+1} + u_{m,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n,k-1} + u_{m+1,n+1,k} + u_{m+1,n,k+1}) + \frac{1}{30} (u_{m-1,n-1,k-1} + u_{m-1,n-1,k+1} + u_{m-1,n+1,k-1} + u_{m-1,n+1,k+1} + \right. \\ & \left. + u_{m+1,n-1,k-1} + u_{m+1,n-1,k+1} + u_{m+1,n+1,k-1} + u_{m+1,n+1,k+1}) \right) = f_{mnk} + \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \right) + \\ & + \frac{h^4}{90} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + O(h^6) \end{aligned} \quad (17)$$

Замечание 1. Правая часть формулы(17) за вычетом f_{mnk} равна невязке уравнения Пуассона и в двухмерном случае для прямоугольника переходит в формулу

$$\frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy}) + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) + \frac{h^4}{90} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + O(h^6) [4, стр.73].$$

Доказательство. Заметим, что в силу уравнения Пуассона

$$\Delta u(x, y, z) \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$$

операции в правой и левой частях уравнения Пуассона принадлежат одинаковому классу гладкости, и поскольку $f(x, y, z) \in C^{2p-2}(\Omega)$, то решение имеет класс гладкости на две единицы больше, чем правая часть уравнение $u(x, y, z) \in C^{2p}(\Omega)$.

Оператор Лапласа, как и уравнение Пуассона, является линейным оператором относительно неизвестной функции, поэтому возможно аппроксимировать лапласиан квадратурной формулой линейной относительно узловых значения, используя все 27 узлов шаблона u_{mnk} :

$$\begin{aligned} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = & \frac{1}{h^2} \left(C_0 u_{mnk} + C_1 (u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1}) + \right. \\ & + C_2 (u_{m-1,n+1,k} + u_{m-1,n,k+1} + u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n,k-1} + u_{m,n-1,k-1} + u_{m,n-1,k+1} + u_{m,n+1,k-1} + u_{m,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n,k-1} + \\ & \left. + u_{m+1,n+1,k} + u_{m+1,n,k+1}) + C_3 (u_{m-1,n-1,k-1} + u_{m-1,n-1,k+1} + u_{m-1,n+1,k-1} + u_{m-1,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k-1} + u_{m+1,n-1,k+1} + \right. \\ & \left. + u_{m+1,n+1,k-1} + u_{m+1,n+1,k+1}) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Подставим в формулу (18) разложения из Лемм 1,2,3, т.е. формулы(3),(7),(12) с разложением по степени шага $h_1 = h_2 = h_3 = h$, $2p = 6$ включительно и сгруппируем скобками слагаемые с равной степенью по h

$(u_{(2)x}^{(6)} -$ для краткости будем обозначать, например, частную производную функции $u(x_m, y_n, z_k)$ шестого

порядка и по всем координатам x, y, z второго порядка в узле с координатами x_m, y_n, z_k):

$$\begin{aligned} \Delta u = & \frac{1}{h^2} \left(C_0 u_{mnk} + C_1 \left(6u_{mnk} + h^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{12} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \frac{h^6}{360} (u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + O(h^8) \right) + \right. \\ & + C_2 \left(12u_{mnk} + 4 \left(h^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + h^4 \left(\frac{1}{24} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)}) + \frac{1}{4} u_{(2)x}^{(4)} + \frac{1}{24} (u_x^{(4)} + u_z^{(4)}) + \frac{1}{4} u_{(2)x}^{(4)} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{24} (u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \frac{1}{4} u_{(2)y}^{(4)} \right) + h^6 \left(\frac{1}{720} (u_x^{(6)} + u_y^{(6)}) + \frac{1}{48} (u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)}) + \frac{1}{720} (u_x^{(6)} + u_z^{(6)}) + \frac{1}{48} (u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{720} (u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + \frac{1}{48} (u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)}) + \frac{1}{720} (u_x^{(6)} + u_z^{(6)}) + \frac{1}{48} (u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)}) \right) + \right. \\ & \left. + C_3 \left(12u_{mnk} + 4 \left(h^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + h^4 \left(\frac{1}{24} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)}) + \frac{1}{4} u_{(2)x}^{(4)} + \frac{1}{24} (u_x^{(4)} + u_z^{(4)}) + \frac{1}{4} u_{(2)x}^{(4)} + \right. \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{720} \left(u_y^{(6)} + u_z^{(6)} \right) + \frac{1}{48} \left(u_{(4)z}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} \right) + O(h^8) + C_3 \left(8u_{mnk} + 8 \left(\frac{h^2}{2} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{24} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \right. \right. \\
& + \frac{h^4}{4} \left(u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \right) + \frac{h^6}{720} (u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + \frac{h^6}{48} \left(u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)z}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \right) + \\
& \left. + \frac{h^6}{8} u_{(2)z}^{(6)} \right) + O(h^8) = \frac{1}{h^2} \left(C_0 u_{mnk} + C_1 \left(6u_{mnk} + h^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{12} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \right. \right. \\
& + \frac{h^6}{360} (u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + O(h^8) \left. \right) + C_2 \left(12u_{mnk} + 4h^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{3} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \right. \\
& + h^4 \left(u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \right) + h^6 \left(\frac{1}{90} (u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + \frac{1}{12} \left(u_{(4)y}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)z}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \right) + O(h^8) \right) + \\
& + C_3 \left(8u_{mnk} + 4h^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{3} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + 2h^4 \left(u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \right) + \frac{h^6}{90} (u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + \right. \\
& \left. + \frac{h^6}{6} \left(u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} + u_{(4)z}^{(6)} \right) + h^6 u_{(2)z}^{(6)} + O(h^8) \right) = \frac{u_{mnk}}{h^2} (C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3) + \\
& + (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) (C_1 + 4C_2 + 4C_3) + h^2 \left((u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3} \right) + \left(u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \right) (C_2 + 2C_3) \right) + \\
& + h^4 \left((u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{90} + \frac{C_3}{90} \right) + \left(u_{(4)y}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)z}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \right) \left(\frac{C_2}{12} + \frac{C_3}{6} \right) + u_{(2)z}^{(6)} C_3 + O(h^6) \right) \quad (19)
\end{aligned}$$

Из формулы (19) следует, что $\frac{|u_{mnk}|}{h^2} |C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3|_{h \rightarrow 0} < +\infty \Leftrightarrow C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3 = 0$, $u_{mnk} \neq 0$

В задаче аппроксимации трехмерного лапласиана $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f \Leftrightarrow C_1 + 4C_2 + 4C_3 = 1$,

Согласно Лемме 4 $3 \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3} \right) = \frac{1}{2} 3(C_2 + 2C_3) \Leftrightarrow C_1 = 2C_2 + 8C_3$.

Согласно Лемме 5 $3 \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{90} + \frac{C_3}{90} \right) + C_3 = \frac{1}{2} 6 \left(\frac{C_2}{12} + \frac{C_3}{6} \right) \Leftrightarrow C_1 = 26C_2 - 64C_3$.

Полученная система линейных уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3 = 0 \\ C_1 + 4C_2 + 4C_3 = 1 \\ C_1 = 2C_2 + 8C_3 \\ C_1 = 26C_2 - 64C_3 \end{cases} \Leftrightarrow C_0 = -\frac{64}{15}, C_1 = \frac{7}{15}, C_2 = \frac{1}{10}, C_3 = \frac{1}{30} \quad (20)$$

Поэтому первое слагаемое в (19) $\frac{u_{mnk}}{h^2} (C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3) = 0$, в силу уравнения Пуассона второе слагаемое в (19) с учетом (20) $(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) (C_1 + 4C_2 + 4C_3) = f$, используя Лемму 4, получим третье слагаемое в (19)

$$\begin{aligned}
& h^2 \left((u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3} \right) + \left(u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \right) (C_2 + 2C_3) \right) = h^2 (Af_{xx} + Bf_{yy} + Cf_{zz}) = \\
& = \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}), \text{ т.к. } A = B = C = \frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3} = \frac{7}{180} + \frac{1}{30} + \frac{1}{90} = \frac{15}{180} = \frac{1}{12}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Используя Лемму 5, получим четвертое слагаемое в(19)

$$h^4 \left(u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)} \right) \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{90} + \frac{C_3}{90} \right) + \left(u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)z}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} \right) \left(\frac{C_2}{12} + \frac{C_3}{6} \right) + u_{(2)x}^{(6)} C_3 =$$

$$= h^4 \left(Af_x^{(4)} + Bf_{(2)x}^{(4)} + Cf_{(2)x}^{(4)} + Df_y^{(4)} + Ef_{(2)y}^{(4)} + Ff_y^{(4)} \right) = \frac{h^4}{360} (f_x^{(4)} + f_y^{(4)} + f_z^{(4)}) + \frac{h^4}{90} \left(f_{(2)x}^{(4)} + f_{(2)x}^{(4)} + f_{(2)y}^{(4)} \right) \quad (22)$$

Так как $A = D = F = \frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{90} + \frac{C_3}{90} = \frac{7}{5400} + \frac{1}{900} + \frac{1}{2700} = \frac{7+6+2}{5400} = \frac{1}{360}$ и

$$B = C = E, B + C + E = C_3, B = C = E = \frac{C_3}{3} = \frac{1}{90}.$$

Подставляя в левую часть(19) найденные коэффициенты из(20)

$C_0 = -\frac{64}{15}, C_1 = \frac{7}{15}, C_2 = \frac{1}{10}, C_3 = \frac{1}{30}$, а в правую часть(19)(невязка аппроксимации трехмерного уравнения Пуассона представляет третьи и четвертые слагаемые в правой части(19)) преобразованные слагаемые через функцию $f(x, y, z)$ - (21),(22), получим формулу(23)

$$\frac{1}{h^2} \left(-\frac{64}{15} u_{mk} + \frac{7}{15} (u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1}) + \frac{1}{10} (u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n,k-1} + u_{m-1,n+1,k} + u_{m-1,n,k+1} + u_{m,n-1,k-1} + u_{m,n-1,k+1} + u_{m,n+1,k-1} + u_{m,n+1,k+1}) + \frac{1}{30} (u_{m-1,n-1,k-1} + u_{m-1,n-1,k+1} + u_{m-1,n+1,k-1} + u_{m-1,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k-1} + u_{m+1,n-1,k+1} + u_{m+1,n+1,k-1} + u_{m+1,n+1,k+1}) \right) = f_{mk} + \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \right) + \frac{h^4}{90} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + O(h^6) \quad (23)$$

и она совпадает с формулой (17). Из формулы(23) следует, что аппроксимация трехмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде 27 точечным симметричным шаблоном имеет 6 порядок погрешности. Всего неизвестных коэффициентов в шаблоне (18) четыре. Тогда добавление условий в систему уравнений(20), аналогично условиям связи в Леммах 4,5, приведет к несовместности линейной системы уравнений, в которой число неизвестных 4, а число уравнений не менее 5. Другими словами, 27 точечным шаблоном аппроксимировать трехмерное уравнения Пуассона с 8 порядком погрешности невозможно.

Теорема 1 доказана.

Из формулы(23) выразим центральное узловое значение с индексами (m,n,k) и получим формулу простой итерации:

$$u_{mk}^{s+1} = \left(\frac{15}{64} \right) \left(\frac{7}{15} (u_{m-1,n,k}^s + u_{m+1,n,k}^s + u_{m,n-1,k}^s + u_{m,n+1,k}^s + u_{m,n,k-1}^s + u_{m,n,k+1}^s) + \frac{1}{10} (u_{m-1,n-1,k}^s + u_{m-1,n,k-1}^s + u_{m-1,n+1,k}^s + u_{m-1,n,k+1}^s + u_{m,n-1,k-1}^s + u_{m,n-1,k+1}^s + u_{m,n+1,k-1}^s + u_{m,n+1,k+1}^s) + \frac{1}{30} (u_{m-1,n-1,k-1}^s + u_{m-1,n-1,k+1}^s + u_{m-1,n+1,k-1}^s + u_{m-1,n+1,k+1}^s + u_{m+1,n-1,k-1}^s + u_{m+1,n-1,k+1}^s + u_{m+1,n+1,k-1}^s + u_{m+1,n+1,k+1}^s) \right) - h^2 f_{mk} - \frac{h^4}{12} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) - \frac{h^6}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \right) - \frac{h^6}{90} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + O(h^6) = \frac{7}{64} (u_{m-1,n,k}^s + u_{m+1,n,k}^s + u_{m,n-1,k}^s + u_{m,n+1,k}^s + u_{m,n,k-1}^s + u_{m,n,k+1}^s) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{128} \left(u_{m-1,n-1,k}^s + u_{m-1,n,k-1}^s + u_{m-1,n+1,k}^s + u_{m-1,n,k+1}^s + u_{m,n-1,k-1}^s + u_{m,n+1,k-1}^s + u_{m,n-1,k+1}^s + u_{m,n+1,k+1}^s + u_{m+1,n-1,k}^s + u_{m+1,n,k-1}^s + u_{m+1,n+1,k}^s + u_{m+1,n,k+1}^s \right) + \\
& + \frac{1}{128} \left(u_{m-1,n-1,k-1}^s + u_{m-1,n-1,k+1}^s + u_{m-1,n+1,k-1}^s + u_{m-1,n+1,k+1}^s + u_{m+1,n-1,k-1}^s + u_{m+1,n-1,k+1}^s + u_{m+1,n+1,k-1}^s + u_{m+1,n+1,k+1}^s \right) - \\
& - \frac{15}{64} h^2 f_{mnk} - \frac{5h^4}{256} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) - \frac{h^6}{1536} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \right) - \frac{h^6}{384} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + O(h^8) \quad (24)
\end{aligned}$$

В формуле простой итерации(24) верхний индекс s обозначает номер итерации, в левой части(24) индекс итерации s=1 на единицу больше, чем индексы итерации s у всех узловых значений в правой части формулы(24). В формуле(24) значения функции f(x,y,z) и ее частные производные вычисляются в узле с индексами (m,n,k). Формулу простой итерации(24) можно записать в виде

$$u_{mnk}^{s+1} = G(u_{mnk}^s, f_{mnk}) + O(h^8), s = \overline{0,1,2,\dots}, m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_2 - 1}, k = \overline{1, n_3 - 1} \quad (25)$$

Где функция $G(u_{mnk}^s, f_{mnk})$ полностью совпадает с правой частью формулы(24).

По аналогии с (25) рассмотрим итерационную последовательность(26) с сжимающим коэффициентом $0 < q < 1$, которую можно получить из(25), если в правой части (25) провести замену $u_{mnk}^s \rightarrow qu_{mnk}^s$

$$u_{mnk}^{s+1} = G(qu_{mnk}^s, f_{mnk}) + O(h^8), s = \overline{0,1,2,\dots}, m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_2 - 1}, k = \overline{1, n_3 - 1} \quad (26)$$

Введем функцию нормы в пространстве сеточных функций $u_{m,n,k} \in R^{(n_1+1)} \times R^{(n_2+1)} \times R^{(n_3+1)}$

$$\delta^s = \left\| u^{s \text{ num}} - u^{\text{exact}} \right\|_C^{n_1, n_2, n_3} = \max_{\substack{0 \leq m \leq n_1 \\ 0 \leq n \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} \left| u_{m,n,k}^{s \text{ num}} - (u)_{m,n,k}^{\text{exact}} \right|, s = \overline{0,1,2,\dots}, \text{ совпадающей с метрической функцией в}$$

пространстве $u_{mnk}^s \in R^{(n_1+1)} \times R^{(n_2+1)} \times R^{(n_3+1)}$ определяемой формулой $\rho(u^{num}, u^{exact}) = \|u^{num} - u^{exact}\|$

(Колмогоров А.Н., С.В. Фомин) [8,стр.139]. Где $u_{m,n,k}^{s \text{ num}}$, $(u^{exact})_{m,n,k}$ обозначают соответственно численное решение задачи(27) в узле(m,n,k) на итерационном шаге(s) и след[9,стр.102] точного решения задачи(1) на узел сетки (m,n,k).

Описание численного алгоритма.

Введем на параллелепипеде для задачи (1) сетку с равномерным шагом

$$\overline{\Omega} = [a, b] \times [c, d] \times [e, r], \omega_{n_1, n_2, n_3} = \left\{ x_m = a + hm, m = \overline{0, n_1}, y_n = c + hn, n = \overline{0, n_2}, z_k = e + hk, k = \overline{0, n_3} \right\}$$

$h_1 = \frac{b-a}{n_1} = h_2 = \frac{d-c}{n_2} = h_3 = \frac{r-e}{n_3} = h$. Для сеточной функции u_{mnk}^{s+1} запишем систему разностных уравнений

соответствующей задаче в частных производных (1)

$$\begin{cases}
u_{m,n,k}^{s+1} = G(qu_{m,n,k}^s, f_{m,n,k}) + O(h^8)(24), s = \overline{0,1,2,\dots}, m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_2 - 1}, k = \overline{1, n_3 - 1} \\
u_{0,n,k}^{s+1} = \mu_{1,0,n,k}, u_{n_1,n,k}^{s+1} = \mu_{2,n_1,n,k}, n = \overline{0, n_2}, k = \overline{0, n_3}, s = \overline{0,1,2,\dots} \\
u_{m,0,k}^{s+1} = \mu_{3,m,0,k}, u_{m,n_2,k}^{s+1} = \mu_{4,m,n_2,k}, m = \overline{0, n_1}, k = \overline{0, n_3}, s = \overline{0,1,2,\dots} \\
u_{m,n,0}^{s+1} = \mu_{5,m,n,0}, u_{m,n,n_3}^{s+1} = \mu_{6,m,n,n_3}, m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2}, s = \overline{0,1,2,\dots}
\end{cases} \quad (27)$$

Замечание. В разностной задаче(27) $q \rightarrow 1$, иначе изменятся коэффициенты точной аппроксимации(20) достаточно, $q = 1 - 10^{-15}$, т.е. отличается на число от 1 в 10 раз большее ошибки округления.

В системе разностных уравнений(27) первое уравнение совпадает с записью формулы(26). За начальное решение итерационного процесса можно выбрать функцию, определяемую граничными условиями[2,стр. 428]

$$u_{m,n,k}^0 = \frac{1}{6} (\mu_{1,0,n,k} + \mu_{2,n_1,n,k} + \mu_{3,m,0,k} + \mu_{4,m,n_2,k} + \mu_{5,m,n,0} + \mu_{6,m,n,n_3}), m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_2 - 1}, k = \overline{1, n_3 - 1} \quad (28)$$

Из формулы(28) видно, что начальное численное решение непрерывно зависит от всех 6 краевых функций как их линейная комбинация, и в классической постановке задачи(1) не может быть разрывов первого рода для начального приближения решения и всех значений индексов(m,n,k).

Теорема 2(об устойчивости итерационных формул (23,26)). Итерационная последовательность(26) $u_{mnk}^{s+1} = G(qu_{mnk}^s, f_{mnk}) + O(h^8)$ является сжимающим отображением в метрическом пространстве $u_{mnk}^s \in R^{(n_1+1)} \times R^{(n_2+1)} \times R^{(n_3+1)}$ и имеет место единственное решение, то есть

$$\lim_{\substack{s \rightarrow +\infty \\ q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} u_{mnk}^s = \lim_{h \rightarrow 0} (u^{exact})_{mnk}, \forall m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2}, k = \overline{0, n_3}, \lim_{h \rightarrow 0} (u^{exact})_{mnk} = G\left(\lim_{h \rightarrow 0} (u^{exact})_{mnk}, \lim_{h \rightarrow 0} f_{mnk}\right).$$

Доказательство. Покажем, что итерационная последовательность (26) является сжимающим отображением:

$$\begin{aligned} & \text{обозначим } \delta_{m,n,k}^s = y_{m,n,k}^s - x_{m,n,k}^s, \forall m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2}, k = \overline{0, n_3} \\ & \forall x_{mnk}^{s+1}, y_{mnk}^{s+1} \in R^{(n_1+1)} \times R^{(n_2+1)} \times R^{(n_3+1)} : \rho(x_{mnk}^{s+1}, y_{mnk}^{s+1}) = \rho(G(x_{mnk}^s, f_{mnk}), G(y_{mnk}^s, f_{mnk})) \Leftrightarrow |x_{m,n,k}^{s+1} - y_{m,n,k}^{s+1}| = \\ & = |G(x_{mnk}^s, f_{mnk}) - G(y_{mnk}^s, f_{mnk})| \stackrel{(24)}{\leq} \left(\frac{7q}{64} |\delta_{m-1,n,k}^s + \delta_{m+1,n,k}^s + \delta_{m,n-1,k}^s + \delta_{m,n+1,k}^s + \delta_{m,n,k-1}^s + \delta_{m,n,k+1}^s| + \right. \\ & + \frac{3q}{128} |\delta_{m-1,n-1,k}^s + \delta_{m-1,n-1,k-1}^s + \delta_{m-1,n+1,k}^s + \delta_{m-1,n+1,k-1}^s + \delta_{m,n-1,k-1}^s + \delta_{m,n+1,k-1}^s + \delta_{m,n-1,k+1}^s + \delta_{m,n+1,k+1}^s + \delta_{m+1,n-1,k}^s + \delta_{m+1,n-1,k-1}^s + \delta_{m+1,n+1,k}^s + \delta_{m+1,n+1,k-1}^s + \delta_{m+1,n+1,k+1}^s| \left. \right) \leq \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta_{m,n,k}^s| \cdot \\ & \left(\frac{7q \cdot 6}{64} + \frac{3q \cdot 12}{128} + \frac{q \cdot 8}{128} \right) = q \left(\frac{84 + 36 + 8}{128} \right) \cdot \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta_{m,n,k}^s| = q \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta_{m,n,k}^s| = q \rho(x_{mnk}^s, y_{mnk}^s), 0 < q < 1 \quad (29) \\ & \Rightarrow \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta_{m,n,k}^{s+1}| \leq q \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta_{m,n,k}^s| \text{ при достаточно малом шаге } h. \text{ То есть } \rho(x_{mnk}^{s+1}, y_{mnk}^{s+1}) \leq q \rho(x_{mnk}^s, y_{mnk}^s) \end{aligned}$$

По А.Н. Колмогорову, определение 1[8,стр.74] последовательность(26) является сжимающей и сходится к единственному пределу, обозначим его u_{mnk}^* (теорема - принцип сжимающих отображений[8,стр.75]),

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u_{mnk}^s \equiv u_{mnk}^* : u_{mnk}^* = G(qu_{mnk}^*, f_{mnk}) + O(h^8) \quad (30)$$

Но точное решение удовлетворяет формулам(23,24) $\lim_{h \rightarrow 0} (u^{exact})_{mnk} = G\left(\lim_{h \rightarrow 0} (u^{exact})_{mnk}, \lim_{h \rightarrow 0} f_{mnk}\right)$, оператор $G(qu_{mnk}^s, f_{mnk})$ (23) является линейным и непрерывным по u_{mnk}^s и по q. Перейдем к пределу в(30)

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} u_{mnk}^* = \lim_{\substack{q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} G(qu_{mnk}^*, f_{mnk}) = G\left(\lim_{\substack{q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} u_{mnk}^*, f_{mnk}\right) \Leftrightarrow \lim_{\substack{q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} u_{mnk}^* = \lim_{h \rightarrow 0} (u^{exact})_{mnk}$$

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим тестовый пример

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \sin(x) \sin(y) \sin(z), x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u(0, y, z) = u(\pi, y, z) = \sin(y) \sin(z), (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u(x, 0, z) = u(x, \pi, z) = \sin(x) \sin(2z), (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u(x, y, 0) = u(x, y, \pi) = \sin(3x) \sin(y), (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases} \quad (31)$$

Постановка задачи в примере (31) является классической, так как, все шесть краевых функций непрерывны не только на своей грани куба, но и на всех 12 ребрах куба равны друг другу (нулю).

Задача (31) является линейной относительно неизвестной функции $u(x, y, z)$, поэтому воспользуемся методом редукции линейной задачи $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z) + u_3(x, y, z) + u_4(x, y, z)$, где функции $u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), u_3(x, y, z), u_4(x, y, z)$ являются решениями соответственно следующих частных задач

$$\begin{cases}
1) \begin{cases} u_{1xx} + u_{1yy} + u_{1zz} = \sin(x)\sin(y)\sin(z), x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u_1(0, y, z) = u_1(\pi, y, z) = 0, (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_1(x, 0, z) = u_1(x, \pi, z) = 0, (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_1(x, y, 0) = u_1(x, y, \pi) = 0, (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases} \\
2) \begin{cases} u_{2xx} + u_{2yy} + u_{2zz} = 0, x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u_2(0, y, z) = u_2(\pi, y, z) = \sin(y)\sin(z), (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_2(x, 0, z) = u_2(x, \pi, z) = 0, (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_2(x, y, 0) = u_2(x, y, \pi) = 0, (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases} \\
3) \begin{cases} u_{3xx} + u_{3yy} + u_{3zz} = 0, x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u_3(0, y, z) = u_3(\pi, y, z) = 0, (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_3(x, 0, z) = u_3(x, \pi, z) = \sin(x)\sin(2z), (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_3(x, y, 0) = u_3(x, y, \pi) = 0, (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases} \\
4) \begin{cases} u_{4xx} + u_{4yy} + u_{4zz} = 0, x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u_4(0, y, z) = u_4(\pi, y, z) = 0, (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_4(x, 0, z) = u_4(x, \pi, z) = 0, (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_4(x, y, 0) = u_4(x, y, \pi) = \sin(3x)\sin(y), (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases}
\end{cases}$$

Ищем решение задачи 1) в виде $u_1(x, y, z) = C \sin(x)\sin(y)\sin(z)$, которое удовлетворяет однородным краевым условиям системы уравнений 1):

$$u_1(0, y, z) = u_1(\pi, y, z) = u_1(x, 0, z) = u_1(x, \pi, z) = u_1(x, y, 0) = u_1(x, y, \pi) = 0.$$

Подставим $u_1(x, y, z)$ в первое уравнение системы 1):

$$u_{1xx} + u_{1yy} + u_{1zz} = -3C \sin(x)\sin(y)\sin(z) = \sin(x)\sin(y)\sin(z) \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3}, u_1(x, y, z) = -\frac{1}{3} \sin(x)\sin(y)\sin(z)$$

Ищем решение задачи 2) в виде $u_2(x, y, z) = f(x)\sin(y)\sin(z)$, которое удовлетворяет однородным краевым условиям системы уравнений 2):

$$u_2(x, 0, z) = u_2(x, \pi, z) = u_2(x, y, 0) = u_2(x, y, \pi) = 0$$

Подставим $u_2(x, y, z) = f(x)\sin(y)\sin(z)$ в первое и второе уравнения системы 2):

$$\begin{cases} u_{2xx} + u_{2yy} + u_{2zz} = f''(x)\sin(y)\sin(z) - 2f(x)\sin(y)\sin(z) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - 2f(x) = 0 \\ u_2(0, y, z) = f(0)\sin(y)\sin(z) = \sin(y)\sin(z), \forall (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(0) = 1 \\ u_2(\pi, y, z) = f(\pi)\sin(y)\sin(z) = \sin(y)\sin(z), \forall (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(\pi) = 1 \end{cases}$$

Общее решение ОДУ второго порядка есть

$$f''(x) - 2f(x) = 0, f(x) = A \operatorname{sh}(\sqrt{2}x) + B \operatorname{ch}(\sqrt{2}x), f(0) = 1 \Leftrightarrow B = 1, f(\pi) = 1 \Leftrightarrow 1 = A \operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi) + \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)$$

$$A = \frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi)}, f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{2}x) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{2}x), u_2(x, y, z) = \left(\operatorname{ch}(\sqrt{2}x) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{2}x) \right) \sin(y)\sin(z)$$

Ищем решение задачи 3) в виде $u_3(x, y, z) = f(y)\sin(x)\sin(2z)$, которое удовлетворяет однородным краевым условиям системы уравнений 3):

$$u_3(0, y, z) = u_3(\pi, y, z) = u_3(x, y, 0) = u_3(x, y, \pi) = 0$$

Подставим $u_3(x, y, z) = f(y)\sin(x)\sin(2z)$ в первое и третье уравнения системы 3):

$$\begin{cases} u_{3xx} + u_{3yy} + u_{3zz} = f''(y)\sin(x)\sin(2z) - 5f(y)\sin(x)\sin(2z) = 0 \Leftrightarrow f''(y) - 5f(y) = 0 \\ u_3(x, 0, z) = f(0)\sin(x)\sin(2z) = \sin(x)\sin(2z), \forall (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(0) = 1 \\ u_3(x, \pi, z) = f(\pi)\sin(x)\sin(2z) = \sin(x)\sin(2z), \forall (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(\pi) = 1 \end{cases}$$

Общее решение ОДУ второго порядка есть

$$f''(y) - 5f(y) = 0, f(y) = A \operatorname{sh}(\sqrt{5}x) + B \operatorname{ch}(\sqrt{5}x), f(0) = 1 \Leftrightarrow B = 1, f(\pi) = 1 \Leftrightarrow 1 = A \operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi) + \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)$$

$$A = \frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)}, f(y) = \operatorname{ch}(\sqrt{5}y) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{5}y), u_3(x, y, z) = \left(\operatorname{ch}(\sqrt{5}y) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{5}y) \right) \sin(x) \sin(2z)$$

Ищем решение задачи 4) в виде $u_4(x, y, z) = f(z) \sin(3x) \sin(y)$, которое удовлетворяет однородным краевым условиям системы уравнений 3):

$$u_4(0, y, z) = u_4(\pi, y, z) = u_4(x, 0, z) = u_4(x, \pi, z) = 0$$

Подставим $u_4(x, y, z) = f(z) \sin(3x) \sin(y)$ в первое и четвертое уравнения системы 4):

$$\begin{cases} u_{4xx} + u_{4yy} + u_{4zz} = f''(z) \sin(3x) \sin(y) - 10f(z) \sin(3x) \sin(y) = 0 \Leftrightarrow f''(z) - 10f(z) = 0 \\ u_4(x, y, 0) = f(0) \sin(3x) \sin(y) = \sin(3x) \sin(y), \forall (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(0) = 1 \\ u_4(x, y, \pi) = f(\pi) \sin(3x) \sin(y) = \sin(3x) \sin(y), \forall (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(\pi) = 1 \end{cases}$$

Общее решение ОДУ второго порядка есть

$$f''(z) - 10f(z), f(z) = A \operatorname{sh}(\sqrt{10}z) + B \operatorname{ch}(\sqrt{10}z), f(0) = 1 \Leftrightarrow B = 1, f(\pi) = 1 \Leftrightarrow 1 = A \operatorname{sh}(\sqrt{10}\pi) + \operatorname{ch}(\sqrt{10}\pi)$$

$$A = \frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{10}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{10}\pi)}, f(z) = \operatorname{ch}(\sqrt{10}z) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{10}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{10}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{10}z), u_4(x, y, z) = \left(\operatorname{ch}(\sqrt{10}z) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{10}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{10}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{10}z) \right) \sin(3x) \sin(y)$$

Решение примера (31) равно (в силу линейной редукции) сумме решений систем уравнений 1),2),3),4):

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z) + u_3(x, y, z) + u_4(x, y, z) = -\frac{1}{3} \sin(x) \sin(y) \sin(z) +$$

$$+ \left(\operatorname{ch}(\sqrt{2}x) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{2}x) \right) \sin(y) \sin(z) + \left(\operatorname{ch}(\sqrt{5}y) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{5}y) \right) \sin(x) \sin(2z) +$$

$$+ \left(\operatorname{ch}(\sqrt{10}z) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{10}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{10}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{10}z) \right) \sin(3x) \sin(y) \quad (32)$$

В таблице 1 показаны результаты численного решения примера 1 с параметрами программы $n_1 = 60, n_2 = 60, n_3 = 60, m = 13500$. (первые три столбца координаты – x,y,z, четвертый и пятый столбцы – численное и точное решение соответственно).

Таблица 1

x	y	z	numerical	exact
0.261799387799149	0.261799387799149	0.261799387799149	0.19326654098	0.19326654078
1.30899693899575	0.261799387799149	0.261799387799149	0.18328544131	0.18328544145
2.35619449019234	0.261799387799149	0.261799387799149	0.28564460479	0.2856446045
0.261799387799149	1.30899693899575	0.261799387799149	0.4608673730	0.46086737233
1.30899693899575	1.30899693899575	0.261799387799149	-0.28784462945	-0.28784462878
2.35619449019234	1.30899693899575	0.261799387799149	0.35457814658	0.35457814586
0.261799387799149	2.35619449019234	0.261799387799149	0.35373212267	0.35373212214
1.30899693899575	2.35619449019234	0.261799387799149	-0.14968371807	-0.14968371760
2.35619449019234	2.35619449019234	0.261799387799149	0.30424860387	0.30424860333
0.261799387799149	0.261799387799149	1.30899693899575	0.22895617234	0.22895617228
1.30899693899575	0.261799387799149	1.30899693899575	0.242830568967	0.242830568968
2.35619449019234	0.261799387799149	1.30899693899575	0.23202215878	0.23202215871
0.261799387799149	1.30899693899575	1.30899693899575	0.59406289056	0.59406289039
1.30899693899575	1.30899693899575	1.30899693899575	-6.56191877E-002	-6.56191875E-002
2.35619449019234	1.30899693899575	1.30899693899575	0.15445645365	0.15445645348
0.261799387799149	2.35619449019234	1.30899693899575	0.45123800883	0.45123800870
1.30899693899575	2.35619449019234	1.30899693899575	1.299659600E-002	1.299659609E-002
2.35619449019234	2.35619449019234	1.30899693899575	0.15774935695	0.15774935681
0.261799387799149	0.261799387799149	2.35619449019234	-1.683548459E-002	-1.683548468E-002
1.30899693899575	0.261799387799149	2.35619449019234	-0.57131703876	-0.57131703855
2.35619449019234	0.261799387799149	2.35619449019234	-0.35628466793	-0.35628466797
0.261799387799149	1.30899693899575	2.35619449019234	0.45799547075	0.45799547037

1.30899693899575	1.30899693899575	2.35619449019234	-0.18843379843	-0.18843379794
2.35619449019234	1.30899693899575	2.35619449019234	9.325158014E-002	9.325157979E-002
0.261799387799149	2.35619449019234	2.35619449019234	0.30256837412	0.30256837385
1.30899693899575	2.35619449019234	2.35619449019234	-0.26000946507	-0.26000946466
2.35619449019234	2.35619449019234	2.35619449019234	-2.109387609E-002	-2.109387631E-002

$\|u_{num} - u_{exact}\|_C = 1.0854397936022005e - 009 (n_1 = n_2 = n_3 = 60)$. Где равномерно непрерывная норма разности двух сеточных функций численного и аналитического решений равна 10^{-9} и определяется по формуле - $\|u_{num} - u_{exact}\|_C = \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |u_{n,m,k}^{num} - u_{n,m,k}^{exact}|$ т.е. программа работает с использованием алгоритма

согласно формулам(19)-(28) с относительной точностью REAL(4)(лучше чем 10^{-8}) [10].

Поскольку при $n_1=10, n_2=10, n_3=10, m=6000$ $\|u_{num} - u_{exact}\|_C = 5.019113151139010E - 005$

а при $n_1=30, n_2=30, n_3=30, m=6000$ (уменьшение всех шагов сетки в 2 раза)

$$\|u_{num} - u_{exact}\|_C = 6.939077484835465E - 008$$

То алгебраический порядок погрешности p равен шести при использовании формул(25,27)- $q=1$

$$\frac{\|u_{num} - u_{exact}\|_C^1}{\|u_{num} - u_{exact}\|_C^{1/2}} = \frac{5.019113151139010E - 005}{7.891130154868975E - 007} \approx 63.4 \approx 2^6 = 2^p, p = 6$$

При использовании алгоритма(26,27) $q = 1 - eps = 1 - 5 \cdot 10^{-8} = 0.999999995$

$$\frac{\|u_{num} - u_{exact}\|_C^1}{\|u_{num} - u_{exact}\|_C^{1/2}} = \frac{5.013128145980872E - 005}{6.993329699778172E - 007} \approx 71.7 \approx 2^6 = 2^p, p = 6$$

Более высокое значение для порядка погрешности во втором случае объясняется экспоненциальным затуханием ошибки округления в правой части формулы (27) в слагаемых вида $u_{m-1, n-1, k-1}^s, \dots$ с параметром $q = 0.999999995$.

Лемма 6. Пусть начальная норма разности численного и точного решения конечна, тогда после s шагов итерационной формулы(26) конечная норма затухает по экспоненциальному закону от s и справедлива оценка

$$R_0 = \|u_{m,n,k}^0 - u_{m,n,k}^{exact}\|_C = \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |u_{n,m,k}^{0,num} - u_{n,m,k}^{exact}|, R_s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_0}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon s) = 0, q = 1 - \varepsilon \quad (33)$$

Доказательство. Согласно теореме о неподвижной точке [8, стр.75], итерационная последовательность (26)

имеет предел, и после s итераций получим оценку погрешности [8, стр.75]:

$$\begin{aligned} R_s &\leq \frac{R_0 q^s}{1-q}, q \rightarrow 1-0 \Leftrightarrow \varepsilon = 1-q \rightarrow +0, R_s \leq \frac{R_0 q^s}{1-q} = \frac{R_0 (1-\varepsilon)^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_0}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon s) = \\ &= \frac{R_0}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon s) \stackrel{s = \frac{1}{\varepsilon^{1+d}}, d > 0}{=} \frac{R_0 \exp(-\varepsilon^{-d})}{\varepsilon} = \frac{R_0}{\varepsilon \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^d}\right)} \stackrel{z = \frac{1}{\varepsilon^d}}{=} \frac{R_0}{\frac{1}{z^{1/d}} \exp(z)} \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{z^{1/d} R_0}{\exp(z)} \leq \frac{z^{[1/d]+1} R_0}{\frac{z^{[1/d]+1}}{([1/d]+1)!} + \frac{z^{[1/d]+2}}{([1/d]+2)!}} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Лемма 6 и формула(33) доказаны.

Замечание. Из формулы(34) следует, если $s \cdot \varepsilon = 1, R_s \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} s R_0 e^{-1}$, то ошибка округления в алгоритме(26) как и в(25) прямо пропорциональна числу итераций s . При выполнении условий в алгоритме (26): $\varepsilon = 1 - q \rightarrow 0, s \varepsilon = \varepsilon^{-d} \rightarrow \infty \Leftrightarrow s(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{1+d}}, d > 0, R_s \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ R_s мала.

Быстродействие алгоритма в секундах составляет для $n_1=30, n_2=30, n_3=30, m=6000$ ($t_2-t_1 = 12.85448$ с с нормой погрешности $\|u_{num} - u_{exact}\|_C = 6.939077484835465E - 008$). В то время как авторы работы [11]

получили время счета 15 минут ($n_1=20, n_2=20, n_3=20$) с алгоритмами вида $O(h^4)$ и погрешность в процентах, т.е. с точностью порядка 10^{-2} .

Программа написана на языке FORTRAN и представлена ниже с использованием всех функций и переменных двойной точности, также занесены данные из тестового примера 1.

```

module stolb;use dfmsl;integer(8),parameter:: n1=30,n2=30,n3=30,m=6000;end module
program one;use dfmsl;use stolb;real(8)::a,b,c,d,e,r,h1,h2,h3,ss
integer(8)::i,j,k;real(8)::res(0:n1+2,0:n2+2,0:n3+2)
real(8)::res0(0:n1+2,0:n2+2,0:m+2),l(n1+2),nu(n1+2),res1(0:n1+2,0:n2+2,0:n3+2,0:m+1),max,delta(0:n1+2,0:n2+2,0:n3+1)
real(8)::x,y,z,t,ch,sh,f,u1x,u2x,u1y,u2y,u1z,u2z,du,d4u,d4xyzu,pi,h22,h44,h66
ch(x)=(dexp(x)+dexp(-x))/2d0;sh(x)=(dexp(x)-dexp(-x))/2d0;f(x,y,z)=dsin(x)*dsin(y)*dsin(z);
u1x(y,z)= dsin(y)*dsin(z);u2x(y,z)= dsin(y)*dsin(z);u1y(x,z)=dsin(x)*dsin(2d0*z)
u2y(x,z)=dsin(x)*dsin(2d0*z);u1z(x,y)=dsin(3d0*x)*dsin(y)
u2z(x,y)=dsin(3d0*x)*dsin(y);du(x,y,z)=-3d0*dsin(x)*dsin(y)*dsin(z)
d4u(x,y,z)=3d0*dsin(x)*dsin(y)*dsin(z);d4xyzu(x,y,z)=3d0*dsin(x)*dsin(y)*dsin(z)
a=0d0;c=0d0;e=0d0;pi=2d0*dasin(1d0);b=pi;d=pi;r=pi
h1=(b-a)/dfloat(n1);h2=(d-c)/dfloat(n2);h3=(r-e)/dfloat(n3)
max=-1d3;do k=0,n3;z=e+h3*dfloat(k);do j=0,n2;y=c+h2*dfloat(j)
do i=0,n1;x=a+h1*dfloat(i);call uu(x,y,z,t);res(i,j,k)=t;if(mod(i,5)==0.and.mod(j,5)==0.and.mod(k,5)==0)then;endif
if(max<dabs(res(i,j,k)))then;max=dabs(res(i,j,k));endif;
enddo;enddo;enddo;do i=1,n1-1;x=a+h1*dfloat(i);do j=1,n2-1;y=c+h2*dfloat(j);do k=1,n3-1;z=r+h3*dfloat(k)
res0(i,j,k)=(u1x(y,z)+u2x(y,z)+u1y(x,z)+u2y(x,z)+u1z(x,y)+u2z(x,y))/6d0
enddo;enddo;enddo;do s=0,m;do j=0,n2;do k=0,n3;y=c+h2*dfloat(j)
z=e+h3*dfloat(k);res1(0,j,k,s)=u1x(y,z);res1(n1,j,k,s)=u2x(y,z)
enddo;enddo;do i=0,n1;do k=0,n3;x=a+h1*dfloat(i);z=e+h3*dfloat(k)
res1(i,0,k,s)=u1y(x,z);res1(i,n2,k,s)=u2y(x,z);enddo;enddo;do i=0,n1;do j=0,n2;x=a+h1*dfloat(i);y=c+h2*dfloat(j)
res1(i,j,0,s)=u1z(x,y);res1(i,j,n3,s)=u2z(x,y);enddo;enddo;enddo
h22=h1*h1;h44=h22*h22;h66=h44*h44;do s=0,m-1;do k=1,n3-1;z=e+h3*dfloat(k);
do j=1,n2-1;y=c+h2*dfloat(j);do i=1,n1-1;ss=0d0;x=a+h1*dfloat(i)
ss=(7d0/64d0)*(res1(i-1,j,k,s)+res1(i+1,j,k,s)+res1(i,j-1,k,s)+res1(i,j+1,k,s)+res1(i,j,k-1,s)+res1(i,j,k+1,s))
ss=ss+(3d0/128d0)*(res1(i-1,j+1,k,s)+res1(i-1,j,k+1,s)+res1(i-1,j-1,k,s)+res1(i-1,j,k-1,s)+res1(i,j-1,k-1,s)+res1(i,j-1,k+1,s))
ss=ss+(1d0/128d0)*(res1(i-1,j-1,k-1,s)+res1(i-1,j-1,k+1,s)+res1(i-1,j+1,k-1,s)+res1(i-1,j+1,k+1,s)+res1(i+1,j-1,k-1,s)+res1(i+1,j-1,k+1,s))
ss=ss-(15d0/64d0)*f(x,y,z)*h22-(5d0*h44/256d0)*du(x,y,z)-(h66/1536d0)*(d4u(x,y,z))-
(h66/384d0)*(d4xyzu(x,y,z))
res1(i,j,k,s+1)=ss;enddo;end do;enddo;enddo;max=-1d3;do k=0,n3;do j=0,n2;do i=0,n1
delta(i,j,k)=dabs(res(i,j,k)-res1(i,j,k,m));if(mod(i,2)==0.and.mod(j,2)==0.and.mod(k,2)==0)then
endif;if(max<=delta(i,j,k))then;max=delta(i,j,k);endif;enddo;enddo;enddo; print*,"normaC=",max;end program one;
subroutine uu(x,y,z,t);real(8)::x,y,z,t,pi,c1,c2,c3,c4,ch,sh
ch(x)=(dexp(x)+dexp(-x))/2d0;sh(x)=(dexp(x)-dexp(-x))/2d0
pi=2d0*dasin(1d0);c1=-dsin(x)*dsin(y)*dsin(z)/3d0
c2=dsin(y)*dsin(z)*(ch(x*dsqrt(2d0))+sh(x*dsqrt(2d0))*(1d0-ch(pi*dsqrt(2d0)))/sh(pi*dsqrt(2d0)))
c3=dsin(x)*dsin(2d0*z)*(ch(y*dsqrt(5d0))+sh(y*dsqrt(5d0))*(1d0-ch(pi*dsqrt(5d0)))/sh(pi*dsqrt(5d0)))
c4=dsin(3d0*x)*dsin(y)*(ch(z*dsqrt(10d0))+sh(z*dsqrt(10d0))*(1d0-ch(pi*dsqrt(10d0)))/sh(pi*dsqrt(10d0)))
t=c1+c2+c3+c4;end subroutine

```

Особую сложность в методах решения имеют дифференциальные уравнения с разрывами первого рода в краевых и начальных условиях [12,13]. Предложенный в работе алгоритм(26) с формулой(24) устойчив по отношению к разрывам первого рода в краевых условиях, например, к прибавлению постоянной к краевой функции одной грани (точки разрыва первого рода краевых условий появляются на все 4 ребрах данной грани).

В работе получены результаты:

- 1) Предложен минимальный симметричный 27 точечный шаблон для аппроксимации трёхмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде.
- 2) Доказано, что на 27 точечном шаблоне и равномерной сетке невозможна аппроксимация уравнения Пуассона выше шестого порядка.
- 3) В леммах 1-3 доказано, что коэффициенты разложения в ряд Тейлора суммы узловых значений в группах узлов, расположенных симметрично и на одинаковом расстоянии от центра куба содержат только частные производные четного порядка и четного порядка по каждой из трех переменных.

- 4) В леммах 4,5 доказано, что коэффициенты аппроксимации уравнения Пуассона линейной квадратурной формулой связаны уравнением связи, как следствие уравнения Пуассона, по одному уравнению на каждую четную степень шага сетки.
- 5) Найдена явная разностная схема аппроксимирующая трехмерное уравнение Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности, доказана ее устойчивость.
- 6) Численно показано с использованием точного аналитического решения тестирующего примера(28) и программы, что явная формула простой итерации(24) с алгоритмом (26) имеют шестой порядок погрешности.

Литература

- 2) Самарский А.А., Вабишев П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: Учебное пособие. Изд. 3-е. – М.:Издательство ЛКИ,2009. – 480 с.
- 3) Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Козелков А.С., Тетерина И.В. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. - М.: Издательство: Физматлит,2013 - 709 с.
- 4) Пикулин В.П. Практический курс по уравнениям математической физики : учеб. пособие / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М.: Наука,1995. – 224 с.
- 5) Пастухов, Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
- 6) Г.Р. Кирхгоф. Механика: Лекции по математической физике. Перевод с 4 немецкого издания. – М.: КомКнига, 2014. – 392 с.
- 7) Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR кода в стеганографии/ Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. //Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.
- 8) Волосова Н.К. Преобразование Радона и краевой задачи для уравнения Пуассона в стеганографии. Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 6-11 июля 2018 г. С. 61.
- 9) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа./ А.Н. Колмогоров, Фомин С.В. – М.: Наука,1976,543 с.
- 10) Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях./ Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. – М.: БИНОМ,2010,240 с.
- 11) Бартенев О.В. Современный Фортран./О.В. Бартенев – М.:Издательство “ДИАЛОГ – МИФИ”, 2000. – 450 с.
- 11) Гришин А.М., Якимов А.С. Об одном методе решения трехмерного эллиптического уравнения общего вида/ Гришин А.М., Якимов А.С.//Вычислительные технологии. – 2000.Т.5. №5. С. 38-52.
- 12) Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами./А.А. Козлов//Дифференциальные уравнения.-2008.-Т.44,№10. С.1319-1335.
- 13) Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае./А.А. Козлов//Дифференциальные уравнения.-2007.-Т.43,№5. С.621-627.
- 14) Вакуленко С.П. К методу оценки состояния железнодорожного полотна / С.П. Вакуленко, К.А. Волосов, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2016. – Т. 14, № 3 (64). – С. 20–35.
- 15) Вакуленко С.П., Волосова А.К., Волосова Н.К. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях. / С.П. Вакуленко, А. К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
- 16) Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова// Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. - №4. С.167 - 186.
- 17) Пастухов Ю.Ф. Необходимые условия в обратной вариационной задаче/ Ю.Ф. Пастухов// Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. 7:1. С. 285 – 288.

MINIMUM SCHEME OF THE DIFFERENCES FOR EQUATION OF THE POISSON ON BOX WITH SIXTH RATHER INACCURACY

D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV, N. VOLOSOVA

The Offered algorithm of the decision of the general lumpy marginal problem Dirihle for three-dimensional equation of the Poisson on parallelepiped with sixth rather inaccuracy with minimum 27 point patterns. Numerically stability of the algorithm is checked to breakup of the first sort of the border conditions on side parallelepiped. It Is Received decomposition to inaccuracy of the problem in general type for uneven net through derived even order from decision and right part of equation and even order on each of three variable. The Writtened program on base of the built algorithm and principle of the compressed images for evident formula iteration idle time. It Is Solved exactly and numerically test example, which comparison confirms the sixth order to inaccuracy for molded the numerical algorithm.

The Keywords: three-dimensional equation of the Poisson on parallelepiped, lumpy-marginal task Dirihle.

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

Н. К. Волосова, К.А. Волосов, Д. Ф. Пастухов, Ю. Ф. Пастухов

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ ПО МОДУЛЮ p С КУСОЧНО РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Научные руководители: профессор, д. ф.м. н., К. А. Волосов
МИИТ (Россия, г. Москва)

Аннотация: В работе предложено шифровать QR код на прямоугольнике с помощью однородной краевой задачи уравнения Пуассона с кусочно - разрывной правой частью. Все уравнения системы однородной краевой задачи рассматриваются над полем целых остатков по модулю простого числа p . Получено, что однозначное шифрование - дешифрование QR кода возможно, если модуль p простое число и число итераций уравнения Пуассона нечетно.

Ключевые слова: численное решение уравнения Пуассона в целых числах, методы шифрования QR кода.

The Abstract: In functioning is offered encode QR code on rectangle by means of uniform marginal task of the equation of the Poisson with partly - an explosive right part. All equations of the system of the uniform marginal task are considered on floor integer remainder modulo prime number p . It Is Received that unambiguous cryptooperation QR code possible if module p prime number and number iteration equations of the Poisson ill-defined.

The Keywords: the numerical decision of the equation of the Poisson in integer number, methods of the cryptooperation QR code.

Для решения уравнения Пуассона, если правая часть на прямоугольнике кусочно-непрерывна, как было показано в работах [1-5](Волосовой Н.К – МГТУ им. Н.Э. Баумана), можно отобразить пространство кусочно-непрерывных функций в пространство бесконечно дифференцируемых функций с помощью специального набора координатных функций (“суммы гауссианов”). При этом решение остаётся гладким, на классе $C^2[a, b] * [c, d]$.

В данной работе предложено решать уравнение Пуассона с кусочно-непрерывной правой частью в классе целых чисел по модулю простого числа p . Действительно, при стремлении шага равномерной сетки к нулю соседние узловые значения неизвестной функции всегда претерпевают разрыв первого рода (как разные целые числа), такой же разрыв первого рода на прямоугольнике имеет правая часть уравнения Пуассона для QR кода. Таким образом, два дискретных значения $QR\{0,1\}$ кода правой части непосредственно включаются в класс решения уравнения над полем целых чисел по модулю p .

Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), a < x < b, c < y < d \\ f(x, y) \in KC([a, b] * [c, d]), a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \\ u(a, y) = u(b, y) = u(x, c) = u(x, d) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

В однородной краевой задаче(1) правая часть уравнения $f(x, y)$, может иметь, например, вид шахматной доски (начало координатной системы совпадает с центром одной из прямоугольной клетки шахматной доски) и описывается формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h^2}, i + j \equiv 0 \pmod{2}, |x - x_i| < h_{11}/2, |y - y_j| < h_{22}/2, i = \overline{1, m_1} \\ 0, i + j \equiv 1 \pmod{2}, |x - x_i| < h_{11}/2, |y - y_j| < h_{22}/2, j = \overline{1, m_2} \end{cases} \quad (2)$$

где h_{11}, h_{22} – длины сторон элементарной большой прямоугольной клетки с координатами центра (x_i, y_j) , $h_{11} = \frac{b-a}{m_1}, h_{22} = \frac{d-c}{m_2}$, m_1, m_2 – число клеток по осям x, y соответственно на прямоугольнике с вершинами (a, c) и (b, d) диагонали прямоугольника. Преобразуем разрывную функцию(2)[4] в бесконечно дифференцируемую на прямоугольнике функцию

$$F(x, y) = \sum_{i,j=1}^{m_1, m_2} f(x_i, y_j) \exp\left(-\left(\frac{x-x_i}{\frac{h_{11}}{2}}\right)^2 - \left(\frac{y-y_j}{\frac{h_{22}}{2}}\right)^2\right), \begin{cases} x_i = a + (i) * h_{11}, i = \overline{1, m_1} \\ y_j = c + (j) * h_{22}, j = \overline{1, m_2} \end{cases} \quad (3)$$

В формуле(3) значения $\frac{h_{11}}{2}, \frac{h_{22}}{2}$ равны половинам длин сторон шахматной клетки. Преобразуем функцию(3) в два возможных целых значения $\{0,1\}$ по формуле

$$\overline{F}_{m,n} = [F(x_m, y_n)h^2] \pmod{p} \in \{0,1\}, x_m = a + h_1 m, y_n = c + h_2 n, n = \overline{0, n_1}, m = \overline{0, n_2} \quad (4)$$

В формуле(4) скобка[x] обозначает целую часть числа x. Максимальное значение функции $F(x, y)$ (4) больше максимума функции $f(x, y)$ в 1,05 раза (так как на центр каждого черного квадрата оказывают дополнительное влияние 4 гауссиана, построенные в соседних узлах). Шаг мелкой $h_1 = \frac{b-a}{n_1}, h_2 = \frac{d-c}{n_2}, \frac{n_1 h_1}{h_{11}} = m_1 = 10, \frac{n_2 h_2}{h_{22}} = m_2 = 10$. В каждом большом прямоугольнике шахматной доски содержится $m_1 + 1 = 11, m_2 + 1 = 11$ узлов мелкой сетки, т.е. в примерах, рассчитанных программой (Рис.1).

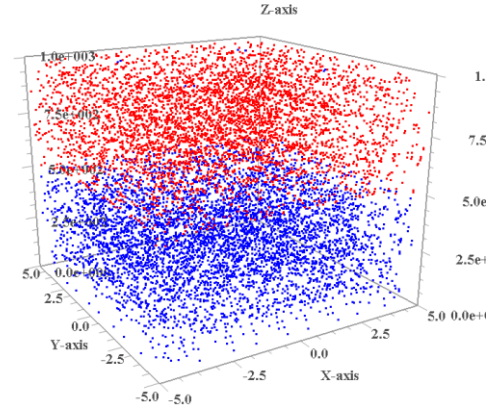
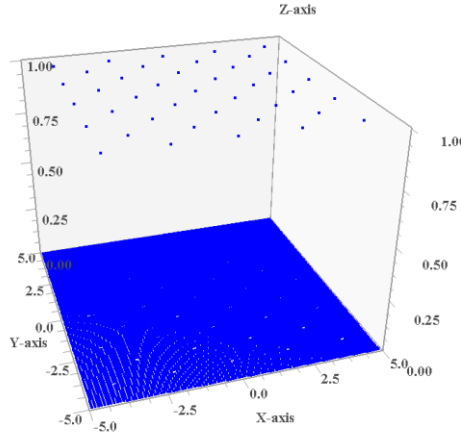


Рис.1.Правая часть уравнения Пуассона Рис.2. Решение уравнения Пуассона для $p=1001, k=31$.

Дифференциальной задаче (1) сопоставим разностную задачу (5) на равномерной сетке с равными шагами $h_1 = h_2 = h$ по осям и шаблоном крест(k - индекс итерации в рекуррентной формулы (5)).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{m+1,n}^k + u_{m,n+1}^k + u_{m-1,n}^k + u_{m,n-1}^k - 4u_{m,n}^{k+1}}{h^2} = F_{m,n}, \\ m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_2 - 1}, \frac{1}{h^2} \in N \\ F_{0,n} = F_{n_1,n} = F_{m,0} = F_{m,n_2} = 0 \\ u_{0,n}^k = u_{n_1,n}^k = u_{m,0}^k = u_{m,n_2}^k = 0, m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2} \end{array} \right. \quad (5)$$

Задачу(5) перепишем в виде рекуррентных разностных уравнений(6), где все операции над полем действительных чисел заменены алгебраическими над полем остатков по модулю простого числа p .

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{m,n}^{k+1} \equiv (u_{m+1,n}^k + u_{m,n+1}^k + u_{m-1,n}^k + u_{m,n-1}^k - F_{m,n} h^2) \text{mod}(p) * 4^{-1} \text{mod}(p) \\ m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_2 - 1}, \frac{1}{h^2} \in N, k = \overline{0, s - 1} \\ u_{0,n}^{k+1} = u_{n_1,n}^{k+1} = u_{m,0}^{k+1} = u_{m,n_2}^{k+1} \equiv 0 \text{mod}(p), m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2} \\ u_{m,n}^0 \equiv 0 \text{mod}(p), m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2} \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{m,n} = (u_{m+1,n}^s + u_{m,n+1}^s + u_{m-1,n}^s + u_{m,n-1}^s - 4u_{m,n}^s) * (h^2)^{-1} \text{mod}(p), \\ m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_2 - 1}, \frac{1}{h^2} \in N \\ F_{0,n} = F_{n_1,n} = F_{m,0} = F_{m,n_2} \equiv 0 \text{mod}(p) \end{array} \right. \quad (7)$$

Система уравнений (7) – это обратное преобразование для восстановления правой части уравнения Пуассона $F_{m,n}, \bar{F}_{m,n}, s$ –конечная итерация в (6).

Применим формулу(6) 1 раз при нулевом начальном решении $u_{m,n}^0 \equiv 0 \text{mod}(p), m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2}$ и однородных краевых условиях $F_{0,n} = F_{n_1,n} = F_{m,0} = F_{m,n_2} \equiv 0 \text{mod}(p), u_{0,n}^k = u_{n_1,n}^k = u_{m,0}^k = u_{m,n_2}^k = 0, m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2}$:

$$u_{m,n}^1 \equiv (u_{m+1,n}^0 + u_{m,n+1}^0 + u_{m-1,n}^0 + u_{m,n-1}^0 - F_{m,n} h^2) \text{mod}(p) * 4^{-1} \text{mod}(p) = \begin{cases} (-1) * 4^{-1} \text{mod}(p) \equiv (p-1) * 4^{-1} \text{mod}(p), \text{если } i = \frac{m}{m_1}, j = \frac{n}{m_2} \in N, i+j \equiv 0 \text{mod}(2) \\ 0 * 4^{-1} \text{mod}(p) \equiv 0 \text{mod}(p), \text{если } i = \frac{m}{m_1}, j = \frac{n}{m_2} \in N, i+j \equiv 1 \text{mod}(2) \end{cases} \quad (8)$$

Например, $u_{i,j}^1 = \begin{cases} 1000 * 4^{-1} \equiv 1000 * 751 \equiv 250 \text{mod}(1001), i+j \equiv 0 \text{mod}(2) \\ 0, i+j \equiv 1 \text{mod}(2) \end{cases}$

Вычисления на начальном этапе подтверждает программа (таблица 1).

Таблица 1. Решение уравнения Пуассона $u_{i,j}^1 (m=1, p=1001)$

(i/j)*10	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	250	0	250	0	250	0	250	0	250
20	0	250	0	250	0	250	0	250	0
30	250	0	250	0	250	0	250	0	250
40	0	250	0	250	0	250	0	250	0
50	250	0	250	0	250	0	250	0	250

60	0	250	0	250	0	250	0	250	0
70	250	0	250	0	250	0	250	0	250
80	0	250	0	250	0	250	0	250	0
90	250	0	250	0	250	0	250	0	250

В остальных узлах сетки инициализация решения дает ноль $u_{m,n}^1 = 0, i + j = \frac{m}{m_1} + \frac{n}{m_2} \neq 0 \pmod{2}, m = 0, n_1, n = 0, n_2$. Второе применение формулы(6) не изменяет решение в центрах черных и белых клеток шахматной доски ($i + j \equiv 0 \pmod{2}, i + j \equiv 1 \pmod{2}$). Но изменяет решение в соседних узлах:

$m \equiv \pm 1 \pmod{m_1}$ либо $n \equiv \pm 1 \pmod{m_2}, i + j = \left\lfloor \frac{m}{m_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{m_2} \right\rfloor \equiv 0 \pmod{2}$, получим

$$u_{m+1,n}^2 \equiv (u_{m+2,n}^1 + u_{m+1,n+1}^1 + u_{m,n}^1 + u_{m+1,n-1}^1 - F_{m+1,n} h^2) \pmod{p} * 4^{-1} \pmod{p} \equiv \\ \equiv (0 + 0 + 250 + 0 - 0) \pmod{1001} * 4^{-1} \pmod{1001} \equiv 563 \pmod{1001}$$

Последнее значение $563 \pmod{1001}$ подтверждает программа.

При $k=3$ по(6) с учетом симметрии в центрах черных клеток шахматной доски получим

$$u_{m,n}^3 \equiv (u_{m+1,n}^2 + u_{m-1,n}^2 + u_{m,n-1}^2 + u_{m,n+1}^2 - F_{m,n} h^2) \pmod{p} * 4^{-1} \pmod{p} \equiv \\ \equiv (563 + 563 + 563 + 563 - 1) \pmod{1001} * 4^{-1} \pmod{1001} \equiv 813 \pmod{1001}$$

Программа подтверждает последние вычисления (таблица 2).

Таблица 2. Решение уравнения Пуассона $u_{i,j}^3$ ($k=3, p=1001$)

(i/j)*10	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	813	0	813	0	813	0	813	0	813
20	0	813	0	813	0	813	0	813	0
30	813	0	813	0	813	0	813	0	813
40	0	813	0	813	0	813	0	813	0
50	813	0	813	0	813	0	813	0	813
60	0	813	0	813	0	813	0	813	0
70	813	0	813	0	813	0	813	0	813
80	0	813	0	813	0	813	0	813	0
90	813	0	813	0	813	0	813	0	813

Таблица 3. Решение уравнения Пуассона $u_{i,j}^{995}$ ($k=995, p=997$)

(i/j)*10	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	811	8	603	727	568	727	603	8	811
20	8	168	403	737	445	737	403	168	8
30	603	403	266	606	714	606	266	403	603
40	727	737	606	285	480	285	606	737	727
50	568	445	714	480	831	480	714	445	568
60	727	737	606	285	480	285	606	737	727
70	603	403	266	606	714	606	266	403	603
80	8	168	403	737	445	737	403	168	8
90	811	8	603	727	568	727	603	8	811

Таблица 4. Значения $F_{i,j}$ оператора Лапласа ($k=995, p=997$)

(i/j)*10	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	100	0	100	0	100	0	100	0	100
20	0	100	0	100	0	100	0	100	0
30	100	0	100	0	100	0	100	0	100
40	0	100	0	100	0	100	0	100	0
50	100	0	100	0	100	0	100	0	100
60	0	100	0	100	0	100	0	100	0
70	100	0	100	0	100	0	100	0	100
80	0	100	0	100	0	100	0	100	0
90	100	0	100	0	100	0	100	0	100

Таблица 4 и многие численные эксперименты показывают, что значение лапласиана в целых числах в центрах шахматных клеток равно $1/h^2$, если использовать нечетное число итераций k и простое число p (как на Рис.1).

Поскольку $1/h^2 \in \mathbb{N}$ и по определению $F_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{h^2}, i + j \equiv 0 \pmod{2} \\ 0, i + j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (9)$

$$F_{m,n} \equiv \frac{\overline{F_{m,n}}}{h^2} \pmod{p} \stackrel{\frac{1}{h^2} \in \mathbb{N}}{\iff} F_{m,n} \equiv \overline{F_{m,n}} \pmod{p} \left(\frac{1}{h}\right)^2 \pmod{p} \quad (10)$$

Для таблицы 4 получим по формуле (10) $\begin{cases} F_{m,n} = \left(\frac{1}{h^2}\right) \pmod{997} \equiv 100 \pmod{997}, i + j \equiv 0 \pmod{2} \\ 0, i + j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$

Т.е. полученные числа 100 и 0 совпадают со числами таблицы 4 и расположены в шахматном порядке в соответствии с формулой (10).

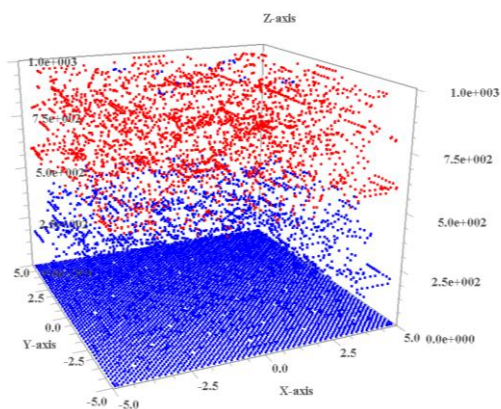


Рис.3. Значения оператора Лапласа $F_{m,n}$ для параметров $k=995$, $p=997$.

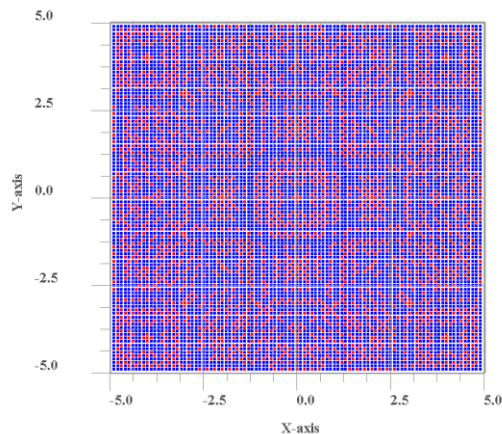


Рис.4. Проекция значений Рис.3 $F_{m,n}$ для параметров $k=995$, $p=997$ на плоскость Oxy .

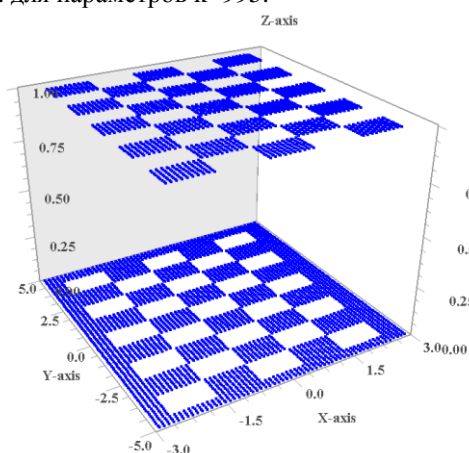


Рис.5. Восстановленная правая часть по значениям оператора Лапласа $\overline{F_{m,n}}$ для параметров $k=995$, $p=997$.

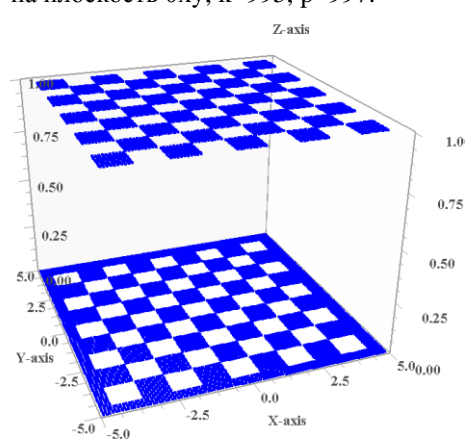


Рис.6. Восстановленная правая часть по значениям оператора Лапласа $\overline{F_{m,n}}$ ($k=995$, $p=997$ отношение сторон 3:5).

Как видно из таблицы 4, программа восстановила значение $F_{m,n} = \left(\frac{1}{h^2}\right) \bmod(p)$.

Программа для шифрования-дешифрования QR кода написана на языке Fortran. Программа генерирует три текстовых файла: 1) Решение уравнения Пуассона в целых числах по модулю простого числа p , конечное число итераций обозначено как параметр m (в программе $p=997$, $k=m=995$ - таблица 3). 2) Оператор Лапласа от решения Пуассона в целых числах – сглаженная правая часть QR кода (таблица 4). 3) Восстановленная кусочно-непрерывная функция QR кода на прямоугольнике (Рис.5). Программа выводит на экран также решение уравнения Пуассона в целых числах и значения лапласиана в центрах всех шахматных клеток на прямоугольнике (таблицы 3 и 4). Значения функции $f(x,y)$ правой части описаны в подпрограмме `real(8) function f(x,y)`, задаются с помощью формулы или по отдельности в виде массива для каждой шахматной клетки поля. Все переменные и функции в программе заданы с двойной точностью.

```

module stolb; use dfimsl; integer(8), parameter::m=995
integer(8), parameter::n1=100,n2=100,m1=10,m2=10,aa=-5,bb=5,cc=-5,dd=5,p=997
real(8), parameter::a=-5d0,b=5d0 ,c=-5d0,d=5d0
real(8), parameter::h1=(b-a)/dfloat(n1),h2=(d-c)/dfloat(n2)
real(8), parameter::h11=h1*dfloat(n1)/dfloat(m1),h22=h2*dfloat(n2)/dfloat(m2)
integer(8), parameter::h02=(n1*n1)/((bb-aa)*(bb-aa));end module
program puasson; use stolb; use dfimsl; integer(8):: i,j,k,ii,jj
integer(8)::u(0:m+1,0:n1+1,0:n2+1),delta(0:n1+1,0:n2+1),mm
integer(8)::res(0:n1+1,0:n2+1),min1,max1,min2,max2,zz1(0:n1+1,0:n2+1),zz2(0:n1+1,0:n2+1)
integer(8)::zz3(0:n1+1,0:n2+1),zz4(0:n1+1,0:n2+1),u1(-1:n1+2,-1:n2+2)
integer(8)::a1,a2,b1,b2,laplas(0:n1+1,0:n2+1),dat1(aa-1:bb+1,cc-1:dd+1),dat2(0:n1+1,0:n2+1)
integer(8)::zz(0:n1+1,0:n2+1);real(8)::x2,y2,x1,y1,x,y,z,r,t1,t2
integer(8)::fi,u2 ,min4,max4,pi,max5,c1,c2,c3,c0
integer(8)::k1,k2,k3,k4,x13,x14,x23,x24,y13,y14,y23,y24,obr,color
external f ,ff;real(4)::color1,u22 ;a1(x,y)=0;a2(x,y)=0;b1(x,y)=0;b2(x,y)=0

```

```

pi=2d0*dasin(1d0); call cpu_time(t1)
min1=1000;max1=-1000;min2=1000;max2=-1000;min3=1000;max3=-1000
do i=1,n1-1;do j=1,n2-1;x=a+h1*dfloat(i);y=c+h2*dfloat(j)
zz(i,j)=dint(f(x,y)*h1*h1);zz(i,j)=mod(zz(i,j),p)
if(zz(i,j)<0)then;zz(i,j)=zz(i,j)+p;endif;if(zz(i,j)<min1)then
min1=zz(i,j);elseif(zz(i,j)>max1)then;max1=zz(i,j);endif
enddo;enddo;print*,"min=",min1,"max=",max1;mm=-1d3
print*,"h1=",h1,"h2=",h2;do k=0,m;do i=0,n1;x=a+h1*dfloat(i)
u(k,i,0)=b1(x,c);u(k,i,n2)=b2(x,d);enddo;enddo
do k=0,m;do j=0,n2;y=c+h2*dfloat(j);u(k,0,j)=a1(a,y);u(k,n1,j)=a2(b,y)
enddo;enddo; do j=0,n2; do i=0,n1; x=a+h1*dfloat(i); y=c+h2*dfloat(j)
u(0,i,j)=0; enddo; enddo; call ff(4,p,obr); ccc=obr; do k=0,m-1,1; c1=0;
if(mod(k+1,p)==0)then; print*,"k+1=",k+1; endif; do i=1,n1-1;do j=1,n2-1,1;
c1= mod((u(k,i-1,j)+u(k,i+1,j)+u(k,i,j-1)+u(k,i,j+1))-zz(i,j)),p)
c1=c1*obr;c1=mod(c1,p);if(c1<0)then;c1=c1+p;else;c1=c1; endif;u(k+1,i,j)=c1;c1=0
if(mod(k+1,p)==0.and.mod(i,m1)==0.and.mod(j,m2)==0)then
print*,i,j,u(k+1,i,j); endif;enddo;enddo;enddo
do j=1,n2-1;do i=1,n1-1;if( u(m,i,j)<=min2)then
min2=u(m,i,j);elseif( u(m,i,j)>=max2)then; max2=u(m,i,j);endif;enddo;
enddo;do i=1, n1-1;do j=1,n2-1; u1(i,j)=u(m,i,j);enddo;enddo;print*,min2,max2
open(1, file='1.txt');do j=1,n2-1;do i=1,n1-1; x0=a+h1*dfloat(i);
y0=c+h2*dfloat(j); u2= u1(i,j); color=dint(2*(dfloat(u2-min2)/dfloat(max2-min2)))
color=mod(color,2);color1=dfloat(color)
if(mod(i,m1)==0.and.mod(j,m2)==0)then; print*,i,j,u1(i,j)
endif;1 write(1,*) x0,y0,float(u2),color
enddo;enddo; pause;call ff(h02,p,obr);ccc1=obr; do j=1,n2-1;do i=1,n1-1
laplas(i,j)=mod((u(m,i-1,j)+u(m,i+1,j)+u(m,i,j-1)+u(m,i,j+1))-4*u(m,i,j)),p)
laplas(i,j)=laplas(i,j)*h02;laplas(i,j)=mod(laplas(i,j),p)
if(laplas(i,j)<0)then;laplas(i,j)=laplas(i,j)+p
endif;if(laplas(i,j)>=max4)then;max4=laplas(i,j);elseif(laplas(i,j)<=min4)then; min4=laplas(i,j); endif;
if(mod(i,m1)==0.and.mod(j,m2)==0)then;
print*,i,j,laplas(i,j);endif;enddo; enddo; pause;open(3, file='3.txt')
print*,min4,max4; do j=1,n2-1;do i=1,n1-1; x=a+h1*dfloat(i)
y=c+h2*dfloat(j);u2=laplas(i,j); x0=x;y0=y;
color=mod(int(10d0*((u2-min4)/(max4-min4))),4); color1=color;u22=u2;
3 write(3,*) x0,y0,u22,color1; enddo;enddo;do jj=cc+1,dd-1;do ii=aa+1,bb-1
i=(ii-aa)*(n1/m1);j=(jj-cc)*(n2/m2); if(laplas(i,j)>=9.0d-1)then
dat1(ii,jj)=1d0; else; dat1(ii,jj)=0d0;endif;enddo;enddo
z=0d0; do i =1,n1-1;do j=1,n2-1; z=0d0; x=a+h1*dfloat(i)
y=c+h2*dfloat(j); do i1=aa+1,bb-1; do j1=cc+1,dd-1;xx=h11*dfloat(i1);
yy= h22*dfloat(j1)
if(x<xx+h11/2d0.and.x>=xx-h11/2d0-h1/2d0.and.y<yy+h22/2d0.and.y>=yy-h22/2d0-h2/2d0)then
z=dat1(i1,j1);dat2(i,j)=z; else; dat2(i,j)=z; endif; enddo; enddo; z=0d0; enddo;
enddo; open(4, file='4.txt');do j=1,n2-1; do i=1,n1-1; x=a+h1*dfloat(i);
y=c+h2*dfloat(j); u2=dat2(i,j);x0=x;y0=y;color=float(2*(u2-min4)/(max4-min4));
color1=color;u22=u2;
4 write(4,*) x0,y0,u22,color1;enddo;enddo;call cpu_time(t2)
print*,"t2-t1=",t2-t1; end program puasson;
real(8) function f(x,y)
use dfimsl;use stolb;integer(8)::i,j;real(8)::dat(3,aa:bb,cc:dd),x,y
do i=aa,bb,1;do j=cc,dd,1;dat(1,i,j)=h11*dfloat(i)
dat(2,i,j)=h22*dfloat(j);if(mod((i+j),2)==0)then;dat(3,i,j)=h02
else;dat(3,i,j)=0d0;endif;enddo;enddo;f=0d0;do i=aa,bb;do j=cc,dd
f=f+dat(3,i,j)*dexp(-(x-dat(1,i,j))*(x-dat(1,i,j))/(h11*h11*2.5d-1)-(y-dat(2,i,j))*(y-dat(2,i,j))/(h22*h22*2.5d-1))
enddo;enddo;end function f;
subroutine ff(n,p2,obr);use dfimsl;use stolb
integer(8)::n,i,p2,obr;do i=0,p2-1;if(mod(n*i,p2)==1)then;obr=i
endif;enddo;end subroutine ff

```

Отметим, что передавать QR код по каналу связи в зашифрованном виде можно используя не только уравнение Пуассона в целых числах, но и с помощью волнового уравнения на отрезке в целых числах. Новые результаты, нацеленные на высокое быстродействие и двойную точность численного решения волнового уравнения, изложены авторами в работах [6, 7].

Список использованных источников

- 1) Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
- 2) Волосова Н.К. Применение преобразования Радона в стеганографии. LXXI Тезисы докладов международной конференции «Герценовские чтения». СПб, 2018г. С. 234-238.
- 3) Волосова Н.К. Преобразование Радона и краевой задачи для уравнения Пуассона в стеганографии. Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 6-11 июля 2018г. С. 61.
- 4) Вакуленко С.П. Способы передачи QR-кода в компьютерной стеганографии / С.П. Вакуленко, Н. К. Волосова, Д. Ф. Пастухов // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 5 (78). – С. 14–25.
- 5) Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф., Волосов К.А. Методы расширения области применения методов математической физики. Международная конференция “Квазилинейные уравнения и обратные задачи” QIPAC Conference handbook and proceedings p.20,..3 – 5.12.2018.
- 6) Пастухов, Д.Ф. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 167–186.
- 7) Пастухов, Д.Ф. К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи для волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 60–74.

N. K. Volosova, K.A. The Volosov, D. F. Pastuhov, YU. F. Pastuhov
DECISION EQUATIONS OF THE POISSON IN INTEGER NUMBER MODULO p ON RECTANGLE WITH
KUSOCHNO EXPLOSIVE RIGHT PART
master N. K. Volosova MGTU im. N.E. Bauman (Russia, Moscow), professor, d. f.m. n., K. A. Volosov МИИТ
(Russia, Moscow),

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6 УДК 517.958

СОГЛАСОВАНИЕ ПОРЯДКОВ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРА В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ И УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Герец А.Ю. студент 3 курса, Зеленкевич А.А. студент 2 курса
Гурьева Н.А., к.ф.м.н., Пастухов Ю.Ф., к.ф.м.н., Пастухов Д.Ф., к.ф.м.н.
(Полоцкий государственный университет)

Аннотация: В работе численными методами показано, что разностная схема аппроксимирует задачу математической физики параболического типа с четвертым порядком для приведенного примера относительно шага сетки при условии, что разностные дифференциальный и граничный (граничное условие Неймана) операторы построены с одинаковым четвертым порядком аппроксимации. Приведен контр пример, когда граничный оператор имеет первый порядок аппроксимации, а дифференциальный четвертый порядок, сходимость разностного решения к точному решению дифференциальной задачи не имеет места. Теоретически обоснована сходимость или расходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в указанных примерах. Получены формулы с аппроксимацией четвертым порядком для граничного оператора с однородным и неоднородным условием Неймана для одномерных уравнений в частных производных эллиптического, параболического и гиперболического типов, а также при аппроксимации краевых задач.

Ключевые слова: уравнения математической физики, разностная схема, порядок аппроксимации дифференциального и граничного операторов.

CO-ORDINATION ORDER to APROXIMATIONS DIFFERENTIAL And BORDER OPERATOR In MARGINAL PROBLEM And EQUATIONS In QUOTIENT DERIVED

Hertz A.V. student 3 courses, Zelenkevich A.A. student 2 courses
Gureva N.A., k.f.m.n., Pastuhov YU.F., k.f.m.n., Pastuhov D.F., k.f.m.n.
Polockiy state university

The Abstract: In work by numerical methods is shown that numerical scheme approximates the problem mathematical physicists parabolic type with 4 rather for cites an instance for step of the net provided that разностные differential and border (the border condition of Neyman) operators are built with alike rather approximations. The Broughted rebels example, when border operator has a first order to aproximations, but differential 4 orders, convergence разностного decisions to exact decision of the differential problem has a no place. Is it Theoretically motivated convergence or расходимость decisions разностной problems to decision of the differential problem in specified example. Formulas are Received with aproximation четвертым rather for border operator with uniform and lumpy condition of Neyman for univariate equations in quotient derived elliptical, parabolic and hyperbolic types, as well as at aproximations of the marginal problems.

The Keywords: equations mathematical physicists, the numerical scheme, order to convergence differential and border operator.

Введение

Рассмотрим в области D с границей G краевую дифференциальную задачу:

$$Lu = f \quad \text{в } D \quad (1)$$

с граничным условием

$$lu = \varphi \quad \text{на } G \quad (2)$$

Здесь L и l - дифференциальные операторы; и f, φ - заданные, а u - искомый элемент некоторых линейных нормированных функциональных пространств F, Φ, U соответственно [1]. Разностную схему определяют как семейство сеточных задач, зависящих от параметра (шага) h :

$$L_h u_h = f_h \quad \text{на сетке в области } D_h \quad (3)$$

$$l_h u_h = \varphi_h \quad \text{на граничной сетке } G_h \quad (4)$$

Говорят, что разностная схема (3),(4) аппроксимирует на решении u с порядком аппроксимации $p = \min(p_1, p_2)$ дифференциальную задачу (1),(2), если существуют такие положительные постоянные h_0, c_1, p_1, c_2, p_2 , не зависящие от h , что при всех $h \leq h_0$, справедливы неравенства:

$$\|L_h(u) - f_h\|_{F_h} \leq c_1 h^{p_1}, \quad \|l_h(u) - \varphi_h\|_{\Phi_p} \leq c_2 h^{p_2}$$

Из определения порядка аппроксимации следует, что для максимальной точности аппроксимации разностной задачи (3),(4) и экономии машинного времени необходимо соблюдение равенства:

$$p_1 = p_2 = p \quad (5)$$

Постановка задачи

Для обоснования условия (5) рассмотрим численное решение начально-краевой задачи параболического типа[2], стр.193:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = \cos(2x), 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, 0), t \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Система уравнений (6) имеет точное аналитическое решение: $u(x, t) = e^{-4t} \cos(2x)$. Действительно:

$$u(x, t)_t = u(x, t)_{xx} = -4 \cos(2x) e^{-4t}, 0 < x < \pi, t > 0,$$

$$u(x, 0) = \cos(2x), 0 \leq x \leq \pi, u_x(x, t) = -2e^{-4t} \sin(2x), u_x(0, t) = u_x(\pi, 0) = 0, t \geq 0.$$

Используем задачу (6), в которой третье уравнение представляет собой граничное условие Неймана, в качестве теста при составлении программы. В задаче (6) первое уравнение соответствует дифференциальной задаче (1) в полу полосе $0 < x < \pi, t > 0$. Третье уравнение является граничным оператором (2) на лучах: $t \geq 0, x = 0, x = \pi$. Рассмотрим разностное уравнение (3) для задачи (6):

$$\frac{(u_m^{n+1} - u_m^n)}{\tau} = \frac{(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n)}{h^2}, m = 1, 2, 3, \dots, N, n = 1, 2, 3 \quad (7)$$

Уравнение (7) представляет явную разностную схему однородного уравнения теплопроводности на сетке с равномерным шагом по времени τ и по координате $h = \pi / N$. Обозначив параметр $z = \tau / h^2$, уравнение (7) преобразуем к виду:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n), \quad (8)$$

Разложим узловые значения $u_m^{n+1}, u_{m+1}^n, u_{m-1}^n$ в формуле (8) в ряд Тейлора для получения максимального порядка аппроксимации с центром разложения u_m^n :

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau \frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial t^2} + o(\tau^2)$$

$$u_{m+1}^n = u_m^n + h \frac{\partial(u_m^n)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3(u_m^n)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} + o(h^4)$$

$$u_{m-1}^n = u_m^n - h \frac{\partial(u_m^n)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3(u_m^n)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} + o(h^4)$$

Подставляя разложения для $u_m^{n+1}, u_{m+1}^n, u_{m-1}^n$ в формулу(8), получим:

$$\tau \frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial t^2} = z \left(h^2 \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} \right) + o(\tau^2 + h^4) \quad (9)$$

Потребуем по отдельности равенства первых и вторых слагаемых в формуле (9) по отдельности:

$$\tau \frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} = z h^2 \frac{\partial(u_m^n)}{\partial x^2}, \text{ используя первое уравнение системы (6) } \frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} = \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2}, \text{ получим } \tau = z h^2,$$

которое справедливо для любого z . Преобразуем вторую производную во времени, считая функцию $u(x, t)$ дважды по t и четырежды по x непрерывно дифференцируемой:

$$\frac{\partial(u_m^n)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} u_m^n \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} (u_m^n) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_m^n) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} (u_m^n)$$

Учитывая последнее равенство и требование:

$$\frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial t^2} = z \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} \Leftrightarrow \frac{\tau^2}{2} = z \frac{h^4}{12} = \frac{\tau}{h^2} \frac{h^4}{12} = \tau \frac{h^2}{12} \Leftrightarrow \tau = \frac{h^2}{6} \Leftrightarrow z = \frac{1}{6}. \quad (10)$$

Итак, максимальный порядок аппроксимации дифференциального оператора (1) по h $p_1 = 4$ с параметром $z = \frac{1}{6}$. Тогда уравнение (8) перепишем в виде:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{1}{6}(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) + o(\tau^2 + h^4) = \frac{1}{6}(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n + 4u_m^n) + o(\tau^2 + h^4). \quad (11)$$

Разностное уравнение (8) необходимо исследовать на устойчивость. Используем признак спектральной устойчивости. Спектральный признак состоит в следующем: если при заданном законе стремления τ и h к нулю для всех $0 \leq \varphi < 2\pi$ справедливо неравенство $|\lambda(\varphi)| \leq 1$, то спектральный признак выполнен, и численная схема может быть использована для решения уравнения $Lu = f$. Комплексное число $\lambda(\varphi)$ определяет замкнутую кривую на комплексной плоскости при изменении φ . В качестве функций возмущения численной схемы выберем $u_m^n = (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$ [1] и подставим в (8):

$$(\lambda(\varphi))^{n+1} e^{im\varphi} - (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi} = z(\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2)$$

Разделим последнее уравнение на $(\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$:

$$(\lambda(\varphi) - 1) = 2z(\cos(\varphi) - 1) = -4z \left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)^2 \Leftrightarrow \lambda(\varphi) = 1 - 4z \left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)^2 \quad (12)$$

Если параметр $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$, то справедливо из (12): $-1 \leq \lambda(\varphi) \leq 1 \Leftrightarrow |\lambda(\varphi)| \leq 1$.

Таким образом, при $z = \frac{1}{6}$ численная схема (11) имеет не только максимальный порядок аппроксимации, но и является устойчивой.

Построим схему граничного оператора $l_h u_n = \varphi_n$ для граничного условия $lu = \varphi$ - третьего уравнения системы (6): $u_x(0, t) = u_x(\pi, 0)$ с тем же порядком точности: $p_2 = p_1 = 4$. Составим квадратурную формулу для граничного оператора (производной функции в нуле $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$) методом неопределенных коэффициентов[1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{1}{h} (a u_0^n + b u_1^n + c u_2^n + d u_3^n + e u_4^n) + r(x) \quad (13)$$

В формуле неизвестные коэффициенты a, b, c, d, e подлежат определению, h шаг равномерной сетки, $u_0^n, u_1^n, u_2^n, u_3^n, u_4^n$ значения функции u_m^n в 5 ближайших узлах к левой границе отрезка $[0, \pi]$. $r(x)$ – невязка квадратуры.

Потребуем равенства нулю остатка $r(x)$ в формуле (13) для многочленов максимально высокой степени:

$$\text{а) } u(x, t) = 1, \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 = \frac{1}{h} (a + b + c + d + e) \Leftrightarrow a + b + c + d + e = 0.$$

$$\text{b) } u(x,t) = x, \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 1 = \frac{1}{h}(a \cdot 0 + bh + 2hc + 3dh + 4eh) \Leftrightarrow b + 2c + 3d + 4e = 1.$$

$$\text{c) } u(x,t) = x^2, \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \frac{1}{h}(a0 + bh^2 + c(2h)^2 + d(3h)^2 + e(4h)^2) \Leftrightarrow b + 4c + 9d + 16e = 0. \quad \text{d)}$$

$$u(x,t) = x^3, \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \frac{1}{h}(a0 + bh^3 + c(2h)^3 + d(3h)^3 + e(4h)^3) \Leftrightarrow b + 8c + 27d + 64e = 0.$$

$$\text{e) } u(x,t) = x^4, \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \frac{1}{h}(a0 + bh^4 + c(2h)^4 + d(3h)^4 + e(4h)^4) \Leftrightarrow b + 16c + 81d + 256e = 0.$$

Решаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ b + 2c + 3d + 4e = 1 \\ b + 4c + 9d + 16e = 0 \\ b + 8c + 27d + 64e = 0 \\ b + 16c + 81d + 256e = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Линейная система уравнений (14) имеет единственное решение: $a = -\frac{25}{12}, b = 4, c = -3, d = \frac{4}{3}, e = -\frac{1}{4}$

Подставляя найденные коэффициенты в (13), получим квадратуру, точную для многочленов степени не выше четырех, т.е. порядок сходимости граничного оператора в поставленной задаче также $p_2 = 4 = p_1$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{1}{12h}(-25u_0^n + 48u_1^n - 36u_2^n + 16u_3^n - u_4^n) \quad (15)$$

Так как, по условию задачи (6) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, то выразим из (15) u_0^n :

$$u_0^n = \frac{1}{25}(48u_1^n - 36u_2^n + 16u_3^n - 3u_4^n) \quad (16)$$

В силу симметрии задачи для граничного оператора на правой границе в точке $x = \pi$:

$$u_N^n = \frac{1}{25}(48u_{N-1}^n - 36u_{N-2}^n + 16u_{N-3}^n - 3u_{N-4}^n) \quad (17)$$

Учитывая связь $\tau = zh^2 = \frac{1}{6}h^2$, видим, что при малых h : $\tau \ll h$. Выберем временной отрезок

$T = M\tau$ таким образом, чтобы по порядку величины $T \sim X = Nh$ и исходная задача рассматривается

на прямоугольнике с соизмеримыми сторонами. Положим $M \sim N^2 \Rightarrow T = M\tau = N^2\tau = \frac{N^2h^2}{6} = \frac{\pi^2}{6} \sim 1$.

Окончательно выпишем разностные уравнения численной схемы, соответствующей дифференциальной задаче (6):

$$\begin{cases} u_m^0 = \cos(2mh), m = 0, 1, 2, \dots, N \\ u_m^n = \frac{(u_{m+1}^{n-1} + u_{m-1}^{n-1} + 4u_m^{n-1})}{6}, m = 1, 2, \dots, N-1, n = 1, 2, \dots, N^2 \\ u_0^n = \frac{1}{25}(48u_1^n - 36u_2^n + 16u_3^n - 3u_4^n), n = 1, 2, \dots, N^2 \\ u_N^n = \frac{1}{25}(48u_{N-1}^n - 36u_{N-2}^n + 16u_{N-3}^n - 3u_{N-4}^n), n = 1, 2, \dots, N^2 \end{cases} \quad (18)$$

Первое уравнение в численной схеме (18) представляет собой начальное условие задачи (6). Тогда точное решение $u(x, T)$ в узлах равномерной сетки в последнем временном слое $n = N^2$:

$$u_m^{N^2} = \cos(2mh)e^{-4T} = \cos(2mh)e^{-\frac{4h^2N^2}{6}} = \cos(2mh)e^{-\frac{2\pi^2}{3}}, m = 0, 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

Описание программы

Для численной схемы (18) и теста (19) напомним программу, например, на языке C.

Ниже следующая программа написана с двойной точностью:

```
#include <stdio.h>
```

```
#include <math.h>
```

```
int N = 100, N1 = N * N;
```

```
int main(){
```

```
int k, j;
```

```
double res[N+1][N1+1], x[N+1];
```

```
double pi, h, dt;
```

```
pi = 2.0 * a sin(1.0);
```

```
h = pi / double(N);
```

```
dt = \frac{h * h}{6.0};
```

```
for(k = 0; k < N; k++){
```

```
res[k][0] = cos(2.0 * h * double(k));
```

```
x[k] = res[k][0] * exp(-4.0 * dt * double(N1));
```

```
for(j = 1; j <= N1; j++){
```

```
{
```

```
for(k = 1; k <= N - 1; k++){
```

```
{
```

```
res[k][j] = \left(\frac{1.0}{6.0}\right) * (res[k+1][j-1] + res[k-1][j-1] + 4.0 * res[k][j-1]);
```

```
}}
```

```
res[0][j] = \left(\frac{1.0}{25.0}\right) (48.0 * res[1][j] - 36.0 * res[2][j] + 16.0 * res[3][j] - 3.0 * res[4][j]); (20)
```

```
res[N][j] = \left(\frac{1.0}{25.0}\right) (48.0 * res[N-1][j] - 36.0 * res[N-2][j] + 16.0 * res[N-3][j] - 3.0 * res[N-4][j]);
```

```
(21)
```

```
printf("x axact resolve \ n ");
```

```
for(k = 0; k <= N; k++){
```

```
if(k - 10 * int(double(k) / double(10)) == 0)
```

```

{
print f("x = %lf axact = %.14lf res = %.14lf \n",h*double(k),x(k),res[k][N1])
}}
print f("h = %lf h*h*h*h = %lf \n",h,h*h*h*h); }

```

Результаты численного решения

Покажем, насколько важно требовать согласование порядков аппроксимации $p_2 = p_1$ дифференциального и граничного операторов в задачах математической физики. Для этого аппроксимируем сначала граничный оператор первым порядком сходимости $p_1 = 1$, а дифференциальный оператор (11), по – прежнему, четвертым порядком $p_2 = 4$. Т.е. в формулах (16),(17) положим $u_0^n = u_1^n, u_N^n = u_{N-1}^n$ и в программе в формулах (20),(21) $res[0][j] = res[1][j], res[N][j] = res[N-1][j]$. Программа возвращает таблицу значений $x, axact, resolve, delta$ (координату, точное решение, численное решение, разность между численным и точным решениями $delta = resolve - axact$):

Таблица 1(N=400)

x	$axact$	$resolve$	$delta$
0.00000000	0.00138821536422	-0.00116477704469	-0.00255299240891
0.31415927	0.00112308982151	-0.00141598028627	-0.00255282114823
0.62831853	0.00042898213940	-0.00208561646036	-0.00255264003627
0.94247780	-0.00042898213940	-0.00291666632857	-0.00255244911732
1.25663706	-0.00112308982151	-0.00359015697326	-0.00255224843765
1.57079633	-0.00138821536422	-0.00384758973613	-0.00255203804554
1.88495559	-0.00112308982151	-0.00359015697326	-0.00255181799127
2.19911486	-0.00042898213940	-0.00359015697326	-0.00255158832706
2.51327412	0.00042898213940	-0.00208561646036	-0.00255134910711
2.82743339	0.00112308982151	-0.00141598028627	-0.00255110038758
3.14159265	0.00138821536422	-0.00116477704469	-0.00255084222654

$$h = 7.853981633974483E - 003, \quad h^4 = 3.805042618515720E - 009$$

Сравнивая значения $axact$ и $resolve$ в таблице 1, видим, что приближенное решение даже не сходится к точному, так как приближенное решение всегда отрицательно, в то время как точное

$$u_m^{N^2} = \cos(2mh)e^{-\frac{2x^2}{3}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \text{ дважды меняет знак при } 0 \leq x \leq \pi.$$

Пусть теперь $p_1 = p_2 = 4$ формулы (16),(17),(20),(21) написаны с четвертым порядком аппроксимации. В таблице 2($N = 200$) и в таблице 3($N = 400$) также указаны полученные программой значения $x, axact, resolve, delta$.

Таблица 2($N = 200$)

x	$axact$	$resolve$	$delta$
0.00000000	0.00138821536422	0.00138821868693	0.00000000332271
0.31415927	0.00112308982151	0.00112309312266	0.00000000332223
0.62831853	0.00042898213940	0.00042898540013	0.00000000332168
0.94247780	-0.00042898213940	-0.00042897892418	0.00000000332107
1.25663706	-0.00112308982151	-0.00112308664158	0.00000000332039
1.57079633	-0.00138821536422	-0.00138821219752	0.00000000331964
1.88495559	-0.00112308982151	-0.00112308664158	0.00000000331883
2.19911486	-0.00042898213940	-0.00042897892418	0.00000000331796
2.51327412	0.00042898213940	0.00042898540013	0.00000000331702
2.82743339	0.00112308982151	0.00112309312266	0.00000000331602
3.14159265	0.00138821536422	0.00138821868693	0.00000000331495

$$h = 1.570796326794897E - 002, \quad 6.088068189625153E - 008$$

В пространстве C непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ функций с нормой Чебышева $\|x\|_C = \max_{t \in [0, \pi]} |x(t)|$ норма разности приближенного и точного решений, заданной на равномерной сетке, равна

$$\|delta\| = \left\| u_m^{N^2}(\text{resolve}) - u_m^{N^2}(\text{axact}) \right\|_C = \max_{[m=0, \dots, N]} |delta_m^{N^2}|$$

Из таблицы 2 видно при $(N = 200)$, что $\|delta\|_C < 4 \cdot 10^{-9}$ в то время как $h^4 > 6 \cdot 10^{-8}$, Другими словами, равномерная норма разности не превышает четвертой степени шага равномерной сетки h .

Таблица 3 (N=400)

x	<i>axact</i>	<i>resolve</i>	<i>delta</i>
0.00000000	0.00138821536422	0.00138821868693	0.00000000010439
0.31415927	0.00112308982151	0.00112308992513	0.00000000010439
0.62831853	0.00042898213940	0.00042898224150	0.00000000010438
0.94247780	-0.00042898213940	-0.00042898203902	0.00000000010437
1.25663706	-0.00112308982151	-0.00112308972249	0.00000000010436
1.57079633	-0.00138821536422	-0.00138821526571	0.00000000010435
1.88495559	-0.00112308982151	-0.00112308972249	0.00000000010434
2.19911486	-0.00042898213940	-0.00042898203902	0.00000000010433
2.51327412	0.00042898213940	0.00042898224150	0.00000000010432
2.82743339	0.00112308982151	0.00112308992513	0.00000000010430
3.14159265	0.00138821536422	0.00138821546861	0.00000000010429

$$h = 7.853981633974483E-003, \quad h^4 = 3.805042618515720E-009$$

Аналогично, из таблицы 3 видно, что при $(N = 400)$ $\|delta\|_C < 2 \cdot 10^{-10}$ в то время как $h^4 > 3 \cdot 10^{-9}$, и равномерная норма разности также не превышает четвертой порядка степени шага сетки h .

В общем случае, для определения (оценки) порядка сходимости разностной схемы, как определяет А.А.Самарский [3], стр. 57, необходимо требовать уменьшение погрешности (нормы разности приближенного и точного решений) в 16 раз при уменьшении шага сетки h в 2 раза (увеличении N в 2 раза) – для сходимости с четвертым порядком. В данной разностной схеме при увеличении N в 2 раза (с 200 до 400) погрешность по норме Чебышева уменьшается примерно в $\left(\frac{3 \cdot 10^{-9}}{10^{-10}} = 30 > 16 \right)$ раз.

Необходимо выбирать большие N , так как указанное требование может проявляться на практике только в асимптотике [3].

Другими словами, численная схема (18) аппроксимирует задачу (6) и ее решение на последнем временном слое (19) с четвертым порядком. Легко видеть, что в общем случае от формулы (11) на конечном временном слое достаточно требовать меньшей точности – второй порядок сходимости:

$$\Delta u_m^{N^2} \sim N^2 o(\tau^2 + h^4) \sim N^2 o(h^4) \sim o(N^2 h^4) \sim o\left(\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 h^4\right) \sim o(h^2) \quad (20)$$

Используя формулу (20), можно теоретически обосновать сходимостью (расходимостью) ∞ . Действительно, в случае равенства $p_2 = p_1 = 4$ порядок аппроксимации общей задачи $p = \min(p_1, p_2) = 4$ и согласно (20) на последнем временном слое разностное решение (18) сходится при $h \rightarrow 0$ к решению дифференциальной задачи $(u(x, t) - u_h(x, t) \sim o(h^2))$ (6) не хуже чем со вторым порядком.

Если $p_2 = 1; p_1 = 4$, то $p = \min(p_1, p_2) = 1$, т.е. на конечном временном слое невязка между решениями разностной и дифференциальной задачами имеет асимптотику:

$$N^2 o(h) \sim N^2 h o(1) = N^2 \left(\frac{\pi}{N} \right) o(1) \sim N o(1).$$

Поскольку $o(1)$ может иметь слабую сходимость, например, при $h \rightarrow 0 (\Leftrightarrow N \rightarrow \infty)$; $o(1) \sim \frac{1}{\ln N}$,

То $|u(x, t) - u_h(x, t)| \sim N/\ln N \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$.

Что и показывает расходимость задачи в случае $x, axact, resolve, delta$.

Выводы

- 1) В работе численными методами показано, что разностная схема (18) аппроксимирует задачу математической физики (6) с уравнением параболического типа четвертым порядком относительно шага сетки при условии, что разностные дифференциальный и граничный (граничное условие Неймана) операторы построены с одинаковым четвертым порядком аппроксимации.
- 2) Приведен контр пример, в котором дифференциальный оператор имеет четвертый порядок аппроксимации, а граничный оператор первый порядок аппроксимации. В этом случае сходимость разностной задачи к решению дифференциальной задачи при больших N не имеет места.
- 3) Теоретически обоснована сходимость или расходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в указанных примерах.
- 4) Из таблиц 2 и 3 видно, что невязка $delta$ точного $axact$ и численного $resolve$ решений в уравнениях параболического типа с диффузионным членом u_{xx} (одномерный случай оператора Лапласа) при больших N , как уменьшается на всей области отрезка $[0, \pi]$, так и равномерно распределяется по всему отрезку. Это равномерное распределение невязки можно объяснить диффузией случайной величины машинной ошибки округления.
- 5) Получены формулы с аппроксимацией четвертым порядком для граничного оператора с однородным условием Неймана (формулы (16),(17)) и для неоднородного условия Неймана на границе (формула (15)). Данные формулы применимы для уравнений в частных производных эллиптического, параболического и гиперболического типов, а также при аппроксимации краевых задач.

Литература

- 1) Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2010.
- 2) Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. – М: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1995.
- 3) Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. Учебное пособие. – М.: Издательство ЛКИ, 2014 – 480 с.

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6 517.958

АППРОКСИМАЦИЯ ДВОЙНЫХ И ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ВО ВНУТРЕННИХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

канд. физ.-мат. наук Д.Ф.Пастухов, канд. физ.-мат. наук Ю.Ф.Пастухов,
канд. физ.-мат. наук Н.А.Гурьева

Аннотация: Получены формулы и алгоритмы для составных интегральных квадратур с равномерным шагом 7-го, 11-го, 15-го алгебраического порядка погрешности и с 8, 12, 16 порядком погрешности соответственно во внутренних задачах математической физики. Найдены аналоги формул для двойных на прямоугольнике и тройных в параллелепипеде интегралов с сохранением такого же порядка погрешности, что и в одномерном случае. Построены линейные отображения обобщённых координат с кольца (круга) на прямоугольник, с шарового слоя (шара) на параллелепипед. Найдены интегральные квадратуры в полярной и в сферической системах координат с сохранением алгебраического порядка точности, что проверено численно. Доказана лемма, указывающая минимальное число узлов достаточное для вычисления интеграла с двойной точностью. Приведены соответствующие алгоритмы.

Ключевые слова: алгебраический порядок точности, порядок погрешности, метод медианной фильтрации, шаровой слой, кольцо, аппроксимация интегралов.

THE APPROXIMATION DOUBLE AND TRIPLE INTEGRAL IN MATHEMATICAL PHYSICIST

Pastuhov D.F., Pastuhov YU.F., Gureva N.A.

The Abstract: are Received formulas and algorithms for component integral squarings with even at a walk 7-go, 11-go, 15-go algebraic order to inaccuracy and with 8, 12, 16 rather inaccuracy in internal problem mathematical physicists accordingly. Founded analogues molded for double on rectangle and triple in parallelepiped integral with conservation such order to inaccuracy, as in univariate event. The linear images of the generalised coordinates will Built with layer of circle (the circle) on rectangle, with ball layer (the ball) on box, as well as integral squarings in arctic coordinate system and in spherical coordinate system with conservation of the algebraic order to accuracy that is checked numerically. The Proved lemma, indicating minimum number of the nodes sufficient for calculation of the integral with double accuracy. They Are Brought corresponding to algorithms.

The Keywords: algebraic order to accuracy, order to inaccuracy, method of median to filtering, ball layer, ring, approximation integral.

Введение

В задачах математической физики обычно используют области: прямоугольник (параллелепипед), круг (шар). Например, во внутренней задаче Дирихле для уравнения Лапласа в круге, во внутренней задаче Дирихле для уравнения Лапласа в шаре [1,2]. В подобных задачах решение записывается в виде суммы ряда по собственным функциям выбранной области и уравнения в частных производных. Коэффициенты разложения ряда находят через двойные интегралы (в прямоугольнике, в круге, кольце) и тройные интегралы (в параллелепипеде, шаре, шаровом слое). В программе коэффициенты разложения вычисляют по циклу, и их число может достигать несколько тысяч. Что в свою очередь требует высокой точности расчёта двойных и тройных интегралов в задачах математической физики.

Как известно, среди интегральных квадратурных формул при заданном числе узлов аппроксимации на отрезке наибольший алгебраический порядок точности имеют квадратурные формулы Гаусса [3, стр.44]. Для поиска узлов нужно построить ортогональный на отрезке $[a, b]$ многочлен степени n с весовой функцией $p(x) > 0, x \in [a, b]$ (у многочлена все n корней расположены на отрезке $[a, b]$). Согласно теореме Галуа произвольные многочлены степени больше четвёртой имеют корни, для которых невозможно указать замкнутую формулу для решений, т.е. формулу, содержащую только арифметические операции и корни произвольной степени. По теореме Гаусса [3, стр.45] ортогональный многочлен степени n имеет квадратурную формулу Гаусса точную для всех многочленов степени не выше $2n - 1$ (алгебраический порядок точности). Таким образом, интегральная формула Гаусса с узлами и весовыми коэффициентами, записанными через радикалы или рациональные дроби, может быть точна для всех многочленов степени не выше $2n - 1 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$.

Следовательно, корни ортогональных многочленов, равные узлам квадратурной формулы Гаусса (с числом больше четырёх) необходимо искать с двойной точностью [6], например, с помощью формулы касательных Ньютона, что потребует не менее 250 итерации и более 1000 флопов [4]. В работе построены

интегральные квадратурные формулы с равномерным шагом, рациональными узлами и весовыми коэффициентами, т.е. с двойной точностью. Найденные квадратурные формулы имеют алгебраический порядок точности соответственно $n \in \{7, 11, 15\}$. Полученные интегральные квадратурные формулы в одномерном случае могут быть перенесены на двойные и тройные интегралы с сохранением алгебраического порядка точности. В работе построено линейное отображение обобщённых координат с прямоугольника (параллелепипеда) на круг, кольцо, (шар, сферический слой), а квадратурные интегральные формулы в указанных областях имеют тот же алгебраический порядок точности, что и на отрезке.

Немецкая группа математиков из университета города (Paderborn) создала пакет программ MuPad Pro 2.5.2, в котором интегралы вычисляются всего с 10 значащими цифрами, т.е. с точностью меньшей, чем достигнутая в данной работе.

1. Составная формула для отрезка, алгебраический порядок точности.

Аппроксимация определённого интеграла квадратурной формулой с непрерывной функции

$f(x)$, $x \in [a, b]$, имеет вид:

$$\int_a^b f(z) dz = \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) + r(f) \quad (1)$$

Где: $x_i, i = \overline{0, n}$ - узлы квадратурной формулы;

C_i - весовые коэффициенты; $r(f)$ - погрешность аппроксимации.

Из формулы (1) следует, что $r(f) = \int_a^b f(z) dz - \sum_{i=0}^n C_i f(x_i)$ является линейным оператором

относительно функции f как разность линейных операторов. Поэтому если формула(1) точна для всех степенных функций вида $x^j : r(x^j) = 0, j = \overline{0, m}$, то $r(P_m(x)) = 0$ для всех многочленов степени не выше m .

Определение 1. Пусть квадратурная формула(1) точна для всех степенных функций $x^k, k = \overline{0, m}$ включительно, т.е. $r(x^k) = 0, k = \overline{0, m}$, тогда говорят что алгебраический порядок точности интегральной квадратурной формулы(1) равен m .

Определение 2. Пусть алгебраический порядок точности квадратурной формулы(1) равен m , а погрешность $r(f)$ формулы (1) отлична от нуля степенной функции $x^l, l \geq m+1$, тогда говорят что порядок погрешности формулы(1) равен l . Другими словами, порядок погрешности формулы (1) - минимальная степень многочлена l такая, что $r(P_l(x)) \neq 0$.

Рассмотрим канонический отрезок $[-1, 1]$, на котором в силу симметрии узлы квадратурной формулы расположены симметрично относительно нуля, а весовые коэффициенты симметричных узлов имеют равные значения. Выберем чётное число интервалов разбиения $n_0 = 2l$ и нечётное число узлов $2n_0 + 1$ во всех квадратурных формулах (в данной работе отрезок $[-1, 1]$ разбивается на $n_0 \in \{6, 10, 14\}$ число равных частей).

Пользуясь формулой (1), определением 1 найдём условия на весовые коэффициенты C_k в квадратурной формуле с равномерным шагом на отрезке $[-1, 1]$ (с учётом сказанной симметрии):

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 dz = 2 = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{n_0/2} C_k \\ \int_{-1}^1 z^{2s} dz = 2/(2s+1) = 2 \sum_{k=1}^{n_0/2} C_k (2k/n_0)^{2s}, s = \overline{1, n_0/2} \end{cases} \quad (2)$$

Решение системы уравнений (2) подставим в квадратурную формулу (1), имеем:

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \approx C_0 f(0) + \sum_{k=1}^{n_0/2} C_k (f(-2k/n_0) + f(2k/n_0)), x_k = \pm 2k/n_0, k = \overline{0, n_0/2} \quad (3)$$

Сначала, разделим отрезок $[-1, 1]$ на 6 равных частей, т.е. используем 7 равноотстоящих узлов:

$$x_1 = -1, x_2 = -2/3, x_3 = -1/3, x_4 = 0, x_5 = 1/3, x_6 = 2/3, x_7 = 1, n_0 = 6$$

$$\begin{array}{ccccccc}
-1 & -2/3 & -1/3 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\
C_3 & C_2 & C_1 & C_0 & C_1 & C_2 & C_3
\end{array}$$

Согласно симметрии и квадратурной формуле (3) ($n_0 = 6$) получим:

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \approx C_0 f(0) + C_1 (f(-1/3) + f(1/3)) + C_2 (f(-2/3) + f(2/3)) + C_3 (f(-1) + f(1))$$

Подставляя в (2) степенные функции, начиная с нулевой степени, используя только чётные степени (для нечётных степеней имеем тривиальные тождества $0 = 0$), запишем систему уравнений:

$$f(z) \equiv 1: \int_{-1}^1 f(z) dz = \int_{-1}^1 dz = 2 = C_0 + 2C_1 + 2C_2 + 2C_3$$

$$f(z) = z^2: \int_{-1}^1 f(z) dz = \int_{-1}^1 z^2 dz = \frac{2}{3} = \frac{2}{9} C_1 + \frac{8}{9} C_2 + 2C_3 \Leftrightarrow 3 = C_1 + 4C_2 + 9C_3$$

$$f(z) = z^4: \int_{-1}^1 f(z) dz = \int_{-1}^1 z^4 dz = \frac{2}{5} = \frac{2}{81} C_1 + \frac{32}{81} C_2 + 2C_3 \Leftrightarrow 81 = 5C_1 + 80C_2 + 405C_3$$

$$f(z) = z^6: \int_{-1}^1 f(z) dz = \int_{-1}^1 z^6 dz = \frac{2}{7} = \frac{2}{729} C_1 + \frac{128}{729} C_2 + 2C_3 \Leftrightarrow 729 = 7C_1 + 448C_2 + 5103C_3$$

То есть необходимо решить неоднородную систему 4 линейных уравнений с 4 неизвестными.

$$\begin{cases}
C_0 + 2C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 2 \\
C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 3 \\
5C_1 + 80C_2 + 405C_3 = 81 \\
7C_1 + 448C_2 + 5103C_3 = 729
\end{cases} \Leftrightarrow C_0 = \frac{68}{105}, C_1 = \frac{9}{140}, C_2 = \frac{18}{35}, C_3 = \frac{41}{420} \quad (4)$$

Из формул (3) ($n_0 = 6$) и (4) получим формулу (5):

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \approx S_f = \frac{68}{105} f(0) + \frac{9}{140} (f(-1/3) + f(1/3)) + \frac{18}{35} (f(-2/3) + f(2/3)) + \frac{41}{420} (f(-1) + f(1)) \quad (5)$$

Проверкой убеждаемся, что коэффициенты C_0, C_1, C_2, C_3 являются решением системы уравнений (4), т.е. по определению 1 у квадратурной формулы (5) алгебраический порядок точности равен

семи (так как с учётом (4) и $\int_{-1}^1 z^7 dz = 0 = \sum_{k=-3}^3 C_k (2k/6)^7 = 0$), следовательно, по определению 2 порядок

погрешности для формулы (5) равен 8. В частности, если $f(z) \equiv 1$:

$$\int_{-1}^1 f(z) dz = 2 = \frac{68}{105} + 2 \left(\frac{9}{140} + \frac{18}{35} + \frac{41}{420} \right), \text{ то интеграл равен длине отрезка } [-1, 1]. \text{ Учитывая шаг}$$

$h = 1/3$, перепишем формулу (5) в виде $\int_{-1}^1 f(z) dz \approx 3h \sum_{i=0}^6 C_i f(x_i)$, в общем случае:

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \approx \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0} C_i f(x_i), \quad \frac{hn_0}{2} = 1, x_i = -1 + ih, i = \overline{0, n_0} \quad (6)$$

Рассмотрим составную квадратурную формулу для вычисления определённого интеграла, т.е. формула (6) используется k раз на отрезке $[a, b], b - a = kn_0 h$. Шаблон весовых коэффициентов для составной формулы получим из (4) (коэффициенты в смежных узлах удваиваются), например:

$$\left\{ \frac{41}{420}, \frac{18}{35}, \frac{9}{140}, \frac{68}{105}, \frac{9}{140}, \frac{18}{35}, \frac{41}{210}, \frac{18}{35}, \frac{9}{140}, \frac{68}{105}, \frac{9}{140}, \frac{18}{35}, \frac{41}{420} \right\} (n = 12, k = 2, n_0 = 6)$$

А определённый интеграл на отрезке $[a, b]$ отличается от (6) длиной интервала в $k = n/n_0$ раз.

$$\int_a^b f(z)dz \approx \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0*k} C_i f(x_i), \sum_{i=0}^{n_0} C_i = 2, h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + ih, i = \overline{0, n} \quad (7)$$

Для функции $f(z) \equiv 1, \int_a^b f(z)dz = \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0*k} C_i = \frac{hn_0}{2} 2k = hkn_0 = b-a$. Т.е. составная формула (7)

является общей, в частности, коэффициенты C_i для случая ($n_0 = 6$) определяются алгоритмом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } j = 0 \text{ или } j = n : C_j = \frac{41}{420}; \\ \text{если } j \equiv 1 \pmod{6} \text{ или } j \equiv 5 \pmod{6} : C_j = \frac{18}{35}; \\ \text{если } j \equiv 2 \pmod{6} \text{ или } j \equiv 4 \pmod{6} : C_j = \frac{9}{140}; \\ \text{если } j \equiv 3 \pmod{6} : C_j = \frac{68}{105}; \\ \text{если } j \equiv 0 \pmod{6}, j > 0, j < n : C_j = \frac{41}{210}; \end{array} \right. \quad (8)$$

Аналогично формуле (5) можно разбить канонический отрезок $[-1, 1]$ $n_0 = 10$ равных частей (из соображений удобства разбиения), используя симметрию весовых коэффициентов, и получить решение системы уравнений (2) ($n_0 = 10$), в которой 6 неизвестных коэффициентов $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ являются решением неоднородной системы $n_0/2 + 1 = 6$ линейных уравнений с 11 алгебраическим порядком точности:

$$\left\{ C_0 = \frac{17807}{12474}, C_1 = -\frac{4825}{5544}, C_2 = \frac{5675}{6237}, C_3 = -\frac{16175}{99792}, C_4 = \frac{26575}{74844}, C_5 = \frac{16067}{299376} \right. \quad (9)$$

Проверим на компьютере, что рациональный вид коэффициентов (9) (символьное решение системы (2) для $n_0 = 10$) удовлетворяет (2) с двойной точностью (16 значащих цифр). В таблице 1 в левой части

указано точное значение интеграла $a(s) = \int_{-1}^1 z^s dz, s = \overline{0, 12}$, а справа численное значение правой части

уравнений системы (2) - $b(s)$ с использованием значений весовых коэффициентов (8) (s - показатель степенной функции).

Таблица 1

a(0)=2.0000000000000000	b(0)=2.0000000000000004
a(1)=0.0000000000000000	b(1)=0.0000000000000000
a(2)=0.6666666666666666	b(2)=0.6666666666666669
a(3)=0.0000000000000000	b(3)=-0.0000000000000000
a(4)=0.4000000000000000	b(4)=0.4000000000000001
a(5)=0.0000000000000000	b(5)=-0.0000000000000000
a(6)=0.2857142857142857	b(6)=0.2857142857142858
a(7)=0.0000000000000000	b(7)=0.0000000000000000
a(8)=0.2222222222222222	b(8)=0.2222222222222223
a(9)=0.0000000000000000	b(9)=-0.0000000000000000
a(10)=0.1818181818181818	b(10)=0.1818181818181819
a(11)=0.0000000000000000	b(11)=-0.0000000000000000
a(12)=0.1538461538461539	b(12)=0.1554621683809524

Из таблицы 1 видно, что алгебраический порядок точности системы уравнений (2) при $n_0 = 10$

равен 11, а порядок погрешности квадратурной формулы $\int_{-1}^1 f(z)dz \approx 5h \sum_{i=0}^{10} C_i f(x_i)$, где

$$5h = 1, \sum_{i=0}^{10} C_i = 2, x_i = -1 + ih, i = \overline{0, 10} \text{ равен } 12 (C_i \text{ определяются с помощью (9)).}$$

Из выражения (7) для $n_0 = 10$ получим составную формулу:

$$\int_a^b f(z)dz \approx 5h \sum_{i=0}^n C_i f(x_i), h = \frac{(b-a)}{n}, x_i = a + ih, n = 10k, \left(\sum_{i=0}^{10} C_i = 2 \right) \quad (10)$$

в которой весовые коэффициенты C_i определяются алгоритмом (11):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } j = 0 \text{ или } j = n : C_j = \frac{16067}{299376}; \\ \text{если } j \equiv 1 \pmod{10} \text{ или } j \equiv 9 \pmod{10} : C_j = \frac{26575}{74844}; \\ \text{если } j \equiv 2 \pmod{10} \text{ или } j \equiv 8 \pmod{10} : C_j = -\frac{16175}{99792}; \\ \text{если } j \equiv 3 \pmod{10} \text{ или } j \equiv 7 \pmod{10} : C_j = \frac{5675}{6237}; \\ \text{если } j \equiv 4 \pmod{10} \text{ или } j \equiv 6 \pmod{10} : C_j = -\frac{4825}{5544}; \\ \text{если } j \equiv 5 \pmod{10} : C_j = \frac{17807}{12474}; \\ \text{если } j \equiv 0 \pmod{10}, j > 0, j < n : C_j = \frac{16067}{149688}; \end{array} \right. \quad (11)$$

Решение системы уравнений (2) ($n_0 = 14$), с делением отрезка $[-1, 1]$ на 14 равных частей есть:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = \frac{101741867}{13030875}; C_1 = -\frac{5600756791}{833976000}; C_2 = \frac{789382601}{156370500}; C_3 = -\frac{6625093363}{2501928000}; \\ C_4 = \frac{109420087}{78185250}; C_5 = -\frac{770720657}{2501928000}; C_6 = \frac{44436679}{156370500}; C_7 = \frac{90241897}{2501928000}. \end{array} \right. \quad (12)$$

Численно проверим, что весовые коэффициенты (12),- символьное решение системы (2) (для $n_0 = 14$), удовлетворяет(2) с двойной точностью (16 значащих цифр). Значения занесём в таблицу 2.

Таблица 2

a(0)=2.0000000000000000	b(0)=2.0000000000000009
a(1)=0.0000000000000000	b(1)=0.0000000000000001
a(2)=0.6666666666666666	b(2)=0.6666666666666665
a(3)=0.0000000000000000	b(3)=0.0000000000000000
a(4)=0.4000000000000000	b(4)=0.4000000000000000
a(5)=0.0000000000000000	b(5)=0.0000000000000000
a(6)=0.2857142857142857	b(6)=0.2857142857142856
a(7)=0.0000000000000000	b(7)=0.0000000000000000
a(8)=0.2222222222222222	b(8)=0.2222222222222221
a(9)=0.0000000000000000	b(9)=0.0000000000000000
a(10)=0.1818181818181818	b(10)=0.1818181818181817
a(11)=0.0000000000000000	b(11)=0.0000000000000000
a(12)=0.1538461538461539	b(12)=0.1538461538461538
a(13)=0.0000000000000000	b(13)=0.0000000000000000
a(14)=0.1333333333333333	a(14)=0.1333333333333333
a(15)=0.0000000000000000	b(15)=0.0000000000000000
a(16)=0.1176470588235294	b(16)=0.1179107308149041

Из таблицы 2 видно, что формула

$$\int_{-1}^1 f(z)dz \approx 7h \sum_{i=0}^{14} C_i f(x_i), 7h = 1, \sum_{i=0}^{14} C_i = 2, x_i = -1 + ih, i = \overline{0, 14}$$

имеет 15 алгебраический порядок точности и 16 порядок погрешности. Используя формулу (7) ($n_0 = 14$), получим составную формулу с делением отрезка $[a, b]$ на число частей кратное 14:

$$\int_a^b f(z)dz = 7h \sum_{i=0}^n C_i f(x_i), h = \frac{(b-a)}{n}, x_i = a + ih, n = 14k, \left(\sum_{i=0}^{14} C_i = 2 \right) \quad (13)$$

Весовые коэффициенты C_i определяются алгоритмом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } j = 0 \text{ или } j = n : C_j = \frac{90241897}{2501928000}; \\ \text{если } j \equiv 1 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 13 \pmod{14} : C_j = \frac{44436679}{156370500}; \\ \text{если } j \equiv 2 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 12 \pmod{14} : C_j = -\frac{770720657}{2501928000}; \\ \text{если } j \equiv 3 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 11 \pmod{14} : C_j = \frac{109420087}{78185250}; \\ \text{если } j \equiv 4 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 10 \pmod{14} : C_j = -\frac{6625093363}{2501928000}; \\ \text{если } j \equiv 5 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 9 \pmod{14} : C_j = \frac{789382601}{156370500}; \\ \text{если } j \equiv 6 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 8 \pmod{14} : C_j = -\frac{5600756791}{833976000}; \\ \text{если } j \equiv 7 \pmod{14} : C_j = \frac{101741867}{13030875}; \\ \text{если } j \equiv 0 \pmod{14}, j > 0, j < n : C_j = \frac{90241897}{1250964000}; \end{array} \right. \quad (14)$$

Докажем следующее утверждение:

Лемма. Пусть дана функция $f(x) \in C^{(n_0+2)}[a, b]$ и составная квадратурная формула (1) с равномерным шагом точна для всех многочленов степени равной $n_0 \in \{6, 10, 14\}$. То есть выполнено условие (формула (7)):

$$\int_{-H}^H z^t dz = \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i z_i^t, t = \overline{0, n_0}, \text{ где: } c - \text{середина отрезка } [a, b] \quad (15)$$

$$c = (a+b)/2, x = z + c, dx = dz, h = (b-a)/n, H = (b-a)/2, x \in [a, b], z \in [-H, H]$$

$$x_i = c + z_i, x_i = a + i(b-a)/n = a + ih, i = \overline{0, n}$$

Тогда порядок погрешности $r(f)$ составной формулы равен $n_0 + 2$, другими словами, алгебраический порядок точности равен $n_0 + 1 \in \{7, 11, 15\}$.

Доказательство. Разложим функцию $f(x) \in C^{(n_0+2)}[a, b]$, в ряд Тейлора с центром в точке $x = c$:

$$f(c+z) = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} z^k + \frac{f^{(n_0+1)}(c)}{(n_0+1)!} z^{n_0+1} + \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!} z^{n_0+2} + O(z^{n_0+3}), |z| \leq H.$$

$$\text{Покажем, что из условия (15) следует } \int_a^b x^t dx = \left(\frac{hn_0}{2}\right) \sum_{i=0}^n C_i x_i^t = \left(\frac{hn_0}{2}\right) \sum_{i=0}^n C_i x_i^t, t = \overline{0, n_0}, t \in N.$$

$$\int_a^b x^t dx - \left(\frac{hn_0}{2}\right) \sum_{i=0}^n C_i x_i^t = \int_{-H}^H (z+c)^t dz - \left(\frac{hn_0}{2}\right) \sum_{i=0}^n C_i (c+z_i)^t = \sum_{s=0}^t C_i^s c^{t-s} \left(\int_{-H}^H z^s dz - \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i z_i^s \right) = 0, \forall t = \overline{0, n_0}, \forall s = \overline{0, t}$$

$$\text{т.е. из (15) следует } \int_a^b x^t dx = \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i x_i^t, t = \overline{0, n_0} \text{ (параллельный перенос системы координат не}$$

изменяет алгебраического порядка точности квадратурной формулы). $C_i^s = t!/s!(t-s)!$ -биномиальный коэффициент.

$$\begin{aligned}
|r(f)| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) \right| = \left| \int_{-H}^H \left(\sum_{t=0}^{n_0} \frac{f^{(t)}(c)}{t!} z^t + \frac{f^{(n_0+1)}(c)}{(n_0+1)!} z^{n_0+1} + \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!} z^{n_0+2} + O(H^{n_0+4}) \right) dz - \right. \\
&- \left. \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i \left(\sum_{t=0}^{n_0} \frac{f^{(t)}(c)}{t!} z_i^t + \frac{f^{(n_0+1)}(c)}{(n_0+1)!} z_i^{n_0+1} + \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!} z_i^{n_0+2} + O(H^{n_0+4}) \right) \right| = \left| \sum_{t=0}^{n_0} \frac{f^{(t)}(c)}{t!} \left(\int_{-H}^H z^t dz - \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i z_i^t \right) + \right. \\
&\left. \sum_{t=n_0+1}^{n_0+2} \frac{f^{(t)}(c)}{t!} \left(\int_{-H}^H z^t dz - \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i z_i^t + O(H^{n_0+4}) \right) \right| = \left| \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!} \left| \frac{2H^{n_0+3}}{n_0+3} - \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i z_i^{n_0+2} + O(H^{n_0+4}) \right| \right| \\
|r(f)| &\leq \left| \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!} \right| H^{n_0+3} \left| \frac{2}{n_0+3} - \frac{hn_0}{2H} \sum_{i=0}^n C_i \left(\frac{z_i}{H} \right)^{n_0+2} + O(H) \right|, \left| \frac{z_i}{H} \right| \leq 1 \quad (16)
\end{aligned}$$

В формуле (16) учтены равенства справедливые в силу соотношений:

$$\begin{aligned}
\int_{-H}^H z^{n_0+1} dz &= 0, \sum_{i=0}^n C_i z_i^{n_0+1} = 0, \text{ так как } C_{n/2-j} = C_{n/2+j}, z_{n/2-j} = -z_{n/2+j}, z_{n/2} = 0, j = \overline{-n/2, n/2} \\
z_i &= \left(\frac{i-n/2}{n/2} \right) H = \frac{2j}{n} H, i = \overline{0, n}, j = \overline{-n/2, n/2}, i = \overline{0, n}, |z_i| \leq H.
\end{aligned}$$

В формуле (16) последний множитель представляет собой многочлен степени $n_0 + 2$, которая определяет порядок погрешности $|r(f)|$ составной формулы согласно определению 2, другими словами, алгебраический порядок точности равен $n_0 + 1 = 7, 11, 15$ по определению 1.

Лемма доказана.

Формулу (16) можно проанализировать и упростить

$$|r(f)| \leq \left| \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!} \right| H^{n_0+3} \left| \frac{2}{n_0+3} - \frac{hn_0}{2H} \sum_{i=0}^n C_i \left(\frac{z_i}{H} \right)^{n_0+2} + O(H^{n_0+4}) \right|$$

Выражение $\frac{2}{n_0+3} \approx \sum_{i=0}^{n_0} C_i \left(\frac{z_i}{H} \right)^{n_0+2}$ ($k=1$) справедливо с точностью до 3 знаков (как видно из таблицы 2 в случае $s=16$ $a(16)$ и $b(16)$ отличаются в четвёртой значащей цифре, а из таблицы 1 в случае $s=12$ $a(12)$ и $b(12)$ отличаются в третьей значащей цифре). Поэтому для (16) справедливо:

$$|r(f)| \leq \left| \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!} \right| H^{n_0+3} \left| \frac{2}{n_0+3} + O(H) \right| = \frac{2 |f^{(n_0+2)}(c)|}{(n_0+3)!} H^{n_0+3} + O(H^{n_0+4})$$

С другой стороны, суммирование на $n = kn_0$ узлах эквивалентно взятию k интегралов на интервалах длиной $b_j - a_j = \frac{b-a}{k}, j = \overline{1, k}$. Обозначим среднее значение производной

$$\overline{|f^{(n_0+2)}|} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f^{(n_0+2)} \left(\frac{a_j + b_j}{2} \right) \approx \left(\frac{1}{b-a} \right) \int_a^b f^{(n_0+2)}(x) dx. \quad \text{Тогда имеет место оценка}$$

$$|r(f)|^{[a,b]} \leq k |r(f)|^{[a_j, b_j]} \leq \frac{k}{(n_0+2)!} \overline{|f^{(n_0+2)}(x)|} \frac{2}{(n_0+3)} \left(\frac{b-a}{2k} \right)^{n_0+3} = \frac{2H^{n_0+3}}{k^{n_0+2} (n_0+3)!} \overline{|f^{(n_0+2)}(x)|} \quad (17)$$

Нас будет интересовать порядок погрешности составной квадратурной формулы и двойная точность относительной погрешности результата интегрирования (16 значащих цифр).

Вычислим определённый интеграл (ответ с 16 значащими цифрами):

$$\int_0^2 \exp(2x) dx = (\exp(4) - 1) / 2 = 26.79907501657212,$$

При $N = 28, k = 2$ написанная нами программа с использованием формул (13),(14) возвращает значения ($\epsilon \equiv (\text{int } 1 - \text{exact}) / \text{exact}$):

$\text{int } 1 = 26.79907501657214$, $\text{exact} = 26.79907501657212$, $\text{delta} = -0.000000000000002 = -2 \cdot 10^{-14}$
 $\epsilon = -0.0000000000000008$.

Снова оценим погрешность составной интегральной квадратуры по формуле (17)

для интеграла $\int_0^2 \exp(2x) dx = (\exp(4) - 1) / 2 = 26.79907501657212$:

$$\overline{|f^{(n_0+2)}|} = \left(\frac{1}{b-a} \right) \int_a^b f^{(n_0+2)}(x) dx = \left(\frac{1}{2-0} \right) \int_0^2 (\exp(2x)) 2^{(16)} dx = \frac{(\exp(4) - 1) 2^{16}}{4},$$

$$|r(f)| \leq \frac{1}{k^{n_0+2}} \frac{2H^{n_0+3}}{(n_0+3)!} \overline{|f^{(n_0+2)}(x)|} = \frac{2^{17}}{2^{16} 17!} \frac{(\exp(4) - 1)}{4} = 7.5 \cdot 10^{-14}$$

Видно, что $|r(f)|$ хорошо приближает численное значение $|\text{delta}|$ с избытком. Достигнув двойной точности с помощью (17), мы получим и двойную точность численное значение. В программе получена двойная точность, т.к. $|\epsilon| = 8 \cdot 10^{-16}$.

2. Построение двумерных и трёхмерных алгоритмов

Для построения двумерных и трёхмерных квадратурных интегральных формул рассмотрим сначала случай функций с разделяющимися переменными.

1) Пусть $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, воспользуемся дважды составной формулой (7) для определённого интеграла функции одной переменной:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y), \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \approx \frac{h_1 n_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0-k} C_i f_1(x_i) \frac{h_2 n_0}{2} \sum_{j=0}^{n_0-k} C_j f_2(y_j) =$$

$$\frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i=0}^{n_0-k} \sum_{j=0}^{n_0-k} C_i C_j f_1(x_i) f_2(y_j) = \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i,j=0}^{n_0-k} C_{i,j} f(x_i, y_j) \quad (18)$$

$$C_{i,j} = C_i C_j, f(x_i, y_j) = f_1(x_i) f_2(y_j), x_i = a + i h_1, y_j = c + j h_2, h_1 = \frac{b-a}{n}, h_2 = \frac{d-c}{n}, i, j = \overline{0, n}$$

2) Пусть $(x, y, z) \in [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, воспользуемся трижды составной формулой (7) для определённого интеграла функции одной переменной:

$$f(x, y, z) = f_1(x) f_2(y) f_3(z), \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_e^f f_3(z) dz =$$

$$= \frac{h_1 n_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0-k} C_i f_1(x_i) \frac{h_2 n_0}{2} \sum_{j=0}^{n_0-k} C_j f_2(y_j) \frac{h_3 n_0}{2} \sum_{s=0}^{n_0-k} C_s f_3(z_s) = \frac{h_1 h_2 h_3 n_0^3}{8} \sum_{i=0}^{n_0-k} \sum_{j=0}^{n_0-k} \sum_{s=0}^{n_0-k} C_i C_j C_s f_1(x_i) f_2(y_j) f_3(z_s) =$$

$$\frac{h_1 h_2 h_3 n_0^3}{8} \sum_{i,j,s=0}^{n_0-k} C_{i,j,s} f(x_i, y_j, z_s)$$

(19)

$$C_{i,j,s} = C_i C_j C_s, f(x_i, y_j, z_s) = f_1(x_i) f_2(y_j) f_3(z_s), x_i = a + i h_1, y_j = c + j h_2, z_s = e + s h_3$$

$$h_1 = \frac{b-a}{n}, h_2 = \frac{d-c}{n}, h_3 = \frac{d-c}{n}, i, j, s = \overline{0, n}$$

Формулы (20),(21),(22) получим подстановкой в (18) $n_0 = 6, 10, 14$ соответственно

$$1) I_2 = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx 9 h_1 h_2 \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n C_{i,j} f(x_i, y_j), h_1 = \frac{(b-a)}{n}, h_2 = \frac{(d-c)}{n}, \quad (20)$$

$$C_{i,j} = C_i C_j; x_i = a + h_1 \cdot i, y_j = c + h_2 \cdot j; i, j = \overline{0, n}$$

Где: C_i, C_j - весовые коэффициенты определяются формулой (8)

$$2) \quad I_2 = \iint_{a \ c}^{b \ d} f(x, y) dx dy \approx 25 h_1 h_2 \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n C_{i,j} f(x_i y_j), h_1 = \frac{(b-a)}{n}, h_2 = \frac{(d-c)}{n}, \quad (21)$$

$$C_{i,j} = C_i C_j; x_i = a + h_1 \cdot i, y_j = c + h_2 \cdot j; i, j = \overline{0, n}$$

Где: C_i, C_j - весовые коэффициенты определяются формулой (11)

$$3) \quad I_2 = \iint_{a \ c}^{b \ d} f(x, y) dx dy \approx 49 h_1 h_2 \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n C_{i,j} f(x_i y_j), h_1 = \frac{(b-a)}{n}, h_2 = \frac{(d-c)}{n}, \quad (22)$$

$$C_{i,j} = C_i C_j; x_i = a + h_1 \cdot i, y_j = c + h_2 \cdot j; i, j = \overline{0, n}$$

Где: C_i, C_j - весовые коэффициенты определяются формулой (14)

Формулы (23)-(25) получим подстановкой в (19) $n_0 = 6, 10, 14$ соответственно

$$4) \quad I_3 = \iiint_{a \ c \ e}^{b \ d \ f} f(x, y, z) dx dy dz \approx 27 h_1 h_2 h_3 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n C_{i,j,k} f(x_i y_j z_k), h_1 = \frac{(b-a)}{n}, h_2 = \frac{(d-c)}{n}, h_3 = \frac{(f-e)}{n} \quad (23)$$

$$C_{i,j,k} = C_i C_j C_k; x_i = a + h_1 \cdot i, y_j = c + h_2 \cdot j, z_k = e + h_3 \cdot k; i, j, k = \overline{0, n}$$

Где: C_i, C_j, C_k - весовые коэффициенты определяются формулой (8)

$$5) \quad I_3 = \iiint_{a \ c \ e}^{b \ d \ f} f(x, y, z) dx dy dz \approx 125 h_1 h_2 h_3 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n C_{i,j,k} f(x_i y_j z_k), h_1 = \frac{(b-a)}{n}, h_2 = \frac{(d-c)}{n}, h_3 = \frac{(f-e)}{n} \quad (24)$$

$$C_{i,j,k} = C_i C_j C_k; x_i = a + h_1 \cdot i, y_j = c + h_2 \cdot j, z_k = e + h_3 \cdot k; i, j, k = \overline{0, n}$$

Где: C_i, C_j, C_k - весовые коэффициенты определяются формулой (11)

$$6) \quad I_3 = \iiint_{a \ c \ e}^{b \ d \ f} f(x, y, z) dx dy dz \approx 343 h_1 h_2 h_3 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n C_{i,j,k} f(x_i y_j z_k), h_1 = \frac{(b-a)}{n}, h_2 = \frac{(d-c)}{n}, h_3 = \frac{(f-e)}{n} \quad (25)$$

$$C_{i,j,k} = C_i C_j C_k; x_i = a + h_1 \cdot i, y_j = c + h_2 \cdot j, z_k = e + h_3 \cdot k; i, j, k = \overline{0, n}$$

Где: C_i, C_j, C_k - весовые коэффициенты определяются формулой (14)

Теорема 1: Формульные пары (20)-(8);(21)-(11);(22)-(14);(23)-(8);(24)-(11);(25)-(14) справедливы для любой функции $f(x, y) \in C^{n_0+2}([-1,1] \times [-1,1])$ ($f(x, y, z) \in C^{n_0+2}([-1,1] \times [-1,1]) \times [-1,1]$) необязательно с разделяющимися переменными. Порядок погрешности двумерной (трёхмерной) интегральной (квадратурной) формулы совпадает с порядком погрешности одномерной квадратурной формулы (равен 7, 11, 15 соответственно для алгоритмов (8), (11), (14)).

Доказательство: проведём в два этапа:

Утверждение 1. Для двойного интеграла на каноническом квадрате $(x, y) \in [-1,1] \times [-1,1]$ и тройного интеграла на каноническом кубе $(x, y, z) \in [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ равноудалённые от центра точки имеют равные весовые коэффициенты.

Не теряя общности, доказательство рассмотрим для двумерного случая, выберем каноническую область квадрат $(x, y) \in [-1,1] \times [-1,1]$ со стороной 2.

1.1) Сделаем линейную замену переменных в интеграле $x|_{-1}^1 = y|_{-1}^1, y|_{-1}^1 = x|_{-1}^1; dx' = dy; dy' = dx$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(y', x') dy' dx' = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(y', x') dx' dy' \approx \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} f(x_i, y_j) = \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{j,i} f(y_j, x_i)$$

Последняя формула означает инвариантность интеграла от произвольной функции при зеркальном отражении канонического квадрата относительно прямой $y = x$. Что в свою очередь для $f(x_i, y_j) \equiv 1$ приводит к симметрии (равенству) весовых коэффициентов $C_{j,i} = C_{i,j}, i, j = \overline{0, n_0}$

1.2) Рассмотрим инверсию канонического квадрата относительно центра (поворот на 180°)

$$x'|_{-1}^1 = -x|_1^{-1}, y'|_{-1}^1 = -y|_1^{-1}; dx' = -dx; dy' = -dy$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(-x', -y') d(-x') d(-y') = \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} f(-x', -y') dx' dy' = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(-x', -y') dx' dy' \approx \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} f(x_i, y_j) = \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{n_0-i, n_0-j} f(x_{n_0-i}, y_{n_0-j}) \end{aligned}$$

Равенство интегралов означает инвариантность интеграла при повороте канонического квадрата на 180^0 (преобразование инверсии), а в случае $f(x_i, y_j) \equiv 1$ для интегральных сумм $C_{i,j} = C_{n_0-i, n_0-j}, i, j = \overline{0, n_0}$.

1.3) Рассмотрим поворот канонического квадрата на 90^0 .

$$x'|_{-1}^1 = y|_1^{-1}, y'|_{-1}^1 = -x|_1^{-1}; dx' = dy; dy' = -dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(-y', x') d(-y') dx' = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(-y', x') dy' dx' = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(-y', x') dy' dx' = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(-y', x') d(x') dy' \approx \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} f(x_i, y_j) = \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{n_0-j, i} f(y_{n_0-j}, x_i) \end{aligned}$$

Равенство интегралов означает инвариантность интеграла при повороте канонического квадрата на 90^0 , а в случае $f(x_i, y_j) \equiv 1$ для интегральных сумм $C_{i,j} = C_{n_0-j, i}, i, j = \overline{0, n_0}$.

На целочисленной решётке с координатами (x_i, y_j) квадрат с фиксированным расстоянием до центра есть $x_i^2 + y_j^2 = const$, поэтому решением этого же уравнения будут пары чисел: $(x_i, y_j), (-x_i, y_j), (x_i, -y_j), (-x_i, -y_j), (y_j, x_i), (y_j, -x_i), (-y_j, x_i), (-y_j, -x_i)$.

Последние 4 пары отличаются от первых четырёх преобразованием симметрии **1.1**. Первая и четвертая пары, а также вторая и третья пары отличаются друг от друга преобразованием инверсии **1.2**. Наконец, первая и шестая пары совмещаются поворотом относительно центра на 90^0 (преобразование 1.3). Следовательно, в силу **1.1-1.3** весовые коэффициенты на всех восьми (или четырёх) указанных точках имеют равные значения.

Доказанное **утверждение 1** справедливо независимо от вида алгоритма построения весовых коэффициентов (8), (11), (14).

Утверждение 2. Квадратурные интегральные формулы (18) для двойного интеграла и (19) для тройного интеграла справедливы для произвольной непрерывной функции (не обязательно с разделяющимися переменными). Порядок погрешности в двойной интегральной квадратурной формуле (18) и в тройной (19) тот же, что и в одномерной квадратурной формуле (7).

Доказательство для определённости проведём для двойного интеграла в простейшем случае $n_0 = 6$.

На квадрате $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ с равномерной сеткой для случая $n_0 = 6$ имеем $(n_0 + 1)^2 = 49$ узлов (соответственно 49 весовых коэффициентов $C_{i,j}, i, j = \overline{0, n_0}$). Квадратурная формула для двойного интеграла (аналог (6)) имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy &= \overline{C_0} f(0, 0) + \overline{C_1} \left(f\left(-\frac{1}{3}, 0\right) + f\left(\frac{1}{3}, 0\right) + f\left(0, -\frac{1}{3}\right) + f\left(0, \frac{1}{3}\right) \right) + \overline{C_2} \left(f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \right. \\ & f\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \left. \right) + \overline{C_3} \left(f\left(-\frac{2}{3}, 0\right) + f\left(\frac{2}{3}, 0\right) + f\left(0, -\frac{2}{3}\right) + f\left(0, \frac{2}{3}\right) \right) + \overline{C_4} \left(f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + \right. \\ & \left. + f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right) + \overline{C_5} \left(f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \overline{C}_6(f(0,1) + f(0,-1) + f(-1,0) + f(1,0)) + \overline{C}_7\left(f\left(\frac{1}{3}, 1\right) + f\left(1, \frac{1}{3}\right) + f\left(1, -\frac{1}{3}\right) + \right. \\
& f\left(\frac{1}{3}, -1\right) + f\left(-\frac{1}{3}, -1\right) + f\left(-1, -\frac{1}{3}\right) + f\left(-1, \frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}, 1\right)\left. + \overline{C}_8\left(f\left(\frac{2}{3}, 1\right) + f\left(1, \frac{2}{3}\right) + f\left(1, -\frac{2}{3}\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + f\left(\frac{2}{3}, -1\right) + f\left(-1, -\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{2}{3}, -1\right) + f\left(-\frac{2}{3}, 1\right) + f\left(-1, \frac{2}{3}\right)\right) + \overline{C}_9(f(1,1) + f(1,-1) + f(-1,-1) + f(-1,1)) \quad (26)
\end{aligned}$$

В формуле(26) согласно **утверждению 1** сгруппированы с одинаковым весом все узлы, равно - удалённые от центра канонического квадрата $(x, y) \in [-1,1] \times [-1,1]$ как видно из формулы (26), число таких узлов 4 либо 8, за исключением центра.

Аналогично одномерной интерполяционной задаче (2) можно поставить двумерную на каноническом квадрате и трёхмерную на каноническом кубе задачи интерполяции:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy = \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} = 4 \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^{2s} y^{2l} dx dy = \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} x_i^{2s} y_j^{2l}, 2s + 2l \in \overline{0, n_0} \end{cases} \quad (27)$$

В формуле (27) $f(x, y) \in C^{n_0+2}([-1,1] \times [-1,1])$ используется множество линейно независимых степенных функций двух переменных $\{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^{n_0}, x^{n_0-1}y, \dots, xy^{n_0-1}, y^{n_0}\}$. Здесь n_0 - алгебраический порядок точности квадратурной формулы (27). Из-за симметрии, как и в задаче (2) нетривиальные условия на коэффициенты получим при условии, что степени x, y чётные, учитывая формулу (26):

1) $f(x, y) \equiv 1$:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy = 4 = \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} = \overline{C}_0 + 4\overline{C}_1 + 4\overline{C}_2 + 4\overline{C}_3 + 8\overline{C}_4 + 4\overline{C}_5 + 4\overline{C}_6 + 8\overline{C}_7 + 8\overline{C}_8 + 4\overline{C}_9$$

2) $f(x, y) = x^2$ (для $f(x, y) = x^2$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 dx dy = \frac{4}{3} = \frac{2}{9}\overline{C}_1 + \frac{4}{9}\overline{C}_2 + \frac{8}{9}\overline{C}_3 + \frac{20}{9}\overline{C}_4 + \frac{16}{9}\overline{C}_5 + 2\overline{C}_6 + \frac{40}{9}\overline{C}_7 + \frac{52}{9}\overline{C}_8 + 4\overline{C}_9$$

3) $f(x, y) = x^4$ (для $f(x, y) = y^4$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^4 dx dy = \frac{4}{5} = \frac{2}{81}\overline{C}_1 + \frac{4}{81}\overline{C}_2 + \frac{32}{81}\overline{C}_3 + \frac{68}{81}\overline{C}_4 + \frac{64}{81}\overline{C}_5 + 2\overline{C}_6 + \frac{328}{81}\overline{C}_7 + \frac{388}{81}\overline{C}_8 + 4\overline{C}_9$$

4) $f(x, y) = x^2 y^2$:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 dx dy = \frac{4}{9} = \frac{4}{81}\overline{C}_2 + \frac{32}{81}\overline{C}_4 + \frac{64}{81}\overline{C}_5 + \frac{8}{9}\overline{C}_7 + \frac{32}{9}\overline{C}_8 + 4\overline{C}_9$$

5) $f(x, y) = x^6$ (для $f(x, y) = y^6$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^6 dx dy = \frac{4}{7} = \frac{2}{3^6}\overline{C}_1 + \frac{4}{3^6}\overline{C}_2 + \frac{128}{3^6}\overline{C}_3 + \frac{260}{3^6}\overline{C}_4 + \frac{256}{3^6}\overline{C}_5 + 2\overline{C}_6 + \frac{2920}{3^6}\overline{C}_7 + \frac{3172}{3^6}\overline{C}_8 + 4\overline{C}_9$$

6) $f(x, y) = x^4 y^4$ (для $f(x, y) = x^2 y^4$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^4 y^2 dx dy = \frac{4}{15} = \frac{4}{3^6}\overline{C}_2 + \frac{80}{3^6}\overline{C}_4 + \frac{256}{3^6}\overline{C}_5 + \frac{360}{3^6}\overline{C}_7 + \frac{1872}{3^6}\overline{C}_8 + 4\overline{C}_9$$

7) $f(x, y) = x^8$:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^8 dx dy = \frac{4}{9} = \frac{2}{3^8}\overline{C}_1 + \frac{4}{3^8}\overline{C}_2 + \frac{512}{3^8}\overline{C}_3 + \frac{1028}{3^8}\overline{C}_4 + \frac{1024}{3^8}\overline{C}_5 + 2\overline{C}_6 + \frac{26248}{3^8}\overline{C}_7 + \frac{27268}{3^8}\overline{C}_8 + 4\overline{C}_9$$

8) $f(x, y) = x^6 y^2$ (для $f(x, y) = x^2 y^6$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^6 y^2 dx dy = \frac{4}{21} = \frac{4}{3^8} \overline{C}_2 + \frac{272}{3^8} \overline{C}_4 + \frac{1024}{3^8} \overline{C}_5 + \frac{2952}{3^8} \overline{C}_7 + \frac{13968}{3^8} \overline{C}_8 + 4\overline{C}_9$$

9) $f(x, y) = x^4 y^4$:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^4 y^4 dx dy = \frac{4}{25} = \frac{4}{3^8} \overline{C}_2 + \frac{128}{3^8} \overline{C}_4 + \frac{1024}{3^8} \overline{C}_5 + \frac{648}{3^8} \overline{C}_7 + \frac{1296}{3^8} \overline{C}_8 + 4\overline{C}_9$$

Если верно утверждение 2 с формулой весов $C_{i,j} = C_i C_j, i, j = \overline{0, n_0}$ и сохранением алгебраического порядка точности таким же, как и в одномерном случае (равен семи для $n_0 = 6$), то условия 1)-6) должны выполняться тождественно, а условия 7),8),9) имеют погрешность. Учитывая(8) получим

$$\overline{C}_0 = C_3 C_3 = \left(\frac{68}{105}\right)^2 = \frac{4624}{11025}; \overline{C}_1 = C_3 C_4 = \frac{68}{105} \frac{9}{140} = \frac{612}{14700}; \overline{C}_2 = C_4 C_4 = \left(\frac{9}{140}\right)^2 = \frac{81}{19600};$$

$$\overline{C}_3 = C_3 C_5 = \frac{68}{105} \frac{18}{35} = \frac{1224}{3850}; \overline{C}_4 = C_4 C_5 = \frac{9}{140} \frac{18}{35} = \frac{162}{4900}; \overline{C}_5 = C_5 C_5 = \left(\frac{18}{35}\right)^2 = \frac{324}{1225};$$

$$\overline{C}_6 = C_3 C_6 = \frac{68}{105} \frac{41}{420} = \frac{2788}{44100}; \overline{C}_7 = C_4 C_6 = \frac{9}{140} \frac{41}{420} = \frac{369}{58800}; \overline{C}_8 = C_5 C_6 = \frac{18}{35} \frac{41}{420} = \frac{738}{14700};$$

$$\overline{C}_9 = C_6 C_6 = \left(\frac{41}{420}\right)^2 = \frac{1681}{176400}. \tag{28}$$

Подставим коэффициенты(28) $\overline{C}_i, i = \overline{0,9}$ в интегральную квадратурную формулу (26) для двойного интеграла от произвольной непрерывной функции $f(x, y)$ проверяя справедливость $C_{i,j} = C_i C_j, i, j = \overline{0, n_0}$. Результаты проверки собраны в таблице 3.

Таблица 3

$f(x, y) \equiv 1$	$num(1) = 3.9999999999999996$	$exact(1) = 4.0000000000000000$
$f(x, y) = x^2$	$num(2) = 1.3333333333333333$	$exact(2) = 1.3333333333333333$
$f(x, y) = x^4$	$num(3) = 0.4444444444444444$	$exact(3) = 0.4444444444444444$
$f(x, y) = x^2 y^2$	$num(4) = 0.7999999999999999$	$exact(4) = 0.8000000000000000$
$f(x, y) = x^6$	$num(5) = 0.5714285714285714$	$exact(5) = 0.5714285714285714$
$f(x, y) = x^4 y^2$	$num(6) = 0.2666666666666666$	$exact(6) = 0.2666666666666667$
$f(x, y) = x^8$	$num(7) = 0.4707818930041152$	$exact(7) = 0.4444444444444444$
$f(x, y) = x^6 y^2$	$num(8) = 0.1904761904761905$	$exact(8) = 0.1904761904761905$
$f(x, y) = x^4 y^4$	$num(9) = 0.0905820105820106$	$exact(9) = 0.1600000000000000$

В первом столбце указана функция, во втором - численное значение правой части (26), в третьем столбце точное значение интеграла от указанной функции (левая часть(26)). Из таблицы 3, что квадратурная интегральная формула (26) имеет *седьмой алгебраический порядок точности* по определению 2 (учитывая тривиальное тождество $0=0$ для функции $f(x, y) = x^l y^s, l + s = 7$ (27)).

Нами показано, что с использованием тождества $C_{i,j} = C_i C_j, i, j = \overline{0, n_0}, n_0 = 6$ двухмерная квадратурная формула (26) имеет *седьмой алгебраический порядок точности* для произвольной функции $f(x, y) \in C^{n_0+2}([-1,1] \times [-1,1])$ и этот порядок совпадает с порядком одномерной формулы.

Замечание. Из формул (18),(19) для функций с разделяющимися переменными следует равенство алгебраических порядков точности двойных(18) (тройных(19)) квадратурных формул с учётом $C_{i,j} = C_i C_j (C_{i,j,s} = C_i C_j C_s), i, j, s = \overline{0, n_0}$ алгебраическому порядку точности одномерной квадратурной

формулы(7) . Действительно, перемножая интегральные суммы, точные для многочленов степени m , получим двойные или тройные интегральные суммы точные для многочленов того же порядка.

Проверим численно, используя в программе формулы (20),(8) для тройного интеграла, что сохраняется алгебраический порядок точности такой же, как и в однократном интеграле, т.е. равный семи

$$\int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 e^x y^4 z^5 dx dy dz = \frac{y^5 z^6}{30} (e^x - 1) \Big|_0^2 = (e^2 - 1) \frac{2^{11}}{30} = 436,1595630203324 \text{ (16 знач. цифр)}.$$

Для небольших N численно получим:

Если $N = 18$, программа возвращает значение eps=0.000000000245057

int 3 =436.1595630310208100, exact=436.1595630203324300 delta =0.0000000106883

Если $N = 36$, программа возвращает значение eps=0.000000000000989

int 3 =436.1595630203755700, exact=436.1595630203324300 delta =0.0000000000431

Определим порядок погрешности формул(20),(8) - при уменьшении шага сетки в 2 раза погрешность уменьшится в число раз:

$$\left| \frac{\delta_2}{\delta_1} \right| = \frac{0.0000000106883}{0.0000000000431} = 248 \approx 256 = 2^8 \text{ т.е. порядок погрешности равен } 8 \text{ (согласно}$$

определению 2).

3. Интерполяция интегралов в полярной и сферической системах координат

Рассмотрим равновеликое отображение обобщённых координат - полярных в кольце (круге) на прямоугольник в декартовой системе координат, сохраняющее площади фигур и равномерный шаг сетки вдоль всех координатных линий:

$$b = r_2 - r_1, a = \pi(r_2 + r_1),$$

где: r_2, r_1 - внешний и внутренний радиусы кольца,

a, b - стороны прямоугольника,

Тогда площадь кольца равна $S = ab = \pi(r_2^2 - r_1^2)$, где

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, \frac{x}{a} = \frac{\varphi}{2\pi}, y = r - r_1, dx = \frac{a}{2\pi} d\varphi, dy = dr, h_1 = \frac{\pi(r_2 + r_1)}{n}, h_2 = \frac{(r_2 - r_1)}{n}.$$

При таком отображении оба берега разреза кольца вдоль радиуса $\varphi = 0 \rightarrow x = 0; \varphi = 2\pi \rightarrow x = a$ переходят в вертикальные стороны прямоугольника, внутренняя и внешняя окружности $r_1 = const \rightarrow y = 0; r_2 = const \rightarrow y = r_2 - r_1$ переходят в горизонтальные стороны прямоугольника.

По теореме 4(стр.282) [5] отображение $(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$ должно обладать следующими свойствами:

якобиан замены координат $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{a}{2\pi} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a}{2\pi} \neq 0$ во всех точках рассматриваемой

области; частные производные $x_r, x_\varphi, y_r, y_\varphi$ непрерывны во всех точках области; отображение $(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$ взаимно однозначно в силу линейности отображения обобщённых координат. Все требования выполнены, если область интегрирования - кольцо ($r_1 \neq 0$). В случае круга ($r_1 = 0$) выполнены первые 2 требования из трёх Третье - неоднозначность отображения в точке $r_1 = 0$ - не выполнено, что в данном интеграле несущественно, так как мера интеграла в полярных координатах в окрестности указанной точки $dI_2 = f(r, \varphi) r dr d\varphi = f(0, \varphi) 0 dr d\varphi = 0$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) r dr d\varphi = \int_0^b \int_0^a f\left(y + r_1, \frac{2\pi}{a} x\right) (y + r_1) dy \frac{2\pi}{a} dx = \frac{2\pi}{a} \int_0^{(r_2-r_1)\pi(r_2+r_1)} f\left(y + r_1, \frac{2\pi}{a} x\right) (r_1 + y) dy dx = \\ &= \frac{2\pi}{\pi(r_2 + r_1)} \int_0^{(r_2-r_1)\pi(r_2+r_1)} f\left(y + r_1, \frac{2\pi}{a} x\right) (r_1 + y) dy dx = \frac{2}{(r_2 + r_1)} \int_0^{(r_2-r_1)\pi(r_2+r_1)} f\left(y + r_1, \frac{2\pi}{a} x\right) (r_1 + y) dy dx \approx \\ &\approx \frac{2}{(r_2 + r_1)} \frac{n_0 h_1}{2} \frac{n_0 h_2}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n C_{i,j} f\left(r_1 + y_j, \frac{2\pi}{a} x_i\right) (r_1 + y_j) = \frac{n_0^2 h_1 h_2}{2(r_2 + r_1)} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n C_{i,j} f\left(r_1 + j h_2, \frac{2\pi}{a} i h_1\right) (r_1 + j h_2) \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим пример (ответ с 16 значащими цифрами):

$$\int_0^{102\pi} \int_0^{10} r^8 \sin^2(\varphi) r dr d\varphi = \frac{r^{10}}{10} \Big|_0^{10} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 10^9 \left(\pi - \frac{\sin 2\varphi}{4} \Big|_0^{2\pi} \right) = 10^9 \pi = 3141592653.589793$$

Программа для двойных интегралов в полярной системе координат с учётом формул(29),(13),(14):

при $n1 = 5, r_1 = 0.0, r_2 = 10.0$ возвращает значения (в программе $N \equiv n$):

$n=14$ $k=1$ numerical=3141521192.673302 exact=3141592653.589793 $delta = 71460.916492$ $n=14$

$epsilon$ (14)=0.0000227467161950

$n=28$ $k=2$ numerical=3141592655.167346 exact=3141592653.589793 $delta = -1.577553$ $n=28$

$epsilon$ (28)=-0.0000000005021507

$n=42$ $k=3$ numerical=3141592653.589776 exact=3141592653.589793 $delta = 0.000017$ $n=42$

$epsilon$ (42)=0.0000000000000055

$n=56$ $k=4$ numerical=3141592653.589798 exact=3141592653.589793 $delta = -0.000005$ $n=56$

$epsilon$ (56)=-0.0000000000000015

$n=70$ $k=5$ numerical=3141592653.589792 exact=3141592653.589793 $delta = 0.000001$ $n=70$

$epsilon$ (70)=0.0000000000000005

$v(1)=3141521192.673302$ $v(2)=3141592653.589776$ $v(3)=3141592653.589792$ $v(4)=3141592653.589798$

$v(5)=3141592655.167346$

result: $k(opt) = 5$ $epsilon(5) = -0.0000000000000005$

int(polar) = 3141592653.589792, exact=3141592653.589793 $delta = -0.000001$.

Мы видим, что значение интеграла в круге $r_1 = 0, r_2 = 10$ достигает двойной точности $epsilon = -5 * 10^{-16}$ и $n = 70$. Часто на практике неизвестно точное значение интеграла, например, оно не может быть выражено через элементарные функции. Поэтому в программе использован алгоритм медианной фильтрации, позволяющий из нескольких значений интеграла при малых параметрах $N = 14k$ выбрать значение с наименьшей относительной ошибкой, соответствующее центральному элементу окна фильтра (элемент массива $v[(n_1 + 1)/2], n_1 = 5$), как видно по результату программы. Медианная фильтрация применима здесь благодаря знакопеременности относительной погрешности $epsilon$ [7]. Получаемая численная погрешность не является случайной величиной и повторяет своё значение при запуске программы. Оптимальное значение числа узлов $k(opt)$ с наименьшей относительной ошибкой может быть найдено предварительно и фиксироваться в цикле при вычислении нескольких тысяч интегралов. В алгоритме(14) мы видим рациональные весовые коэффициенты с 10 значащими цифрами, тогда используя формулы (22),(25) получим произведение весовых коэффициентов с 20 и 30 значащими цифрами соответственно. Распространённые компиляторы обеспечивают только двойную точность(16 значащих цифр) относительной погрешности $epsilon$. Использование компиляторов с 32 верными знаками обеспечит эффективное применение алгоритма(14) без потери точности. Оценим порядок точности(22),(14) по первым 2 значениям $delta$:

$$\left| \frac{delta(14)}{delta(28)} \right| = \left| \frac{71460.916492}{-1.577553} \right| = 45300 \approx 2^{16} = 65536, \text{ т.е. погрешность пары (25),(13) имеет тот же}$$

16 – ий порядок, что и порядок погрешности интегральных квадратур 15-го алгебраического порядка точности на отрезке и прямоугольнике, согласно замечанию 3 леммы, но применённым уже в полярной системе координат.

$$\text{Рассмотрим пример: } \int_5^{102\pi} \int_0^{10} r^8 \sin^2 \varphi r dr d\varphi = \pi \frac{r^{10}}{10} \Big|_5^{10} = \pi(10^{10} - 5^{10})/10 = 3138524692.01402$$

Для параметров $n1 = 5, r_1 = 5.0, r_2 = 10.0$ программа возвращает значения:

result: $k(opt)=4$ $epsilon$ (4)=0.0000000000000024

int(polar) = 3138524692.0140295, exact=3138524692.014022 $delta = 0.0000076$

То есть в кольце формульная пара(29),(14)обеспечивает двойную точность относительной погрешности.

Рассмотрим равновеликое отображение обобщённых координат - сферической системы в шаре (шаровом слое) на декартовую систему в параллелепипеде, сохраняющее объёмы тел и равномерный шаг сетки вдоль всех координатных линий:

$$a = \pi(r_2 + r_1), b = \frac{4}{3} \left(\frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2}{r_2 + r_1} \right), c = r_2 - r_1,$$

где: r_2, r_1 – внешний и внутренний радиусы шарового слоя,
 a, b, c – стороны параллелепипеда

Тогда объём шарового слоя $V = abc = \frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3)$, где

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c, \frac{x}{a} = \frac{\varphi}{2\pi}, \frac{\theta}{\pi} = \frac{y}{b}, z = r - r_1, dx = \frac{a}{2\pi} d\varphi, dy = \frac{b}{\pi} d\theta, dz = dr$$

$$z_k = kh_1, h_1 = \frac{c}{n}; y_j = h_2 j, h_2 = \frac{b}{n}; x_i = h_3 i, h_3 = \frac{a}{n}; i, j, k = \overline{0, n}$$

При отображении $x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)$ внутренняя и внешняя сфера переходят в нижнюю и верхнюю грани параллелепипеда $r_1 = const \rightarrow z = 0; r_2 = const \rightarrow z = r_2 - r_1$. Сечения: $\varphi = 0 \rightarrow x = 0; \varphi = 2\pi \rightarrow x = a; \theta = 0 \rightarrow y = 0, \theta = \pi \rightarrow y = b$. По теореме 9 (стр.298)[5] отображение $x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)$ должно обладать свойствами:

$$1) \text{ якобиан перехода } \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r, x_\theta, x_\varphi \\ y_r, y_\theta, y_\varphi \\ z_r, z_\theta, z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2\pi} \\ 0 & \frac{b}{\pi} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{ab}{2\pi^2} \neq 0 \text{ во всех точках рассматриваемой}$$

области;

2) частные производные $x_r, x_\theta, x_\varphi, y_r, y_\theta, y_\varphi, z_r, z_\theta, z_\varphi$ непрерывны во всех точках области; 3) отображение $x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)$ взаимно однозначно.

Первые два требования выполнены всегда.

В сферическом слое или шаре не выполнено третье условие (однозначность отображения) в 2 азимутальных направлениях $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$ (особые направления) и в центре шара $r = 0$. Мы можем проколоть сферический слой насквозь вдоль выбранных направлений, что топологически эквивалентно сфере с 1 ручкой. Сжать указанную область от полюсов к экватору так, что получится торообразный слой с плоскими боковыми гранями, разрезать его от оси симметрии плоскостью $\varphi = 0$ и разогнуть полученное тело в параллелепипед. Вдоль особых направлений неоднозначность отображения нарушается, что, однако, не сказывается на мере интеграла в сферических координатах, так как во всех точках направлений $\theta = 0, \theta = \pi, \int_0^\pi f(r, \theta, \varphi) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi = 0$. Для шара имеем ещё одну особую точку $r_1 = 0$, выполнены первые 2 требования гладкой замены переменных интегрирования кроме третьего (неоднозначность отображения в точке $r = 0$). Что для интеграла несущественно, так как мера интеграла в сферических координатах в окрестности указанной точки: $dI_3 = f(r, \theta, \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = f(0, \theta, \varphi) 0^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0$.

$$I_3 = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^c \int_0^b \int_0^a f\left(r_1 + z, \frac{\pi y}{b}, \frac{2\pi}{a} x\right) (r_1 + z)^2 dz \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \frac{\pi}{b} dy \frac{2\pi}{a} dx$$

$$\frac{2\pi^2}{ab} \int_0^{r_2-r_1} \int_0^{\frac{4}{3} \left(\frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2}{r_2 + r_1} \right) \pi (r_2 + r_1)} \int_0^{\pi (r_2 + r_1)} f\left(r_1 + z, \frac{\pi y}{b}, \frac{2\pi}{a} x\right) (r_1 + z)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) dz dy dx =$$

$$\frac{3\pi}{2(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)} \int_0^{r_2-r_1} \int_0^{\frac{4}{3} \left(\frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2}{r_2 + r_1} \right) \pi (r_2 + r_1)} \int_0^{\pi (r_2 + r_1)} f\left(r_1 + z, \frac{\pi y}{b}, \frac{2\pi}{a} x\right) (r_1 + z)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) dz dy dx =$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{3\pi}{2(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)} \frac{n_0 h_1}{2} \frac{n_0 h_2}{2} \frac{n_0 h_3}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n C_{i,j,k} f\left(r_1 + z_k, \frac{\pi y_j}{b}, \frac{2\pi}{a} x_i\right) (r_1 + z_k)^2 \sin\left(\frac{\pi y_j}{b}\right) = \\ &= \frac{3\pi n_0^3 h_1 h_2 h_3}{16(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n C_{i,j,k} f\left(r_1 + k h_1, \frac{\pi}{b} h_2 j, \frac{2\pi}{a} h_3 i\right) (r_1 + k h_1)^2 \sin\left(\frac{\pi}{b} h_2 j\right) \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим пример:

$$\int_0^{10} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (r^7 \sin^2 \varphi \sin \theta) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{r^{10}}{10} \Big|_5^{10} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta = (10^{10} - 5^{10}) \frac{\pi^2}{20}$$

Программа для тройных интегралов в сферической системе координат с учётом формул (11),(30): возвращает значения (в программе $N \equiv n$):

n=10 k=1 numerical=4914074506.509758 exact=4929983057.770709 delta =-15908551.260951

epsilon (10)=-0.0032373443340911

n=20 k=2 numerical=4929989554.759921 exact=4929983057.770709 delta =6496.989212

epsilon (20)=0.0000013178505025

n=30 k=3 numerical=4929983057.770734 exact=4929983057.770709 delta =0.000025

epsilon (30)=0.00000000000000050

v(1)=4914074506.509758 v(2)=4929983057.770734 v(3)=4929989554.759921

result: n(opt)=3 eps(3)=0.00000000000000050

int =4929983057.770734, exact=4929983057.770709 delta =0.000025.

По первым 2 значениям *delta* при малых N оценим порядок погрешности формул(26),(10):

$$2028 = 2^{11} < \left| \frac{\text{delta}(10)}{\text{delta}(20)} \right| = \left| \frac{-15908551.260951}{6496.989212} \right| = 2449 < 2^{12} = 4096, \text{ что является хорошим}$$

подтверждением леммы для алгоритма(11) и квадратур с алгебраическим порядком точности равным 11, но применённым уже к тройному интегралу в сферической системе координат.

Выводы:

- 1) Получены формулы и алгоритмы для составных интегральных квадратур с равномерным шагом,(7),(8);(10),(11);(13),(14) с 7,11,15 алгебраическим порядком точности соответственно.
- 2) Найдены аналоги формул (20)-(22), (23) – (25) для двойных на прямоугольнике и тройных в параллелепипеде интегралов с сохранением порядка погрешности, что и в одномерном случае.
- 3) Построены линейные отображения обобщённых координат с кольца (круга) на прямоугольник, с шарового слоя (шара) на параллелепипед, а также интегральные квадратуры(29) в полярной системе координат и(30) в сферической системе координат с сохранением алгебраического порядка точности, что проверено численно.

Литература

- 1)Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.:Наука, 2008.
- 2)Пикулин В.П.,Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. – М.:Наука,1995.
- 3)Н.С.Бахвалов, А.В.Лапин, Е.В.Чижонков. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.:БИНОМ. Лаборатория знаний,2010.
- 4) Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Об эффективном поиске безусловного экстремума гладких функционалов в конечномерных задачах. Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2016. – № 4. –С. 119 – 131.
- 5) Бутузов В.Ф., Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин. Математический анализ в вопросах и задачах, – М. Физико – математическая литература, 2001 – 480 с.
- 6)Бартенев О.В. “Математическая библиотека IMSL” .:(Ч1). – М. :Диалог МИФИ,2001. – 457 с.
- 7) Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу. Вестн. Полоцкого государственного ун-та. Серия С. Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. –С. 27 – 36.

Прикладная МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ПОЛЯ ЛИНИЙ ТОКА ПО ТЕМПЕРАТУРНОМУ РАЗРЕЗУ

Пастухов Ю.Ф., к.ф. - м.н., Пастухов Д.Ф., к.ф. - м.н.

Аннотация: В данной работе численными методами рассматривается двумерная стационарная задача пересчета разреза температурного поля на поле направлений скорости частиц воды. Температурное поле геотермального озера было измерено мостом постоянного тока. Для решения задачи достаточно использовать уравнение теплопроводности с конвективной частью и объемным источником плавучести, уравнение неразрывности, граничные условия для скорости частиц жидкости. Численная задача решается методом прогонки. Для усиления устойчивости используется метод медианной фильтрации горизонтальной компоненты скорости на каждом слое. Новым является понятие связности конвективной струи.

Ключевые слова: уравнения тепло - массопереноса, турбулентный коэффициент температуропроводности, поле направлений, условие связности конвективной струи.

The Abstract: In given work by numerical methods is considered two-dimensional stationary problem of the recalculation of the cut of the warm-up field on field of the directions to velocities of water. The Warm-up field geothermal lake was measured by bridge of the direct current. For decision of the problem it is enough to use the equation to heat conductivity, equation to continuity, border conditions for velocity of the particles to liquids. For reinforcement of stability is used method median to filtering horizontal components to velocities on each layer. New is a notion to coherence heated stream.

The Keywords: equations heat - a mass of the carrying, turbulent factor to warm-up conductivity, field of the directions, condition to coherence heated stream.

Введение

Летом 1992 года на озеро Банное (Банное находится в Узон – Гейзерной долине, расположенной в 100-200 км от г. Петропавловска – Камчатского) институтом вулканологии ДВНЦ РАН и физическим факультетом МГУ была организована совместная экспедиция, одной из задач которой было измерение температурного поля озера геотермального типа [8,9]. Геотермальные озера относят к объектам так называемого “активного дна” при взаимодействии литосферы и гидросферы. Исследователей, проводивших комплекс измерений в данном озере и в Узон – Гейзерной долине (а также в кальдере Академии Наук) в целом интересовали распределения и перенос химических веществ - радиоактивных газов; общесолевой состав; содержание *Zn, Mn, Fe, Cu, Cr, Al* (Карпов Г.А., Файзуллин С.М.) [1], Поскольку перенос водных масс в активных областях связан с переносом больших потоков тепла, то естественно рассматривать задачу массопереноса совместно с теплообменом. В связи со сказанным, в данной работе

рассматривается математическая модель тепло – массопереноса в активной области и ее особенности решения.

Так обстоит дело на практике с двумерной стационарной задачей пересчета разреза температурного поля геотермального озера на поле направлений скорости воды. Полностью неявная численная схема, решаемая методом прогонки такова, что требования сходимости, наложенные на коэффициенты уравнения [1],[4], выполняются, но замедляют сходимость решения. Поэтому, при нахождении горизонтальной компоненты скорости в геотермальном озере на каждом слое найденное решение подвергается медианной фильтрации для усиления устойчивости. По этой причине мы назвали данную задачу плохо обусловленной. Турбулентный коэффициент температуропроводности и объемная плотность источника плавучести линейно растут с глубиной, что связано с выбросом расплава серы в нижней части озера. Введено понятие связности конвективной струи, позволяющее сравнить значения коэффициента в разных областях температурного поля численными методами. Программа написана на языке FORTRAN[6,7].

Экспериментальная часть

Озеро Банное представляет собой мини кратер вулкана, заполненный водой, – эллипсоидная чаша с наибольшей полуосью 20 м и глубиной 24 м. На дне чаши находится расплавленная сера, которая выплескивается в озеро и кристаллизуется на датчике температуры каждый раз при его максимальном погружении. Из озера вытекает ручей с температурой воды 40°C и расходом 25 л/с. На глубине 13 м найден источник холодной воды, втекающей в озеро с температурой $11,2^{\circ}\text{C}$. Холодная вода, вероятно, попадает в озеро из местного ручья, несущего талые ледниковые воды с температурой 8°C в 100 – 150 м от озера. Простой подсчет показывает, что из озера с водой уносится тепловой поток мощностью: $P = c \rho v \Delta t = 4200 \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг}}{\text{кг} \cdot \text{C} \cdot \text{м}^3} 25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{с}} (40 - 11,5)^{\circ}\text{C} \approx 3 \text{МВт}$. При этом не учитывается интенсивное испарение с поверхности озера с температурой 40°C в воздух с температурой около 10°C в ночное и вечернее время. В безветренное время (обычно вечером, ночью и утром) на поверхности озера Банное образуется сульфидная пленка. Расплавленная сера на дне озера порождает несколько конвективных струй, видимых на поверхности по выходу газа и расталкиванию серы в области струи.

Методика измерения была следующей: по периметру озера через равные промежутки находились кольца от 1 до 14. Вдоль выбранного разреза натягивался канат, который прижимал лодку – плоскодонку к воде и исключал дрейф лодки. По горизонтали вдоль каната измерения температуры проводились с шагом $\Delta x = 5$ м. По вертикали измерительный кабель погружался с шагом $\Delta z = 3$ м. Для исключения раскачки кабель снабжался отвесом (куском железной трубы массой 2 кг). Неточность фиксации узлов координатной сетки составила ± 10 см. Платиновый датчик температуры имеет предельную рабочую температуру 200°C и вместе с измерительным мостом сопротивлений обеспечивал абсолютную погрешность температуры $\Delta T = 0,05^{\circ}\text{C}$. Каждый разрез температурного поля измерялся в течение $\Delta t = (2 - 3)$ часов. На разрезе рис.1 проведено примерно 30 измерений температуры с равномерным шагом по всему температурному полю. Для установления теплового равновесия платинового датчика каждое измерение производилось не менее 5 минут. Характерный промежуток циркуляции воды в озере оценим как удвоенное время поднятия воды в области струи $\tau = 2 \frac{H}{w} = 2 \frac{20 \text{ м}}{0,5 \text{ м/с}} = 80 \text{ с}$. Поскольку $\tau \ll \Delta t$, то время измерения Δt является достаточно большим для осреднения процессов тепло и массопереноса всего температурного поля в целом, так и каждое отдельное измерение в несколько раз превышает τ . Тогда все величины, определенные по разрезу температурного поля рис.1 можно считать стационарными (математические уравнения не содержат частной производной по времени). Канат натягивался таким образом, чтобы при измерениях

температуры в вертикальной плоскости разреза попали не менее 2 конвективных струй, наблюдаемых по вспучиванию поверхности и выходу газа. Такое условие симметрии задачи позволяет упростить и замкнуть систему уравнений тепло - массопереноса. Как видно на рис.1 присутствует не менее 2 конвективных струй. Эти струи наблюдались в стационарном положении на поверхности озера в течение измерения температурного разреза. Ввиду большого потока тепла через озеро(3 МВт) и плотности потока тепла ($\frac{3MВт}{10^3 м^2} = 3 KВт/м^2$) будем считать коэффициенты обмена турбулентными.

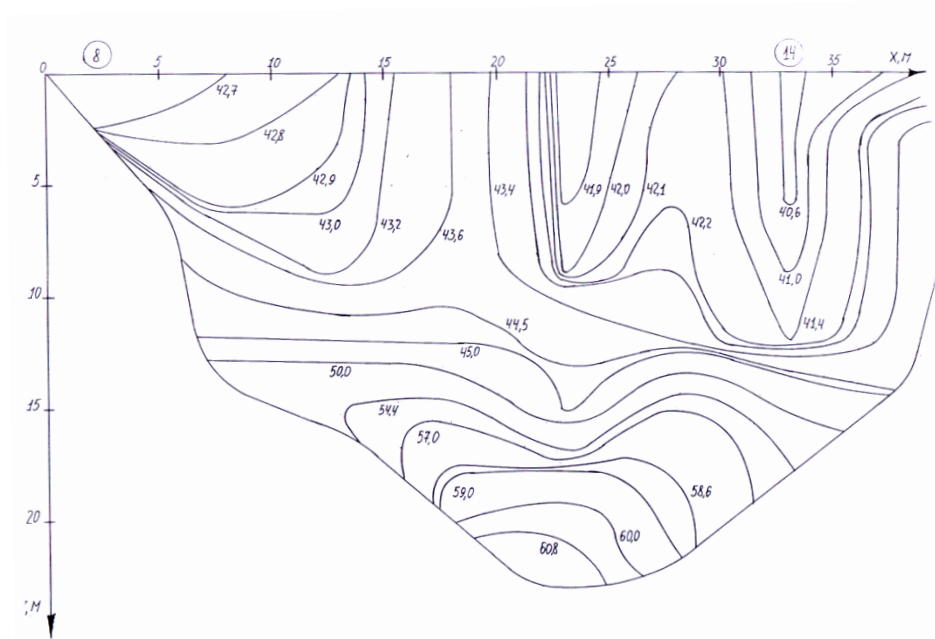


Рис.1 Разрез температурного поля геотермального озера

Постановка задачи

Рассмотрим следующую стационарную, не зависящую от времени задачу тепло и массопереноса:

$$\begin{cases} u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla(\alpha \nabla T) + q, (x, z) \in (0, L) * (0, H) & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, (x, z) \in (0, L) * (0, H) & (2) \\ u = u(x, z), w = w(x, z), T = T(x, z), (x, z) \in [0, L] * [0, H] \equiv \bar{D} & (3) \\ w(x, 0) = w(x, H) = w(0, z) = w(L, z) = 0, u(0, z) = u(L, z) = u(x, H) = 0 & (4) \end{cases}$$

Коэффициент температуропроводности $\alpha = \frac{P}{S \frac{\partial T}{\partial z} c_p \rho} = \frac{10^6 Вт}{10^3 м^2 (\frac{20K}{20м}) 4200 \frac{Дж}{кг*К} 10^3 \frac{кг}{м^3}} \sim 2 \cdot 10^{-4} \frac{м^2}{с}$ (смотрим рис.1), где: S - площадь поверхности озера, $\frac{\partial T}{\partial z}$ - вертикальная компонента градиента температуры, $P \sim 10^6 Вт$ - мощность источника плавучести в озере [9], c_p - удельная теплоемкость воды при постоянном давлении, ρ - плотность воды. Коэффициент температуропроводности α фактически определяется мощностью источника плавучести P , т.е. $\alpha = \alpha(P)$. Первое уравнение (1) в системе - уравнение теплопроводности с конвективной частью и источником мощности на единицу объема q , деленной на $c_p \rho$. $(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial z})$ - градиент температуры; (u, w) - вектор скорости жидкой частицы, т.е. ее горизонтальная и вертикальная компоненты соответственно; L, H - диаметр и максимальная глубина озера соответственно. Уравнение (2) - уравнение неразрывности. Компоненты скорости и температурное поле зависят от

координат x, z на прямоугольнике $[0, L] [0, H]$ - третье условие (3) (мы рассматриваем двумерную задачу). Четвертое условие – граничные условия для компонент скорости на сторонах прямоугольника (4). Все величины имеют размерность в системе СИ.

Особенностью данной задачи является известное, измеренное поле температуры, а, следовательно, и частные первые и вторые производные температуры, интерполированные на области прямоугольника. На поверхности раздела озера отсутствует вертикальная компонента скорости. На боковых сторонах прямоугольника и на нижней стороне (дно) обе компоненты скорости равны нулю.

Вообще говоря, координатная область озера D не является прямоугольником. Но мы доопределяем вертикальный разрез озера до прямоугольника по правилу:

$$\begin{cases} T^*(x, z) = T(x, z), & (x, z) \in D \subset \bar{D} \\ T^*(x, z_0) = T(x_0, z_0), & (x, z_0) \in D \setminus \bar{D} \end{cases}$$

В прямоугольнике \bar{D} , вне области озера $D \setminus \bar{D}$, температура доопределяется по непрерывности ее значением в граничной точке (x_0, z_0) и представляет собой горизонтальную изотерму, так ведет себя температурное поле в твердой однородной породе, окружающей озеро с вертикальным потоком тепла. Обоснованность такого приема можно встретить в [2]-метод фиктивных областей (стр.204).

Нас будет интересовать более узкая задача – определение поля направлений по полю скоростей. Именно такой интерес возникает у геологов, геохимиков, т.е. какие вещества, и в какую область переносятся и в каком физико-химическом состоянии.

Постановка численной задачи

Первоначально узловые значения температуры были измерены на равномерной прямоугольной сетке с шагом $dx = L/n$ в $n + 1$ точках по горизонтали и с шагом $dz = H/n_1$ в $n_1 + 1$ точках по вертикали, где L, H -длина и высота озера в данном разрезе. Другими словами, задан разрез температурного поля $T_{k_1}^{j_1}, j_1 = 1, \dots, n_1 + 1, k_1 = 1, \dots, n + 1$

Дополним разбиение прямоугольной области, в которую вписан разрез озера, оставляя старые узлы с измеренной температурой в новой сетке на прежних местах.

В программе удобно выбрать начало координат, совмещенное с правым верхним углом рис.1, горизонтальную ось x направить влево, вертикальную z направить вниз, получаем правую координатную систему.

Разобьем каждый малый прямоугольник со сторонами $h_{01} = \frac{L}{n}, h_{02} = \frac{H}{n_1}$ соответственно на $n x, n z$ целых частей. Прямоугольная сетка с горизонтальным шагом $h_1 = L/(n * n x)$ и вертикальным шагом $h_2 = H/(n_1 * n z)$ имеет $n * n x + 1$ узлов по горизонтали и $n_1 * n z + 1$ узлов по вертикали. Программа была написана на языке FORTRAN, в котором целочисленные переменные в массивах принимают значения, начиная с 1. Тогда, номер столбца обозначим $k = 1, \dots, n * n x + 1$, номер строки $j = 1, \dots, n_1 * n z + 1$.

Температурное поле внутри каждого большого прямоугольника продолжим по непрерывности линейно:

$$T_{1k}^j = (z_{j_1+1} - z_j) \frac{T_{k_1}^{j_1}(x_{k_1+1} - x_k) + T_{k_1}^{j_1}(x_k - x_{k_1})}{dx dz} + (z_j - z_{j_1}) \frac{T_{k_1}^{j_1+1}(x_{k_1+1} - x_k) + T_{k_1}^{j_1+1}(x_k - x_{k_1})}{dx dz} \quad (5)$$

$$k_1 = 1, \dots, n, j_1 = 1, \dots, n_1, k = 1, \dots, n * n x + 1, j = 1, \dots, n_1 * n z + 1$$

$$x_{k_1} = dx (k_1 - 1), x_{k_1+1} = dx * k_1, z_{j_1} = dz (j_1 - 1), z_{j_1+1} = dz * j_1$$

$$x_k = (k - 1) h_1, z_j = (j - 1) h_2$$

Данная формула непрерывно переходит в значение температуры в 4 угловых точках каждого большого прямоугольника:

$$T_{k1}^{j1}(j = j1, k = k1), T_{k1+1}^{j1}(j = j1, k = k1 + 1), T_{k1}^{j1+1}(j = j1 + 1, k = k1), T_{k1+1}^{j1+1}(j = j1 + 1, k = k1 + 1),$$

а также линейна по x_k, z_j .

Уравнение неразрывности запишем в виде:

$$\frac{(u_{k+1}^j - u_k^j)}{h_1} + \frac{(w_k^j - w_k^{j-1})}{h_2} = 0, j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1; k = 1, \dots, n \cdot nx \quad (6)$$

$$\text{Или } z(u_{k+1}^j - u_k^j) + w_k^j - w_k^{j-1} = 0, j = 2, \dots, n1 * nz + 1; k = 1, \dots, n * nx, z = \frac{h_2}{h_1}$$

Здесь по координате z для компоненты скорости w применяется производная назад, а по координате x для компоненты u используется производная вперед[2]. Уравнение теплопроводности:

$$u_k^j f_{1k}^j + w_k^j f_{2k}^j = f_{3k}^j + q_k^j \quad (7)$$

где: q_k^j - объемная мощность источника плавучести, выделяемая в единице объема, деленная на $c_p \rho$.

Размерность q_k^j - $[\frac{K}{c}]$. Здесь функция f_{1k}^j определяется как:

$$f_{1k}^j = \frac{T_{k+1}^{j1} - T_{k-1}^{j1}}{2 h_1}, k = 2, \dots, n \cdot nx, j = 1, \dots, n1 * nz + 1 \quad (8)$$

$$f_{11}^j = f_{12}^j; f_{1n \cdot nx+1}^j = f_{1n \cdot nx}^j; j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1$$

Аналогично, определяется функция f_{2k}^j :

$$f_{2k}^j = \frac{T_{k+1}^{j+1} - T_{k-1}^{j-1}}{2 h_2}, k = 1, \dots, n * nx + 1, j = 2, \dots, n1 * nz \quad (9)$$

$$f_{2k}^1 = f_{2k}^2; f_{2k}^{n1 \cdot nz+1} = f_{2k}^{n1 \cdot nz}; k = 1, \dots, n * nx + 1$$

Функция f_{3k}^j , используя формулу $div(k(z) grad T(x, z)) = k(z) \Delta T(x, z) + \nabla T(x, z) \nabla k(z) = k(z) \Delta T(x, z) +$

$\frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial k}{\partial z}$ [1,7], $\alpha(z) = k(z)/(c_p \rho)$ строится по функции f_{03k1}^{j1} :

$$f_{03k1}^{j1} = \alpha_{k1}^{j1} \left(\frac{T_{k1+1}^{j1} + T_{k1-1}^{j1} - 2 T_{k1}^{j1}}{dx dx} + \frac{T_{k1}^{j1+1} + T_{k1}^{j1-1} - 2 T_{k1}^{j1}}{dz dz} \right) + \frac{(\alpha_{k1}^{j1+1} - \alpha_{k1}^{j1-1})(T_{k1}^{j1+1} - T_{k1}^{j1-1})}{4 dz dz} \quad (10)$$

$$j1 = 2, \dots, n1, k1 = 2, \dots, n$$

$$f_{031}^{j1} = f_{032}^{j1}; f_{03n+1}^{j1} = f_{03n}^{j1}; j1 = 2, \dots, n1$$

$$f_{03k1}^1 = f_{03k1}^2; f_{03k1}^{n1+1} = f_{03k1}^{n1}; k1 = 2, \dots, n$$

$$f_{031}^1 = \frac{f_{031}^2 + f_{032}^1}{2}, f_{031}^{n1+1} = \frac{f_{032}^{n1+1} + f_{031}^{n1}}{2}, f_{03n+1}^1 = \frac{f_{03n}^{n1+1} + f_{03n+1}^{n1}}{2},$$

$$f_{03n+1}^1 = \frac{f_{03n+1}^2 + f_{03n}^1}{2}$$

$$f_{3k}^j = (z_{j1+1} - z_j) \frac{f_{03k1}^{j1}(x_{k1+1} - x_k) + f_{03k1+1}^{j1}(x_k - x_{k1})}{dx dz} + (z_j - z_{j1}) \frac{f_{03k1}^{j1+1}(x_{k1+1} - x_k) + f_{03k1+1}^{j1+1}(x_k - x_{k1})}{dx dz} \quad (11)$$

$$k1 = 1, \dots, n, j1 = 1, \dots, n1, k = 1, \dots, n * nx + 1, j = 1, \dots, n1 * nz + 1$$

$$x_{k1} = dx(k1 - 1), x_{k1+1} = dx * k1, z_{j1} = dz(j1 - 1), z_{j1+1} = dz * j1$$

$$x_k = (k - 1) h_1, z_j = (j - 1) h_2$$

Видно, что формулы (5), (11) по построению совершенно одинаковы. В формуле(10) коэффициент температуропроводности зависит только от глубины:

$$\alpha_{k1}^{j1} = \text{alfa}(j1, k1) = \frac{2 \cdot 10^{-4}(j1-1)}{n1}, j1 = 1, \dots, n1 + 1[4].$$

Из формулы (7) выразим вертикальную компоненту скорости:

$$w_k^j = \frac{f_{3k}^j + q_k^j - u_k^j f_{1k}^j}{f_{2k}^j} \quad (12)$$

Тогда формально, заменив в(12) j на $j - 1$, получим:

$$w_k^{j-1} = \frac{f_{3k}^{j-1} + q_k^{j-1} - u_k^{j-1} f_{1k}^{j-1}}{f_{2k}^{j-1}} \quad (13)$$

Выражения(12), (13) подставим в уравнение неразрывности(6):

$$z u_{k+1}^j - u_k^j \left(z + \frac{f_{1k}^j}{f_{2k}^j} \right) + u_{k-1}^j \varepsilon = -u_k^{j-1} \frac{f_{1k}^{j-1}}{f_{2k}^{j-1}} + \left(\frac{f_{3k}^{j-1}}{f_{2k}^{j-1}} - \frac{f_{3k}^j}{f_{2k}^j} \right) + \left(\frac{q_k^{j-1}}{f_{2k}^{j-1}} - \frac{q_k^j}{f_{2k}^j} \right) \quad (14)$$

В формуле (14) тождественно $\varepsilon = 0$, но положим его малым не равным нулю $\varepsilon = 10^{-10}$.

В формуле (14)избавимся от знаменателя:

$$\begin{aligned} & z u_{k+1}^j f_{2k}^{j-1} f_{2k}^j - u_k^j \left(z f_{2k}^j f_{2k}^{j-1} + f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} \right) + u_{k-1}^j \varepsilon \\ & = -u_k^{j-1} f_{2k}^j f_{1k}^{j-1} + (f_{3k}^{j-1} f_{2k}^j - f_{3k}^j f_{2k}^{j-1}) + (q_k^{j-1} f_{2k}^j - q_k^j f_{2k}^{j-1}) \end{aligned} \quad (15)$$

$j = 2, \dots, n1 * nz + 1, k = 2, \dots, n * nx, z = h_2 / h_1$

В формуле(15) по-прежнему $\varepsilon = 10^{-10}$ (опущен множитель $f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}$), так как удобно выбрать коэффициент при u_{k-1}^j не зависящий от температурного поля. Формула (15) представляет частично неявную схему с трехдиагональной матрицей. Как показывает просмотр таблицы решений, формула (15) неустойчива относительно метода прогонки. Поэтому перейдем к полностью неявной численной схеме, перенеся влево слагаемое $u_k^{j-1} f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}$, и заменим u_k^{j-1} на u_k^j :

$$\begin{aligned} & z u_{k+1}^j f_{2k}^{j-1} f_{2k}^j - u_k^j \left(z f_{2k}^j f_{2k}^{j-1} + (f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}) \right) + u_{k-1}^j \varepsilon \\ & = (f_{3k}^{j-1} f_{2k}^j - f_{3k}^j f_{2k}^{j-1}) + (q_k^{j-1} f_{2k}^j - q_k^j f_{2k}^{j-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

$j = 2, \dots, n1 * nz + 1, k = 2, \dots, n * nx$

Из формулы (7) на поверхности озера $w_k^1 = 0, q_k^1 = 0$, следует, что

$$u_k^1 = \frac{f_{3k}^1}{f_{1k}^1}, k = 2, \dots, n * nx \quad (17)$$

Метод прогонки позволяет решать итерационные уравнения с трехдиагональной матрицей, воспользуемся методом в форме[5]:

$$A_k x_{k-1} - C_k x_k + B_k x_{k+1} = F_k, k = 1, \dots, n - 1 \quad (18)$$

$$x_0 = \lambda_0 x_1 + v_0, x_n = \lambda_n x_{n-1} + v_n \quad (19)$$

$$x_k = \lambda_k x_{k+1} + v_k, k = 0, \dots, n - 1 \quad (20)$$

$$x_n = \frac{\lambda_n v_{n-1} + v_n}{1 - \lambda_n \lambda_{n-1}}, \quad \lambda_k = \frac{B_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}, \quad v_k = \frac{A_k v_{k-1} - F_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}} \quad (21)$$

Условие устойчивости численной схемы:

$$|C_k| \geq |A_k| + |B_k| \geq |A_k| > 0, |\lambda_0| < 1, |\lambda_n| \leq 1 \quad (22)$$

Сравнивая уравнения (16) и (18), в данном случае получим:

$$A_k^j = \varepsilon, \quad B_k^j = z f_{2k}^{j-1} f_{2k}^j, \quad C_k^j = z f_{2k}^j f_{2k}^{j-1} + (f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}) \quad (18')$$

$$F_k^j = (f_{3k}^{j-1} f_{2k}^j - f_{3k}^j f_{2k}^{j-1}) + (q_k^{j-1} f_{2k}^j - q_k^j f_{2k}^{j-1}), k = 2, \dots, n * nx, \quad j = 2, \dots, n1 * nz + 1$$

Так как $u_1^j = u_{n * nx + 1}^j = 0$, то $\lambda_1^j = \lambda_{n * nx + 1}^j = 0, v_1^j = v_{n * nx + 1}^j = 0, j = 2, \dots, n1 * nz + 1$

Прогонка вперед:

$$\lambda_1^j = 0, v_1^j = 0 \quad j = 2, \dots, n1 * nz + 1$$

$$\lambda_k^j = \frac{B_k^j}{C_k^j - A_k^j \lambda_{k-1}^j}, \quad v_k^j = \frac{A_k^j v_{k-1}^j - F_k^j}{C_k^j - A_k^j \lambda_{k-1}^j}, \quad k = 2, \dots, n * nx + 1, \quad j = 2, \dots, n1 * nz + 1 \quad (21')$$

$$u_{n * nx + 1}^j = \frac{\lambda_{n * nx + 1}^j v_{n * nx}^j + v_{n * nx + 1}^j}{1 - \lambda_{n * nx + 1}^j \lambda_{n * nx}^j}, \quad j = 2, \dots, n1 * nz + 1$$

Прогонка назад:

$$\lambda_{n * nx + 1}^j = 0, v_{n * nx + 1}^j = 0 \quad j = 2, \dots, n1 * nz + 1$$

$$u_k^j = \lambda_k^j u_{k+1}^j + v_k^j, \quad k = 1, \dots, n * nx, \quad j = 2, \dots, n1 * nz + 1 \quad (20')$$

$$u_k^1 = \frac{f_{3k}^1}{f_{1k}^1}, \quad k = 2, \dots, n * nx$$

В последней формуле u_k^1 может неограниченно возрастать, если f_{1k}^1 стремится к нулю, поэтому в программе реализован по непрерывности алгоритм $u_k^1 = u_{k-1}^1$, если $f_{1k}^1 = 0$.

$$q_k^j = 4.5 \cdot 10^{-5} * \left(\frac{j-1}{n2 * nz0} \right) \left[\frac{K}{C} \right], \quad j = 1, \dots, n1 * nz + 1 .$$

Здесь использовалась линейная аппроксимация объемного источника плавучести $q(z) = q_0 * \frac{z}{H}$ и условие нормировки:

$$\int_0^H q(z) dz = \frac{P}{c_p \rho L^2}$$

Из условия нормировки

получим: $q_0 = \frac{2P}{c_p \rho L^2 H} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ Вт}}{4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot (40 \text{ м})^2 \cdot 20 \text{ м}} = 4.5 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{К}}{\text{с}} \right]$.

Кроме того, естественно предположить, что энергия источника плавучести *выделилась* только в частицах воды, если они движутся к поверхности озера: $w_k^j = \frac{f_{3k}^j + q_k^j - u_k^j f_{1k}^j}{f_{2k}^j}$, если $w_k^{j-1} \leq 0$; $w_k^j = \frac{f_{3k}^j - u_k^j f_{1k}^j}{f_{2k}^j}$, если $w_k^{j-1} > 0$ (12')

Условие устойчивости:

$$|C_k^j| \geq |A_k^j| + |B_k^j| \geq |A_k^j| > 0, |\lambda_1^j| < 1, |\lambda_{n * nx + 1}^j| \leq 1 \quad (22')$$

$$k = 1, \dots, n * nx, \quad j = 2, \dots, n1 * nz + 1$$

Два последних неравенства обеспечивает граничное условие задачи $u_1^j = u_{n * nx + 1}^j = 0, j = 1, \dots, n1 * nz + 1 (\lambda_1^j = 0, \lambda_{n * nx + 1}^j = 0)$. $|A_k^j| = \varepsilon > 0$. Учитывая непрерывность коэффициентов f_{1k}^j и f_{2k}^j можно ожидать, что значение $f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1} \approx 0$ в формуле (18'). $C_k^j = z f_{2k}^j f_{2k}^{j-1} + (f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}) = B_k^j + (f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}) \approx B_k^j$. Добавим к C_k^j малое $\pm A_k^j$ и с тем же знаком, что и C_k^j ($C_k^j \approx C_k^j$):

$$|C_k^j| = |C_k^j| + |\varepsilon| = |B_k^j| + |A_k^j| \geq |B_k^j| + |A_k^j| \geq |A_k^j|, |\varepsilon| = \varepsilon \quad (22'')$$

Конечно, в эксперименте $|f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}|$ не всегда мало, но замечено, что $|f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}| < |B_k^j|$. Поскольку знак выражения $(f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1})$ быстро осциллирует и обнуляет свое среднее значение на интервале порядка dx , то можно применить метод медианной фильтрации на масштабе dx . Неравенство (22') фактически превращается в равенство (предельно выполняется условие сходимости), в этом смысле мы назвали задачу плохо обусловленной.

Описание программы. Все действительные переменные и параметры имеют двойную точность: *real(8)*. Для стабилизации устойчивости численной задачи (18') – (21') применялся метод медианной фильтрации. Сущность метода заключается в удалении больших по модулю значений статистического ряда

чисел. Для этого при фиксированном слое j для центральной точки u_k^j , после того как программа нашла решение $res(k, j) = u_k^j, k = 1, \dots, n * nx$, строится вектор $um(kkk)$ размерности $2 * lm + 1$, где lm параметр окна фильтрации:

```
do k = lm + 1, n1 * nx0 + 1 - lm; kkk = 0;
do kk = -lm, lm; kkk = kkk + 1; um(kkk) = res(k + kk, j); enddo
call sort_real(um, um1); res1(k, j) = um1(lm + 1); enddo
```

k, kk, kkk целочисленные переменные. Вектор $um(kkk)$ сортируется по возрастанию значений, получается вектор $um1(kkk)$ той же размерности но отсортированный. Выбираем центр отфильтрованного окна $um1(lm + 1)$. Если устранить выбросы решения (отфильтровать) на предыдущем слое, то в следующем слое решение не будет иметь больших значений. Просмотр таблицы решений при различном числе узлов сетки показывает, что возмущение решения, возникшее на некотором слое, медианной фильтрацией быстро подавляется на следующих слоях.

Для вызова подпрограммы $call sort_real(um, um1)$ необходимо использовать библиотеки *Fortran*: $use dfimsl; use DFLIB; use sort_real_int[5]$. Для визуализации применялся графический модуль *Compaq Array Visualizer v1.6* с использованием библиотек $use AVDef; use AVViewer[6]$.

Вертикальную компоненту скорости можно найти из формулы (12):

$$w_k^j = \frac{f_{3k}^j + q_k^j - u_k^j f_{1k}^j}{f_{2k}^j}, \text{ если } w_k^{j-1} \leq 0; w_k^j = \frac{f_{3k}^j - u_k^j f_{1k}^j}{f_{2k}^j}, \text{ если } w_k^{j-1} > 0, f_{2k}^j \neq 0, k = 2, \dots, n * nx, j = 2, \dots, n1 * nz + 1 \quad (23)$$

$$w_k^j = w_{k-1}^j, \text{ если } f_{2k}^j = 0$$

Напомним, что конечная цель задачи - отыскание поля направлений: $napr(j, k) = arctg\left(\frac{w_k^j}{u_k^j}\right), u_k^j > 0; napr(j, k) = pi + arctg\left(\frac{w_k^j}{u_k^j}\right), u_k^j < 0; napr(j, k) = \frac{pi}{2}, u_k^j = 0, w_k^j > 0; napr(j, k) = -\frac{pi}{2}, u_k^j = 0, w_k^j < 0$.

Поле направлений озера рис. 2 раскрашено.

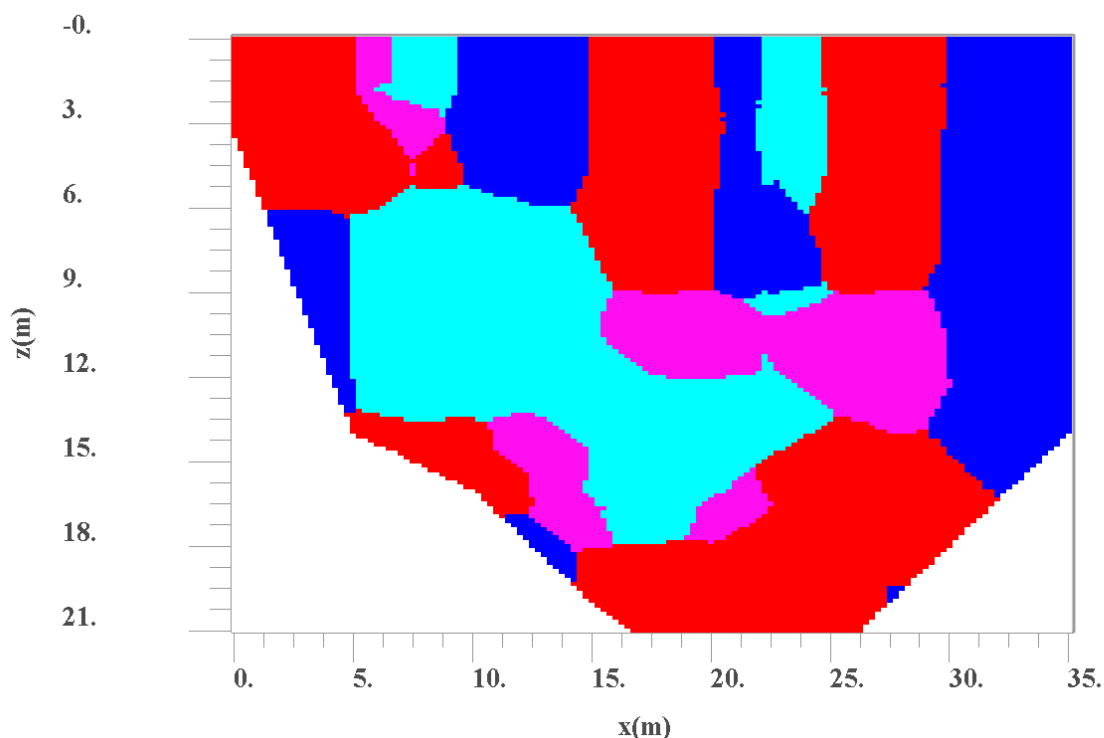


Рис.2 . Поле линий тока. $nx0 = 20, nz0 = nx0, n1 = 7, n2 = 7, ll = nx0/2, lm = nx0$

$$\alpha_{k1}^{j1} = \text{alfa}(j1, k1) = 2 \cdot 10^{-4} \left(\frac{j1 - 1}{n1} \right) \left[\frac{M^2}{c} \right], j1 = 1, \dots, n1 + 1$$

$$q_k^j = 4.5 \cdot 10^{-5} \left(\frac{j-1}{n2 \cdot nz0} \right) \left[\frac{K}{c} \right], j = 1, \dots, n1 * nz + 1$$

Теплые частицы воды, поднимающиеся вверх к поверхности озера с направлением скорости $\left| n_{apr}(j, k) + \frac{p_i}{2} \right| \leq p_i/8$, имеют насыщенно красный цвет. Частицы воды, поднимающиеся менее отвесно к поверхности, имеют светло-красный цвет:

$$\frac{p_i}{2} \geq \left| n_{apr}(j, k) + \frac{p_i}{2} \right| > \frac{p_i}{8}, p_i = 2 \arcsin(1.0)$$

Аналогично, холодные частицы воды, опускающиеся более отвесно, окрашены в темно-синий цвет: $\left| n_{apr}(j, k) - \frac{p_i}{2} \right| \leq p_i/8$. Частицы с более пологим опусканием имеют бирюзовый цвет:

$$\frac{p_i}{2} \geq \left| n_{apr}(j, k) - \frac{p_i}{2} \right| > p_i/8$$

Кроме того, графический модуль программы использует принцип цветового осреднения. А именно, определяется цвет максимального числа элементов, попавших в квадрат со стороной $2 * ll + 1$, который весь программа окрашивает в тот же цвет. В программе использованы параметры: $nx0 = 20, nz0 = nx0, n1 = 7, n2 = 7, ll = nx0/2, lm = nx0$.

Анализ численного решения и выводы

1) Как на рис.1 видны две крупные конвективные струи, выходящие на поверхность озера в точках $x = 15 - 20$ м, $x = 25 - 30$ м, так и на рис.2. $x = 15 - 20$ м, $x = 25 - 30$ м. Области конвективных струй, граничащих со свободной поверхностью на рис.1 и на рис.2 полностью повторяют друг друга. Кроме того, пространственно совпадают деформированные области температурного поля рис.1 с выходом

конвективных струй и поля линий тока рис.2 в нижней части озера. Таким образом, численная схема (18') – (21') правильно описывает поле направлений скорости.

2) Структура раскрашенных областей и их взаимное расположение сохраняется при увеличении числа узлов сетки - чисел n_x0, n_z0 , т.е. существует предел решения с увеличением числа узлов, как требование сходимости численной схемы.

3) Метод медианной фильтрации приводит к релаксации больших по модулю значений горизонтальной компоненты скорости.

4) Потребуем для поля направлений *условие связности конвективной струи*. Это значит, что можно подняться вдоль непрерывной кривой от дна озера до его поверхности исключительно по конвективным красным областям рис.2. Поскольку визуально обнаружены конвективные струи на поверхности озера по выходу газа и бурлению поверхности, а также многократно застывшая сера на датчике температуры, то *условие связности конвективной струи* является вполне естественным. На рис.2 мы видим мощную конвективную струю, поднимающуюся от дна до поверхности $x = 25 - 30$ м. Таким образом, в численной модели (18') – (21') *условие связности конвективной струи* также выполнено.

5) На рис.2 мы видим, что скорость частиц воды в струе $x = 25 - 30$ м направлена отвесно в верхней и нижней у дна части озера. В среднюю часть конвективной струи $z = 15 - 20$ м, вероятно, вовлекается холодный поток воды, изменяющий вертикальное движение частиц воды. Экспериментально обнаружено, что на глубине $z = 13$ м ($x = 35$ м) с максимальным градиентом температуры на рис.1 в озеро попадают холодные пресные воды и втягиваются в струю, двигаясь устойчиво по горячему кислотному раствору в нижней части озера. Именно, эти воды могут стать причиной деления струи на две. Кроме того, глубина опускания холодных вод в правой части озера рис.2 больше, чем в левой части. В левой верхней части рис.2 видна относительно теплая область, свисающая с поверхности, что соответствует устью ручья с температурой воды 40°C , выходящему из озера. Указанные особенности также согласуются с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Некоторые геохимические особенности подводного извержения в кальдере Академии Наук 2-3 января 1996 г. *Карпов Г.А.* Вестник Камчатской региональной организации "Учебно-научный центр". Серия: Науки о Земле. 2004. № 4. С. 81-89.
2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
3. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т. 2: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 728—392 с, ил.
4. А. С. Монин., А. М. Яглом. Статистическая гидромеханика Часть I. М., 1965 г., 640 стр.
5. Алгоритмы. Просто как дважды два / И. В. Красиков, И. Е. Красикова. — М.: Эксмо, 2007. — 256 с.
6. Бартеньев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL.: Ч.2 – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2001.-325 с.
7. Бартеньев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL.: Ч.3 – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2001.-372 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т.6. Гидродинамика. - М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. Лит. 1986.-736 с.
9. Исследование особенностей термического режима геотермального озера открытого типа. *Пастухов Д.Ф.* Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Москва, 1996

10. THE ROLE OF AERATION IN FORMING THE THERMAL REGIME OF A GEOTHERMAL LAKE
Anisimova E.P., Pastukhov D.F., Speranskaya A.A., Speranskaya O.A.
Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics. 1996. T. 32. № 2. C. 268-272.

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ПОИСКЕ БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.

Аннотация: Получены условия быстрой сходимости простой итерации в конечномерной задаче на экстремум для функционалов с третьим порядком гладкости. Приведены формулы необходимого числа итераций для достижения заданной (наибольшей) точности решения и значения функционала в стационарной точке. Во второй теореме выведена разностная итерационная формула, рассматривающая априорно гладкие функционалы, возможно не представимые в виде композиции элементарных функций. Показана эквивалентность порядка точности итерационных формул в обеих теоремах, определена верхняя граница оптимального шага. Приведены программы и примеры, подтверждающие эффективность методов для поиска точек экстремума и точек перевала.

Ключевые слова: Гладкий функционал, строгое диагональное преобладание элементов матрицы Гессе, центральная разность первого порядка, оптимальный шаг итерационной формулы.

About efficient searching for of the unconditional extremum smooth function in certainly measured problem

Pastuhov D.F. , Pastuhov YU.F.

Polockiy state university

The Abstract: are Received condition to quick convergence iteration idle time in certainly measured problem on extremum for function, having third order to smoothness. The Broughted formulas of the necessary number iteration for achievement given most accuracy of the coordinates of the stationary point and importances of the function in stationary point. In the second theorem is received iteration , considering a priori smooth to functions, possible not presented in the manner of compositions elementary function. It Is Shown equivalence of the order to accuracy molded in both theorem, is determined upper border of the optimum step. The Broughted programs and examples, confirming efficiency of the methods for searching for point extremum and point of the mouting pass.

The Keywords: Smooth function, diagonal prevalence of element matrixes Gesse, central first-order difference, optimum step of iteration idle time.

Введение

В данной работе рассматриваются эффективные методы поиска безусловного экстремума гладких функционалов конечного числа переменных.

Градиентные методы поиска экстремума являются более распространёнными в численных методах, так как решение принадлежит широкому классу непрерывно дифференцируемых функций. Однако, градиентные методы не достаточно эффективны с точки зрения точности, практически невозможно получить градиентными методами решение с двойной точностью, на что и указывает В.М. Тихомиров [1,2,3]. Возможно, потому, что итерационные точки ложатся по разные стороны от стационарной точки, в то время как в формуле касательных Ньютона итерации находятся по одну сторону. В данной работе рассматриваются трижды непрерывно дифференцируемые функционалы со строгим диагональным преобладанием матрицы Гессе. При этих условиях можно получить решение с относительной точностью 10^{-16} (двойной точностью double для чисел с плавающей запятой) всего за 60 итераций с начальным удалением от стационарной точки на 100 единиц. Наиболее быстрые итерационные формулы удаётся построить при совмещении матричного метода Ньютона и метода Зейделя [2]. В матричном методе Ньютона нужно вычислить n^2 элементов матрицы Якоби, погрешность дополнительно увеличивается при отыскании обратной матрицы к матрице Якоби:

$x^{m+1} = x^m - (F'(x^m))^{-1} * F(x^m)$, где $(F'(x^m))^{-1}$ - матрица обратная к матрице Якоби. Метод Зейделя использует только диагональные элементы матрицы Якоби, т.е. n элементов. Поэтому при одинаковом числе итераций в формуле Зейделя - Ньютона меньше элементарных операций, чем в матричной формуле Ньютона и, следовательно, ошибка округления.

Отметим, что класс трижды (как и бесконечное число раз) дифференцируемых функций не так уж беден. Например, показательные функции, полиномы произвольной степени нескольких переменных, тригонометрические функции $\sin(x)$, $\cos(x)$ (а, следовательно, любое приближение непрерывной функции конечным числом слагаемых ряда Фурье) являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Определение 1. Среди двух методов, дающих решение задачи с одинаковыми начальными условиями, назовём *более эффективным* метод, обладающий большей точностью. При одинаковой

достигнутой точности решения назовём *более эффективным* метод с меньшим числом элементарных арифметических операций (сложением, вычитанием, умножением, делением).

Постановка задачи

Пусть в R^n задана открытая область $A \subset R^n$, вектор $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in A$. Рассмотрим задачу на безусловный экстремум достаточно гладкого функционала $f: R^n \rightarrow R$, а именно множество функционалов трижды непрерывно дифференцируемых в открытой области A , т.е. имеющих непрерывные частные производные до 3 – го порядка включительно[1].

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr} \\ f(x) \in C^3(A) \end{cases} \quad (1)$$

Для поиска экстремальных точек задачи (1) можно использовать 2 подхода. Первый заключается в прямом исследовании основного функционала, например, градиентными методами. Другой подход заключается в использовании необходимых условий экстремума функции нескольких переменных[1]:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

где $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in A \subset R^n$ - стационарная точка, т.е. решение системы уравнений (2).

Обозначим $x_i^m, i = \overline{1, n}$ координату итерационной точки, у которой нижний индекс i (номер координаты) и с номером итерации $m = 0, 1, 2, \dots$ (верхний индекс). Будем решать систему уравнений (2) **численно** методом простой итерации[2].

Метод Зейделя для системы уравнений заданных в неявном виде:[2]:

$$\begin{cases} F_1(x_1^{m+1}, x_2^m, \dots, x_n^m) = 0, \\ F_2(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_n^m) = 0, \\ \dots \\ F_n(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_{n-1}^{m+1}, x_n^{m+1}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

То есть исходная система (2) сводится к последовательному решению n уравнений системы (3), каждое из которых $F_i(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^m, \dots, x_n^m) = 0, i = \overline{1, n}$ представляет уравнение с одной неизвестной x_i^{m+1} переменной, а все остальные переменные при фиксированной строке остаются “замороженными”, т.е. постоянными. Совмещая явную формулу Зейделя и формулу касательных Ньютона для отыскания i - ой переменной, можно использовать i - ое уравнение с одной неизвестной переменной:

$$\begin{cases} x_1^{m+1} = x_1^m - \frac{F_1(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)}{F'_{1x_1}(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)}, \\ x_2^{m+1} = x_2^m - \frac{F_2(x_1^{m+1}, x_2^m, \dots, x_n^m)}{F'_{2x_2}(x_1^{m+1}, x_2^m, \dots, x_n^m)}, \\ \dots \\ x_i^{m+1} = x_i^m - \frac{F_i(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^m, \dots, x_n^m)}{F'_{ix_i}(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^m, \dots, x_n^m)}, \\ \dots \\ x_n^{m+1} = x_n^m - \frac{F_n(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^{m+1}, \dots, x_{n-1}^{m+1}, x_n^m)}{F'_{nx_n}(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^{m+1}, \dots, x_{n-1}^{m+1}, x_n^m)} \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим вектор (невязку, погрешность) $\delta x^m = (\delta x_1^m, \delta x_2^m, \dots, \delta x_n^m) = (x_1^m - \bar{x}_1, x_2^m - \bar{x}_2, \dots, x_n^m - \bar{x}_n)$ - разность между итерационной точкой x^m на

шаге итерации с номером m и стационарной точкой \bar{x} , аналогично:

$\delta x^{m+1} = (\delta x_1^{m+1}, \delta x_2^{m+1}, \dots, \delta x_n^{m+1}) = (x_1^{m+1} - \bar{x}_1, x_2^{m+1} - \bar{x}_2, \dots, x_n^{m+1} - \bar{x}_n)$ невязка итерации на шаге итерации с номером $m+1$.

Пусть система итерационных уравнений (4) имеет предельную точку \bar{x} , в силу (2) и (4), получим:

$$\begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} x_1^{m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_1^m = \bar{x}_1 \Leftrightarrow f'_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} x_n^{m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_n^m = \bar{x}_n \Leftrightarrow f'_{x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0 \\ f''_{x_i x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \neq 0, i = \bar{1}, n \end{cases} \quad (5)$$

Вычтем из правой и из левой части (4) каждого i -го уравнения \bar{x}_i , $\delta x_i^{m+1} = x_i^{m+1} - \bar{x}_i$, $\delta x_i^m = x_i^m - \bar{x}_i$. Кроме того, аргументы частных производных f'_{x_i} , $f''_{x_i x_i}$ с порядками m и $m+1$ выразим через невязки δx_k^m , δx_k^{m+1} :

$$\begin{cases} x_k^{m+1} = \bar{x}_k + \delta x_k^{m+1}, x_k^m = \bar{x}_k + \delta x_k^m, k = \bar{1}, n \\ \delta x_1^{m+1} = \delta x_1^m - \frac{f'_{x_1}(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)}{f''_{x_1 x_1}(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)}, \\ \delta x_2^{m+1} = \delta x_2^m - \frac{f'_{x_2}(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)}{f''_{x_2 x_2}(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)}, \\ \dots \\ \delta x_i^{m+1} = \delta x_i^m - \frac{f'_{x_i}(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \bar{x}_2 + \delta x_2^{m+1}, \dots, \bar{x}_{i-1} + \delta x_{i-1}^{m+1}, \bar{x}_i + \delta x_i^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)}{f''_{x_i x_i}(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \bar{x}_2 + \delta x_2^{m+1}, \dots, \bar{x}_{i-1} + \delta x_{i-1}^{m+1}, \bar{x}_i + \delta x_i^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)}, \\ \dots \\ \delta x_n^{m+1} = \delta x_n^m - \frac{f'_{x_n}(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \bar{x}_2 + \delta x_2^{m+1}, \dots, \bar{x}_{n-1} + \delta x_{n-1}^{m+1}, \bar{x}_n + \delta x_n^m)}{f''_{x_n x_n}(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \bar{x}_2 + \delta x_2^{m+1}, \dots, \bar{x}_{n-1} + \delta x_{n-1}^{m+1}, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} \end{cases} \quad (6)$$

Система итерационных последовательностей (4) сходится к стационарной точке \bar{x} если и только если невязки в системе итерационных уравнений (6) сходятся к нулю $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta x_i^{m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \delta x_i^m = 0, i = \bar{1}, n$. То есть системы уравнений (4) и (6) эквивалентны.

Определение 2. Говорят [2], что числовая итерационная последовательность x^{m+1} сходится к предельной

точке \bar{x} с порядком скорости p , если $\exists C, p > 0: \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{p > 0} \frac{|\delta x^{m+1}|}{|\delta x^m|^p} \leq C \right)$.

Сходимость метода

Теорема 1. (условия сходимости итерации (6)).

Пусть открытая область $A \subset R^n$ содержит начальную итерацию $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in A$ и стационарную точку $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in A$ (решение системы уравнений (2)). Функция $f: R^n \rightarrow R$ конечного числа n переменных:

1) Трижды непрерывно дифференцируема $f(x) \in C^3(A)$

2) Пусть матрица вторых частных производных (матрица Гессе) с элементами $H_{i,j} = f''_{x_i x_j}(x)$

обладает строгим диагональным преобладанием:

$$|f''_{x_i x_i}(x)| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |f''_{x_i x_j}(x)|, \forall i = \bar{1}, n, \forall x \in A$$

Обозначим $q_i = \sup_{x \in A} \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |f''_{x_i x_j}(x)|}{|f''_{x_i x_i}(x)|} < 1, i = \overline{1, n}$ в силу диагонального преобладания

Обозначим $q = \max_{i=1, n} q_i < 1$

Тогда система уравнений (6) сходится к единственной стационарной точке(5), по крайней мере, с первым порядком скорости ($C = q, p = 1$) и имеет место оценка погрешности после m итераций:

$$|\delta x^m| = |x^m - \bar{x}| \leq \frac{(1+q)|\delta x^0| q^m}{1-q} \leq \frac{(1+q)q^m}{(1-q)^2} l_0, \quad \text{где } l_0 = |x^1 - x^0| - \text{ расстояние между}$$

начальными итерациями $x^0, x^1, \delta x^0 = (x_1^0 - \bar{x}_1, x_2^0 - \bar{x}_2, \dots, x_n^0 - \bar{x}_n)$.

Доказательство проведём по индукции (достаточность).

Разложим последовательно первую частную производную

$f'_{x_i}(x_1 + \delta x_1^{m+1}, x_2 + \delta x_2^{m+1}, \dots, x_{i-1} + \delta x_{i-1}^{m+1}, x_i + \delta x_i^m, \dots, x_n + \delta x_n^m), i = \overline{1, n}$, входящую в каждое уравнение системы (6) в ряд Тейлора с центром в стационарной точке, для первого уравнения имеем:

1) $i = 1$:

$$f'_{x_1}(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m) = f'_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{j=1}^n f''_{x_1 x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m + O(|\delta x^m|^2) = \sum_{j=1}^n f''_{x_1 x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m + O(|\delta x^m|^2) \text{ в силу}$$

$$\text{формулы (5). Где } |\delta x^m| = \max_{j=1, n} |\delta x_j^m|, |\delta x_j^m| \leq |\delta x^m|, \forall j = \overline{1, n}, \forall m = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

В силу условий (5),(6),(7) и условия 1) теоремы преобразуем, дробь в правой части первого уравнения (6)

$$\begin{aligned} \delta x_1^{m+1} &= \delta x_1^m - \frac{f'_{x_1}(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)}{f''_{x_1 x_1}(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} = \delta x_1^m - \frac{f'_{x_1}(\bar{x}) + \sum_{j=1}^n f''_{x_1 x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m + O(|\delta x^m|^2)}{f''_{x_1 x_1}(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} = \\ &= \delta x_1^m - \frac{\sum_{j=1}^n f''_{x_1 x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m + O(|\delta x^m|^2)}{f''_{x_1 x_1}(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} = \delta x_1^m - \frac{\delta x_1^m}{\frac{f''_{x_1 x_1}(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)}{f''_{x_1 x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}} \end{aligned}$$

(В силу условия 1) теоремы) $f(x) \in C^3(A)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\sum_{j=2}^n f''_{x_1 x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m}{f''_{x_1 x_1}(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} + O(|\delta x^m|^2) = \delta x_1^m - \frac{\delta x_1^m}{1 + \frac{\sum_{j=1}^n f''_{x_1 x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m}{f''_{x_1 x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}} + O(|\delta x^m|^2) - \\ &= \delta x_1^m - \delta x_1^m - \frac{\sum_{j=2}^n f''_{x_1 x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m}{f''_{x_1 x_1}(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} + O(|\delta x^m|^2) \\ &\delta x_1^{m+1} = - \frac{\sum_{j=2}^n f''_{x_1 x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m}{f''_{x_1 x_1}(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} + O(|\delta x^m|^2). \end{aligned}$$

Оценим последнее выражение по модулю (в следующей оценке использовано неравенство треугольника для модуля суммы величин и неравенство (7)):

$$|\delta x_1^{m+1}| \leq \frac{\sum_{j=2}^n |f_{x_i x_j}''(\bar{x})| |\delta x_j^m|}{|f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)|} + O(|\delta x^m|^2) \leq \frac{|\delta x^m| \sum_{j=2}^n |f_{x_i x_j}''(\bar{x})|}{|f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)|} + O(|\delta x^m|^2)$$

Используя условие 2) теоремы 1:

$$|f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |f_{x_i x_j}''(\bar{x})| = \sum_{j=2}^n |f_{x_i x_j}''(\bar{x})| \forall x \in A,$$

$$|\delta x_1^{m+1}| \leq |\delta x^m| q_1 + O(|\delta x^m|^2) \leq |\delta x^m| q + O(|\delta x^m|^2) < |\delta x^m| + O(|\delta x^m|^2) \quad (8)$$

3) Используя разложение в ряд Тейлора, преобразуем произвольное i -е уравнение системы (6) в окрестности стационарной точки.

По индукции предположим выполнение неравенств $|\delta x_k^{m+1}| \leq |\delta x^m|, k = \overline{1, i-1}$, тогда повторяя преобразование с i -м уравнением системы:

$$\begin{aligned} f_{x_i}'(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_i^m, \dots, x_n^m) &= f_{x_i}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{j=1}^{i-1} f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i}^n f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^m + O(|\delta x^m|^2) = \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i}^n f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^m + O(|\delta x^m|^2) \\ \delta x_i^{m+1} - \delta x_i^m &= - \frac{f_{x_i}'(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \dots, \bar{x}_{i-1} + \delta x_{i-1}^{m+1}, \bar{x}_i + \delta x_i^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)}{f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \dots, \bar{x}_{i-1} + \delta x_{i-1}^{m+1}, \bar{x}_i + \delta x_i^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{i-1} f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i}^n f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^m + O(|\delta x^m|^2)}{f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \dots, \bar{x}_{i-1} + \delta x_{i-1}^{m+1}, \bar{x}_i + \delta x_i^m, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} = - \frac{\delta x_i^m}{f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} - \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{i-1} f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^n f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^m}{f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} + O(|\delta x^m|^2) = - \frac{\delta x_i^m}{1 + \frac{\sum_{j=1}^{i-1} f_{x_i x_j}^{(3)}(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i}^n f_{x_i x_j}^{(3)}(\bar{x}) \delta x_j^m}{f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}} + O(|\delta x^m|^2) - \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{i-1} f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^n f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^m}{f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} = - \delta x_i^m - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^n f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^m}{f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} + O(|\delta x^m|^2) \end{aligned}$$

Сокращая промежуточные записи, получим:

$$\begin{aligned} \delta x_i^{m+1} - \delta x_i^m &= - \delta x_i^m - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^n f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^m}{f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} + O(|\delta x^m|^2), \text{ или:} \\ \delta x_i^{m+1} &= - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^n f_{x_i x_j}''(\bar{x}) \delta x_j^m}{f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)} + O(|\delta x^m|^2) \quad (9) \end{aligned}$$

Учитывая индуктивное предположение $|\delta x_k^{m+1}| \leq |\delta x^m|, k = \overline{1, i-1}$, получим:

$$|\delta x_i^{m+1}| \leq \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |f_{x_i x_j}''(\bar{x})| |\delta x_j^{m+1}| + \sum_{j=i+1}^n |f_{x_i x_j}''(\bar{x})| |\delta x_j^m|}{|f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)|} + O(|\delta x^m|^2) \leq \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |f_{x_i x_j}''(\bar{x})| |\delta x_j^m|}{|f_{x_i x_i}''(\bar{x}_1 + \delta x_1^{m+1}, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n^m)|} + O(|\delta x^m|^2)$$

$$|\delta x_i^{m+1}| \leq |\delta x^m| q_i \leq |\delta x^m| q < |\delta x^m| \quad (10)$$

Индуктивно доказано, что $|\delta x_k^{m+1}| \leq |\delta x^m| q < |\delta x^m|$ при $k = i$, поэтому в силу доказанного по индукции верно

$$|\delta x_k^{m+1}| \leq |\delta x^m| q < |\delta x^m|, \quad \forall k = \overline{1, n}, \text{ следовательно, } |\delta x^{m+1}| = \max_{k=1, n} |\delta x_k^{m+1}| \leq |\delta x^m| q < |\delta x^m|.$$

Таким образом, сходимость систем итераций (4) и (6) при выполнении условий теоремы доказана. Оценим погрешность метода.

$$\text{Пусть } |\delta x^{m+1}| \leq |\delta x^m| q \leq |\delta x^{m-1}| q^2 \leq \dots \leq |\delta x^1| q^m \leq |\delta x^0| q^{m+1} \rightarrow 0, \quad (11)$$

где $|\delta x^0| = \max_{i=1, n} |\delta x_i^0| = \max_{i=1, n} |x_i^0 - \bar{x}_i|$ начальное приближение стационарной точки, начальная точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in A$. Первый порядок скорости сходимости следует из формулы (11) и определения 2 ($C = q, p = 1$).

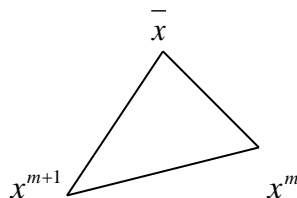


Рис.1

На практике известны не величины $|\delta x^{m+1}|$ и $|\delta x^m|$, а расстояния между последовательными итерациями x^m, x^{m+1} (рис.1). Из неравенства треугольника получим:

$$|\delta x^m| = |x^{m+1} - x^m| = |x^{m+1} - \bar{x} - (x^m - \bar{x})| = |\delta x^{m+1} - \delta x^m| \leq |\delta x^m| + |\delta x^{m+1}| \leq (1+q)|\delta x^m|,$$

учитывая доказанное неравенство $|\delta x^{m+1}| \leq q|\delta x^m|$ и используя неравенство треугольника, получим после m итераций:

$$\begin{aligned} |x^m - \bar{x}| &\leq |x^m - x^{m+1}| + |x^{m+1} - x^{m+2}| + |x^{m+2} - x^{m+3}| + \dots + |x^{m+n} - x^{m+n+1}| + |x^{m+n+1} - x^{m+n}| + \dots = \\ &= \sum_{i=m}^{\infty} |x^{i+1} - x^i| \leq (1+q)|\delta x^m| + (1+q)|\delta x^{m+1}| + (1+q)|\delta x^{m+2}| + \dots = (1+q)(|\delta x^m| + |\delta x^{m+1}| + |\delta x^{m+2}| + \dots) \leq \\ &\leq (1+q)|\delta x^0| q^m \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{(1+q)|\delta x^0| q^m}{1-q}. \end{aligned}$$

Поскольку $|\delta x^1| \leq q|\delta x^0|$, запишем неравенство треугольника с избытком и с недостатком, получим:

$$(1-q)|\delta x^0| = |\delta x^0| - |\delta x^1| \leq l_0 = |x^1 - x^0| \leq |\delta x^0| + |\delta x^1| = (1+q)|\delta x^0|.$$

Окончательно оценка погрешности (невязки) имеет вид:

$$|\delta x^m| = |x^m - \bar{x}| \leq \frac{(1+q)|\delta x^0| q^m}{1-q} \leq \frac{(1+q)q^m}{(1-q)^2} l_0. \quad (12)$$

Замечание 1 (необходимость). Условие 2) - строгого диагонального преобладания матрицы Гессе является также и необходимым условием сходимости. Достаточно привести 1 пример с условием $q > 1$, в котором итерация (6) расходится:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 x_2, f_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2, f_{x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 + 3x_1. \quad \text{Стационарная точка } (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0). \\ f_{x_1 x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f_{x_2 x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 2, f_{x_1 x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f_{x_2 x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 3, q = \frac{3}{2} > 1.$$

Согласно(9):

$$\begin{cases} \delta x_1^{m+1} = -\frac{f_{x_1 x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \delta x_2^m}{f_{x_1 x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_2 + \delta x_2^m)} + O(|\delta x^m|^2) = -\frac{3}{2} \delta x_2^m \\ \delta x_2^{m+1} = -\frac{f_{x_2 x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \delta x_1^m}{f_{x_2 x_2}(\bar{x}_1 + \delta x_1^m, \bar{x}_2 + \delta x_2^m)} + O(|\delta x^m|^2) = -\frac{3}{2} \delta x_1^m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta x_1^{m+1} = \frac{9}{4} \delta x_1^{m-1} + O(|\delta x^m|^2) \\ \delta x_2^{m+1} = \frac{9}{4} \delta x_2^{m-1} + O(|\delta x^m|^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\delta x_1^{m+1}| = \frac{9}{4} |\delta x_1^{m-1}| + O(|\delta x^m|^2) \\ |\delta x_2^{m+1}| = \frac{9}{4} |\delta x_2^{m-1}| + O(|\delta x^m|^2) \end{cases}, m = 2, 4, 6, \dots \quad \begin{cases} |\delta x_1^m| = \frac{9}{4} |\delta x_1^{m-2}| + O(|\delta x^{m-1}|^2) \\ |\delta x_2^m| = \frac{9}{4} |\delta x_2^{m-2}| + O(|\delta x^{m-1}|^2) \end{cases}, m = 2, 4, 6, \dots$$

Откуда видно, что во всех чётных и нечётных итерациях невязка растёт, а итерационная точка удаляется от стационарной точки.

Замечание 2. Формула (9) выполняется локально, т.е. условия Т.1 должны выполняться обязательно в окрестности стационарной точки. Так как условия Т.1 выполняются абсолютно во всей области $A \subset R^n$, то они выполнены и локально в точке $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in A$.

Замечание 3. Если итерация для невязки задаётся формулой $\delta x^{m+1} = A \delta x^m$ - аналогом формулы (9), где A линейный оператор, и A - сжимающее отображение, т.е. $|\delta x^{m+1}| \leq q |\delta x^m| < |\delta x^m|$ (что обеспечивается условиями 2) Т.1), то по теореме о неподвижной точке в метрических пространствах[4] сжимающее отображение имеет единственное решение. Таким образом, единственность и существование решения итерации(6) доказана.

Замечание 4. Сходимость (6) выполняется при разных значениях $q_i < 1, i = \bar{1}, n$. Если по всем переменным $i = \bar{1}, n$ в итерации (6) недиагональные элементы матрицы Гесса $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \equiv 0, j, i = \bar{1}, n, j \neq i$. В этом

случае скорость сходимости (6) не линейная, а квадратичная.

Замечание 5. Отметим, что с помощью первой и второй теорем можно находить не только минимумы и максимумы, но и другие стационарные точки, в том числе и седловые точки в матричных играх. Например, $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2, (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$.

В качестве примера задачи на экстремум, решённой численно, рассмотрим[1]:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + x_1 - 2x_3 \rightarrow extr.$$

Запишем градиент и матрицу Гессе для функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + 1, 2x_2 - x_1, 2x_3 - 2).$$

$$H_{i,j}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}. \text{ Условия теоремы 1 выполнены:}$$

$$|H_{1,1}| = 2 > |H_{1,2}| + |H_{1,3}| = 1 + 0 = 1, q_1 = \frac{1}{2} < 1$$

$$|H_{2,2}| = 2 > |H_{2,1}| + |H_{2,3}| = 1 + 0 = 1, q_2 = \frac{1}{2} < 1,$$

$$|H_{3,3}| = 2 > |H_{3,1}| + |H_{3,2}| = 0 + 0 = 0. q_3 = 0 < 1, q = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\} = \frac{1}{2}.$$

Запишем итерацию по формуле (6):

$$\begin{cases} x_1^{m+1} = x_1^m - \frac{(2x_1^m - x_2^m + 1)}{2}, \\ x_2^{m+1} = x_2^m - \frac{(2x_2^m - x_1^{m+1})}{2} \\ x_3^{m+1} = x_3^m - \frac{2x_3^m - 2}{2} = 1 \end{cases}$$

Из (12) необходимое число итераций $N \geq \frac{\ln\left(\frac{|\delta x^m|}{|\delta x^0|} \left(\frac{1-q}{1+q}\right)\right)}{\ln q} = \frac{\ln\left(\frac{|\delta x^0|}{|\delta x^m|} \left(\frac{1+q}{1-q}\right)\right)}{\ln 1/q}$ (13)

$$N \geq \frac{\ln\left(\frac{|\delta x^m|}{l_0} \left(\frac{(1-q)^2}{1+q}\right)\right)}{\ln q} = \frac{\ln\left(\frac{l_0}{|\delta x^m|} \left(\frac{1+q}{(1-q)^2}\right)\right)}{\ln 1/q}$$
 (14)

Выберем $|\delta x^m| = 10^{-15}$, $|\delta x^0| = 10^2$, получим необходимое число $N = \frac{\ln(10^{17} * 3)}{\ln 2} = 58$ итераций.

Составим на языке C программу:

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
double fx1(double x1,double x2, double x3);
double fx2(double x1,double x2, double x3);
double fx3(double x1, double x2, double x3);
double fxx1(double x1, double x2, double x3);
double fxx2(double x1,double x2, double x3);
double fxx3(double x1, double x2, double x3);
int main()
{
    int n,i;
    double x1,x2,x3;
        n=60;
        x1=-100.0;
        x2=100.0;
        x3=100.0;
        for(i=1;i<=n ;i++)
        {
            x1=x1-fx1(x1,x2,x3)/fxx1(x1,x2,x3);
            x2=x2-fx2(x1,x2,x3)/fxx2(x1,x2,x3);
            x3=x3-fx3(x1,x2,x3)/fxx3(x1,x2,x3);
        }
    printf("x1=%16lf,x2=%16lf,x3=%16lf,extr=%16lf\n",x1,x2,x3,x1*x1+x2*x2+x3*x3-x1*x2+x1-2.0*x3);
}
double fx1(double x1,double x2,double x3)
{
    return 2.0*x1-x2+1.0;
}
double fx2(double x1,double x2, double x3)
{
    return 2.0*x2-x1;
}
double fx3(double x1,double x2,double x3)
{
    return 2.0*x3-2.0;
}
double fxx1(double x1, double x2, double x3)
{
    return 2.0;
}
}
```

```

double fxx2(double x1,double x2,double x3)
{
    return 2.0;
}
double fxx3(double x1,double x2,double x3)
{
    return 2.0;
}

```

Программа возвращает решение задачи и значение функционала:

$$x_1 = -0.6666666666666666, x_2 = 0.3333333333333333, x_3 = 1.0000000000000000$$

$extr = -1.3333333333333330$. Матрица Гессе положительно определена и, следовательно, точке $\bar{x} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$ локальный минимум функции.

$$\text{Точное решение есть: } \bar{x}_1 = -\frac{2}{3}, \bar{x}_2 = \frac{1}{3}, \bar{x}_3 = 1, f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = -\frac{4}{3}.$$

Рассмотрим разностную формулу, полученную из (6), в которой первая производная заменена центральной разностью с шагом $h/2$:

Теорема 2. Пусть выполнено условие строгого диагонального преобладания матрицы Гессе (как и в первой теореме), а функционал $f(x) \in C^6(A)$ имеет гладкость не хуже шестого порядка. Тогда итерационные формулы (6) и (16) сравнимы по точности со вторым порядком $O(h^2) = O(|\delta x^m|^2)$, т.е. итерационная последовательность точек сходится к единственной стационарной точке. Оценка верхней границы для оптимального шага h_i^m определяется формулами:

$$h_i^{upper} = \min \left\{ \sqrt{\frac{12|f_{x_i}''(\bar{x})|}{|f_{x_i}^{(4)}(\bar{x})|}}, \sqrt{\frac{240f_{x_i}^{(3)}(\bar{x})f_{x_i}''(\bar{x})}{20f_{x_i}^{(3)}(\bar{x})f_{x_i}^{(4)}(\bar{x}) - 3f_{x_i}^{(5)}(\bar{x})f_{x_i}''(\bar{x})}} \right\}$$

Доказательство:

Разложим в ряд Тейлора числитель и знаменатель формул (6), обозначим $x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m)$:

$$f\left(x_1^m, \dots, x_i^m \pm \frac{h}{2}, \dots, x_n^m\right) = f(x^m) \pm \frac{h}{2} f_{x_i}'(x^m) + \frac{h^2}{8} f_{x_i}''(x^m) \pm \frac{h^3}{48} f_{x_i}^{(3)}(x^m) + \frac{h^4}{384} f_{x_i}^{(4)}(x^m) \pm \frac{h^5}{3840} f_{x_i}^{(5)}(x^m)$$

$$\frac{f\left(x_1^m, \dots, x_i^m + \frac{h}{2}, \dots, x_n^m\right) - f\left(x_1^m, \dots, x_i^m - \frac{h}{2}, \dots, x_n^m\right)}{h} = f_{x_i}'(x^m) + \frac{h^2}{24} f_{x_i}^{(3)}(x^m) + \frac{h^4}{1920} f_{x_i}^{(5)}(x^m) + O(h^6)$$

$$\begin{aligned}
& f(x_1^m, \dots, x_i^m \pm h, \dots, x_n^m) = f(x^m) \pm hf'_{x_i}(x^m) + \frac{h^2}{2} f''_{x_i}(x^m) \pm \frac{h^3}{6} f^{(3)}_{x_i}(x^m) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}_{x_i}(x^m) \pm \frac{h^5}{120} f^{(5)}_{x_i}(x^m) + \frac{h^6}{720} f^{(6)}_{x_i}(x^m) \\
& \frac{f(x_1^m, \dots, x_i^m + h, \dots, x_n^m) + f(x_1^m, \dots, x_i^m - h, \dots, x_n^m) - 2f(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)}{h^2} = f''_{x_i}(x^m) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}_{x_i}(x^m) + \frac{h^4}{360} f^{(6)}_{x_i}(x^m) + O(h^6)
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& x_1^{m+1} = x_1^m - \frac{\frac{f\left(x_1^m + \frac{h}{2}, x_2^m, \dots, x_n^m\right) - f\left(x_1^m - \frac{h}{2}, x_2^m, \dots, x_n^m\right)}{h} + O(h^2)}{\frac{f(x_1^m + h, x_2^m, \dots, x_n^m) + f(x_1^m - h, x_2^m, \dots, x_n^m) - 2f(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)}{h^2} + O(h^2)}, \\
& \dots \\
& x_i^{m+1} = x_i^m - \frac{\frac{f\left(x_1^m, \dots, x_i^m + \frac{h}{2}, \dots, x_n^m\right) - f\left(x_1^m, \dots, x_i^m - \frac{h}{2}, \dots, x_n^m\right)}{h} + O(h^2)}{\frac{f(x_1^m, \dots, x_i^m + h, \dots, x_n^m) + f(x_1^m, \dots, x_i^m - h, \dots, x_n^m) - 2f(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)}{h^2} + O(h^2)}, \\
& \dots \\
& x_n^{m+1} = x_n^m - \frac{\frac{f\left(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m - \frac{h}{2}\right)}{h} + O(h^2)}{\frac{f(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m + h) + f(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m - h) - 2f(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)}{h^2} + O(h^2)}
\end{aligned} \right. \quad (15)$$

Откуда видно, что (6) отличается от (15) с точностью $O(h^2)$. Заменим h на $|x_i^{m+1} - x_i^m| = h_i^m$, где h_i^m - абсолютная разность i -ой координаты между соседними итерациями с номерами $m, m+1$.

Но $|\delta x_i^m|(1-q) = |\delta x_i^m| - |\delta x_i^{m+1}| \leq |x_i^{m+1} - x_i^m| \leq |\delta x_i^m| + |\delta x_i^{m+1}| = |\delta x_i^m|(1+q)$

$$\frac{h_i^m}{(1+q)} = \frac{|x_i^{m+1} - x_i^m|}{(1+q)} \leq |\delta x_i^m| \leq \frac{|x_i^{m+1} - x_i^m|}{(1-q)} = \frac{h_i^m}{(1-q)}, \quad (1-q)|\delta x_i^m| \leq h_i^m \leq (1+q)|\delta x_i^m|.$$

По определению символики “ O ”большое (Б. П. Демидович - Сборник задач и упражнений по математическому анализу):

Запись $\varphi(x) = O(\psi(x))$ при $x \in X$ означает, что существует постоянная $A > 0$ такая, что:

$$|\varphi(x)| \leq A|\psi(x)| \text{ для } x \in X.$$

Для дискретного варианта задания функции аналогично мы можем записать:

$\varphi_m = O(\psi_m)$ при $m = 0, 1, 2, \dots$, если существует постоянная A , что

$$|\varphi_m| \leq A|\psi_m| \text{ для } m = 0, 1, 2, \dots$$

Поскольку для величин h_i и δx_i раньше получено неравенство $0 \leq h_i^m \leq (1+q)|\delta x_i^m|$, т.е. существует постоянная $A = 1+q$, такая что: $h_i^m \leq A|\delta x_i^m|, \forall m = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$h_i = O(\delta x_i), i = \overline{1, n}.$$

С другой стороны, $|\delta x_i^m| \leq \frac{h_i^m}{1-q}, \forall m = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $\delta x_i = O(h_i), i = \overline{1, n}$ с постоянной

$$A = \frac{1}{1-q}.$$

$$\text{Имеем } O(h_i^2) = O(O(\delta x_i) * O(\delta x_i)) = O(O(\delta x_i^2)) = O(\delta x_i^2)$$

Мы использовали 2 известных свойства символики O большое:

$$O(x^n) O(x^m) = O(x^{n+m}); O(O(f(x))) = O(f(x))$$

Аналогично, получаем, что $O(\delta x_i^2) = O(O(h_i) * O(h_i)) = O(O(h_i^2)) = O(h_i^2)$.

Поэтому для любого $m = 0, 1, 2, \dots$ $O((h_i^m)^2) = O(|\delta x_i^m|^2)$ и системы уравнений (6) и (15) справедливы

одновременно со вторым порядком точности. Если в теореме 2 выполнены условия теоремы 1, то существует единственное решение итерации (15), сходящееся к решению системы (2), число итераций определяется, по – прежнему, формулами (13), (14). **Теорема 2** доказана.

Кроме того, систему уравнений (15) удобнее преобразовать к форме (16). На первый взгляд, формулы (16) от шага h_i^m не зависят. Действительно, числитель и знаменатель дроби прямо пропорциональны в первом приближении $(h_i^m)^2$ и сокращаются на $(h_i^m)^2$. Поэтому для поиска оптимального шага с лучшей точностью чем $O(h_i^m)^2$ нужно учесть члены более высокого порядка.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{m+1} = x_1^m - h_1^m \frac{f\left(x_1^m + \frac{h_1^m}{2}, x_2^m, \dots, x_n^m\right) - f\left(x_1^m - \frac{h_1^m}{2}, x_2^m, \dots, x_n^m\right)}{f\left(x_1^m + h_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m\right) + f\left(x_1^m - h_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m\right) - 2f\left(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m\right)} + O\left(\left(h_1^m\right)^2\right) \\ \dots \\ x_i^{m+1} = x_i^m - h_i^m \frac{f\left(x_1^m, \dots, x_i^m + \frac{h_i^m}{2}, \dots, x_n^m\right) - f\left(x_1^m, \dots, x_i^m - \frac{h_i^m}{2}, \dots, x_n^m\right)}{f\left(x_1^m, \dots, x_i^m + h_i^m, \dots, x_n^m\right) + f\left(x_1^m, \dots, x_i^m - h_i^m, \dots, x_n^m\right) - 2f\left(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m\right)} + O\left(\left(h_i^m\right)^2\right) \\ \dots \\ x_n^{m+1} = x_n^m - h_n^m \frac{f\left(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m + \frac{h_n^m}{2}\right) - f\left(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m - \frac{h_n^m}{2}\right)}{f\left(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m + h_n^m\right) + f\left(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m - h_n^m\right) - 2f\left(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m\right)} + O\left(\left(h_n^m\right)^2\right) \end{array} \right. \quad (16)$$

Получим, преобразуя i - е уравнение (16):

$$\begin{aligned} x_i^{m+1} &= x_i^m - h_i^m \frac{f\left(x_1^m, \dots, x_i^m + \frac{h_i^m}{2}, \dots, x_n^m\right) - f\left(x_1^m, \dots, x_i^m - \frac{h_i^m}{2}, \dots, x_n^m\right)}{f\left(x_1^m, \dots, x_i^m + h_i^m, \dots, x_n^m\right) + f\left(x_1^m, \dots, x_i^m - h_i^m, \dots, x_n^m\right) - 2f\left(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m\right)} = \\ &= x_i^m - \frac{f'_{x_i}(x^m) + \frac{(h_i^m)^2}{24} f_{x_i}^{(3)}(x^m) + \frac{(h_i^m)^4}{1920} f_{x_i}^{(5)}(x^m) + O\left(\left(h_i^m\right)^6\right)}{f''_{x_i}(x^m) + \frac{(h_i^m)^2}{12} f_{x_i}^{(4)}(x^m) + \frac{(h_i^m)^4}{360} f_{x_i}^{(6)}(x^m) + O\left(\left(h_i^m\right)^6\right)} = x_i^m - \frac{f'_{x_i}(x^m)}{f''_{x_i}(x^m)} \left(1 + \frac{(h_i^m)^2}{24} \frac{f_{x_i}^{(3)}(x^m)}{f'_{x_i}(x^m)} + \frac{(h_i^m)^4}{1920} \frac{f_{x_i}^{(5)}(x^m)}{f'_{x_i}(x^m)} + O\left(\left(h_i^m\right)^6\right) \right) * \\ &\left(1 - \frac{(h_i^m)^2}{12} \frac{f_{x_i}^{(4)}(x^m)}{f''_{x_i}(x^m)} - \frac{(h_i^m)^4}{360} \frac{f_{x_i}^{(6)}(x^m)}{f''_{x_i}(x^m)} + \left(\frac{(h_i^m)^2}{12} \frac{f_{x_i}^{(4)}(x^m)}{f''_{x_i}(x^m)} \right)^2 + O\left(\left(h_i^m\right)^6\right) \right) = x_i^m - \frac{f'_{x_i}(x^m)}{f''_{x_i}(x^m)} \left(1 + \frac{(h_i^m)^2}{24} \left(\frac{f_{x_i}^{(3)}(x^m)}{f'_{x_i}(x^m)} - \frac{2f_{x_i}^{(4)}(x^m)}{f''_{x_i}(x^m)} \right) \right) + \\ &+ \left(h_i^m\right)^4 \left(\frac{1}{144} \left(\frac{f_{x_i}^{(4)}(x^m)}{f''_{x_i}(x^m)} \right)^2 + \frac{f_{x_i}^{(5)}(x^m)}{1920 f'_{x_i}(x^m)} - \frac{f_{x_i}^{(6)}(x^m)}{360 f''_{x_i}(x^m)} - \frac{f_{x_i}^{(3)}(x^m)}{288 f'_{x_i}(x^m)} \frac{f_{x_i}^{(4)}(x^m)}{f''_{x_i}(x^m)} \right) + O\left(\left(h_i^m\right)^6\right) \right), i = \overline{1, n} \quad (17) \end{aligned}$$

В последнем разложении используется формула $\frac{1}{1+\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k$ и для её применимости достаточно

$$|\alpha| < 1, \text{ где } |\alpha| = \frac{1}{|f''_{x_i}(x^m)|} \left| \frac{(h_i^m)^2}{12} f_{x_i}^{(4)}(x^m) + \frac{(h_i^m)^4}{360} f_{x_i}^{(6)}(x^m) \right| \quad (18)$$

$$\frac{1}{|f''_{x_i}(x^m)|} \left| \frac{(h_i^m)^2}{12} f_{x_i}^{(4)}(x^m) + \frac{(h_i^m)^4}{360} f_{x_i}^{(6)}(x^m) \right| \leq \frac{1}{|f''_{x_i}(x^m)|} \frac{(h_i^m)^2}{12} |f_{x_i}^{(4)}(x^m)| + \frac{1}{|f''_{x_i}(x^m)|} \frac{(h_i^m)^4}{360} |f_{x_i}^{(6)}(x^m)| < 1$$

Обозначим $A = \frac{|f_{x_i}^{(4)}(x^m)|}{12|f''_{x_i}(x^m)|} \geq 0, B = \frac{|f_{x_i}^{(6)}(x^m)|}{360|f''_{x_i}(x^m)|} \geq 0, y = (h_i^m)^2$, последнее неравенство перейдёт в

$$Ay + By^2 - 1 < 0, y \geq 0, \text{ решая два неравенства, оценим приближённо верхнюю границу шага итерации}$$

$$0 \leq y < \frac{-A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2B} = \frac{4B}{2B(\sqrt{A^2 + 4B} + A)} = \frac{2}{\sqrt{A^2 + 4B} + A} \leq \frac{2}{2A} = \frac{1}{A} = \frac{12|f''_{x_i}(x^m)|}{|f_{x_i}^{(4)}(x^m)|} \quad (19)$$

Чтобы формула(17) имела точность $O((h_i^m)^6)$ необходимо:

$$(h_i^m)^2 = \frac{\frac{f_{x_i}^{(3)}(x^m)}{f'_{x_i}(x^m)} - \frac{2f_{x_i}^{(4)}(x^m)}{f''_{x_i}(x^m)}}{-\frac{1}{6} \left(\frac{f_{x_i}^{(4)}(x^m)}{f''_{x_i}(x^m)} \right)^2 - \frac{f_{x_i}^{(5)}(x^m)}{80f'_{x_i}(x^m)} + \frac{f_{x_i}^{(6)}(x^m)}{15f''_{x_i}(x^m)} + \frac{f_{x_i}^{(3)}(x^m)}{12f'_{x_i}(x^m)} \frac{f_{x_i}^{(4)}(x^m)}{f''_{x_i}(x^m)}}{240(f_{x_i}^{(3)}(x^m)f''_{x_i}(x^m) - 2f_{x_i}^{(4)}(x^m)f'_{x_i}(x^m))} =$$

$$\frac{16f_{x_i}^{(6)}(x^m)f'_{x_i}(x^m) + 20f_{x_i}^{(3)}(x^m)f_{x_i}^{(4)}(x^m) - 3f_{x_i}^{(5)}(x^m)f''_{x_i}(x^m) - 40\frac{f'_{x_i}(x^m)(f_{x_i}^{(4)}(x^m))^2}{f''_{x_i}(x^m)}}{f''_{x_i}(x^m)} \quad (20)$$

$i = \overline{1, n}$.

Учитывая систему уравнений (2) $f'_{x_i}(x^m) \approx f'_{x_i}(\bar{x}) = 0$, упростим (20):

$$(h_i^m)^2 = \left(\frac{240f_{x_i}^{(3)}(x^m)f''_{x_i}(x^m)}{20f_{x_i}^{(3)}(x^m)f_{x_i}^{(4)}(x^m) - 3f_{x_i}^{(5)}(x^m)f''_{x_i}(x^m)} \right) \approx \left(\frac{240f_{x_i}^{(3)}(\bar{x})f''_{x_i}(\bar{x})}{20f_{x_i}^{(3)}(\bar{x})f_{x_i}^{(4)}(\bar{x}) - 3f_{x_i}^{(5)}(\bar{x})f''_{x_i}(\bar{x})} \right), i = \overline{1, n} \quad (21)$$

Необходимо выполнить условия (19) и (21) одновременно, в результате выбираем наименьшее значение из:

$$h_i^{upper} = \min \left\{ \sqrt{\frac{12|f''_{x_i}(x^m)|}{|f_{x_i}^{(4)}(x^m)|}}, \sqrt{\left(\frac{240f_{x_i}^{(3)}(\bar{x})f''_{x_i}(\bar{x})}{20f_{x_i}^{(3)}(\bar{x})f_{x_i}^{(4)}(\bar{x}) - 3f_{x_i}^{(5)}(\bar{x})f''_{x_i}(\bar{x})} \right)} \right\} \quad (22)$$

$$\text{Для полиномов } n \text{ переменных не выше четвёртой степени из (22) получим } h_i^{upper} = \sqrt{12 \frac{|f''_{x_i}(\bar{x})|}{|f_{x_i}^{(4)}(\bar{x})|}} \quad (23)$$

поскольку (19) и (21) дают равные значения.

Рассмотрим пример $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^4 + x_2^4 - x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$,

$$f'_{x_1}(\bar{x}) = 4\bar{x}_1^3 - \bar{x}_2 + 2\bar{x}_1 = 0, f'_{x_2}(\bar{x}) = 4\bar{x}_2^3 - \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = 0 \Rightarrow (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \left(4(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2) + 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \Leftrightarrow 4\bar{x}_1^3 + \bar{x}_1 = 0 \Leftrightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0. \frac{\partial^2 f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{vmatrix} 12\bar{x}_1^2 + 2 & -1 \\ -1 & 12\bar{x}_2^2 + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

По теореме 1 матрица Гессе имеет строгое диагональное преобладание. Оптимальный шаг найдём по формуле (23) $(h_1^m)^2 = (h_2^m)^2 = \frac{12 * 2}{24} = 1, h_1^m = h_2^m = 1$.

Замечание 1. Существование оптимального шага $0 < h_i^m \leq (h_i^m)_{upper}$ подтверждает численный эксперимент, поскольку погрешность вычислений стационарной точки увеличивается как при $h_i^m < (h_i^m)_{upper}$, так и при $h_i^m > (h_i^m)_{upper}$. Примеры оценки оптимального шага можно встретить в [5].

Замечание 2. Несмотря на априорную гладкость функционала в (14), оценка оптимального шага требует как минимум гладкости четвёртого порядка (в общем случае частных производных 5 порядка).

Запишем программу на языке C (в данном примере мы используем $h_1^m = h_2^m = 1.0$ - получаем решение с максимально возможной точностью – 16 значащих цифр):

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
double fx(double x1,double x2);
int main()
{
int n,i;
double a1,b1,a2,b2,a3,b3,delta1,delta2,delta3;
double h1,h2,h3,h;
n=60;
a1=100.0;
a2=100.0;
h1=1.0;
h2=1.0;
for(i=1;i<=n;i++)
{
b1=a1-h1*(fx(a1+(h1/2.0),a2)-fx(a1-(h1/2.0),a2))/(fx(a1+h1,a2)+fx(a1-h1,a2)-2.0*fx(a1,a2));
delta1=sqrt((b1-a1)*(b1-a1));
a1=b1;
b2=a2-h2*(fx(a1,a2+(h2/2.0))-fx(a1,a2-(h2/2.0)))/(fx(a1,a2+h2)+fx(a1,a2-h2)-2.0*fx(a1,a2));
delta2=sqrt((b2-a2)*(b2-a2));
a2=b2;
}
printf("x1=%f,x2=%f,extr=%f\n",b1,b2,fx(b1,b2));

printf(" h1=%f,h2=%f,h3=%f\n",h1,h2);
}
double fx(double x1, double x2)
{
return 1.0+x1*x1*x1*x1+x2*x2*x2*x2+x1*x1-x1*x2+x2*x2;
}
```

Программа возвращает для $h_1 = 1.0, h_2 = 1.0$

$x_1 = 0.000000000000000011, x_2 = 0.000000000000000011, extr = 1.000000000000000000$

Выводы

- 1) Получены условия для быстрой сходимости итерационной последовательности к стационарной точке в задаче на безусловный экстремум. Требуется гладкость 3-го порядка функционалов, Приведены формулы необходимого числа итераций для поиска экстремума с заданной точностью в конечномерной задаче.
- 2) Вторая теорема доказана для априорно гладких функционалов, возможно не представимых в виде композиции элементарных функций, показана эквивалентность точности итерационных формул в теоремах, определена верхняя граница оптимального шага.
- 3) Приведены программы и примеры, подтверждающие эффективность методов. Используя полученные теоремы можно находить как экстремумы, так и другие стационарные точки (например, точки перевала).

Литература

1. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – Изд. – во Моск. Ун – та, 1989. – 204с.: ил.
2. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. – 7 – е изд.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с. – (Классический университетский учебник).
3. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику: Учебное пособие для вузов. – Долгопрудный: Издательский дом “Интеллект”, 2008. – 504с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. – М.:1989 – 450 с.
5. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие. – М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.

УДК 517.6

Дмитрий Феликсович Пастухов
Юрий Феликсович Пастухов
(Полоцкий университет)
Наталья Константиновна Волосова
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ.
АППРОКСИМАЦИЯ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТЬ
РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Полоцкий государственный университет

2019