УДК 519.6 517.958

# АППРОКСИМАЦИЯ ДВОЙНЫХ И ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

канд. физ.-мат. наук Пастухов Д.Ф., канд. физ.-мат. наук Пастухов Ю.Ф.

***Аннотация:*** *Получены формулы и алгоритмы для составных интегральных квадратур с равномерным шагом 7-го,11-го,15-го алгебраического порядка погрешности и с 8,12,16 порядком погрешности соответственно во внутренних задачах математической физики. Найдены аналоги формул для двойных на прямоугольнике и тройных в параллелепипеде интегралов с сохранением такого же порядка погрешности, что и в одномерном случае. Построены линейные отображения обобщённых координат с кольца (круга) на прямоугольник, с шарового слоя (шара) на параллелепипед. Найдены интегральные квадратуры в полярной и в сферической системе координат с сохранением алгебраического порядка точности, что проверено численно. Доказана лемма, указывающая минимальное число узлов достаточное для вычисления интеграла с двойной точностью. Приведены соответствующие алгоритмы.*

***Ключевые слова****: алгебраический порядок точности, порядок погрешности, метод медианной фильтрации, шаровой слой, кольцо, аппроксимация интегралов.*

# THE APROXIMATION DOUBLE AND TRIPLE INTEGRAL IN MATHEMATICAL PHYSICIST

Pastuhov D.F.,Pastuhov YU.F.

***The Abstract****: are Received formulas and algorithms for component integral squaring with even at a walk 7-go,11,15 algebraic order to inaccuracy and with 8,12,16 rather inaccuracy in internal problem mathematical physicists accordingly. Founded analogues molded for double on rectangle and triple in parallelepiped integral with conservation such order to inaccuracy, as in univariate event. The linear images of the generalized coordinates will Built with layer of circle (the circle) on rectangle, with ball layer (the ball) on box, as well as integral squaring in arctic coordinate system and in spherical coordinate system with conservation of the algebraic order to accuracy that is checked numerically. The Proved lemma, indicating minimum number of the nodes sufficient for calculation of the integral with double accuracy. They Are Brought corresponding to algorithms.*

***The Keywords****: algebraic order to accuracy, order to inaccuracy, method of median to filtering, ball layer, ring, approximation integral.*

**Введение.** В задачах математической физики обычно используют области: прямоугольник (параллелепипед), круг (шар). Например, во внутренней задаче Дирихле для уравнения Лапласа в круге, во внутренней задаче Дирихле для уравнения Лапласа в шаре [1,2]. В подобных задачах решение записывается в виде суммы ряда по собственным функциям выбранной области и уравнения в частных производных. Коэффициенты разложения ряда находят через двойные интегралы (в прямоугольнике, в круге, кольце) и тройные интегралы (в параллелепипеде, шаре, шаровом слое). В программе коэффициенты разложения вычисляют по циклу, и их число может достигать несколько тысяч. Что в свою очередь требует высокой точности расчёта двойных и тройных интегралов в задачах математической физики.

Как известно, среди интегральных квадратурных формул при заданном числе узлов аппроксимации на отрезке наибольший алгебраический порядок точности имеют квадратурные формулы Гаусса [3,стр.44]. Для поиска узлов нужно построить ортогональный на отрезке $[a,b]$ многочлен степени $n$ с весовой функцией $p(x)>0, x\in[a,b]$ (у многочлена все $n$ корней расположены на отрезке $[a,b]$). Согласно теореме Галуа произвольные многочлены степени больше четвёртой имеют корни, для которых невозможно указать замкнутую формулу для решений, т.е. формулу, содержащую только арифметические операции и корни произвольной степени. По теореме Гаусса[3,стр.45] ортогональный многочлен степени $n$ имеет квадратурную формулу Гаусса точную для всех многочленов степени не выше $2n-1$ (алгебраический порядок точности). Таким образом, интегральная формула Гаусса с узлами и весовыми коэффициентами, записанными через радикалы или рациональные дроби, может быть точна для всех многочленов степени не выше $2n-1=2\cdot 4-1=7$ .

Следовательно, корни ортогональных многочленов, равные узлам квадратурной формулы Гаусса (с числом больше четырёх) необходимо искать с двойной точность[6], например, с помощью формулы касательных Ньютона, что потребует не менее 250 итерации и более 1000 флопов[4]. В работе построены интегральные квадратурные формулы с равномерным шагом, рациональными узлами и весовыми коэффициентами, т.е. с двойной точностью. Найденные квадратурные формулы имеют алгебраический порядок точности соответственно $n \in \{7,11,15\}$. Полученные интегральные квадратурные формулы в одномерном случае могут быть перенесены на двойные и тройные интегралы с сохранением алгебраического порядка точности. В работе построено линейное отображение обобщённых координат с прямоугольника (параллелепипеда) на круг, кольцо, (шар, сферический слой), а квадратурные интегральные формулы в указанных областях имеют тот же алгебраический порядок точности, что и на отрезке.

Немецкая группа математиков из университета города (Paderbom) создала пакет программ MuPad Pro 2.5.2, в котором интегралы вычисляются всего с 10 значащими цифрами, т.е. с точностью меньшей, чем достигнутая в данной работе.

**1.Составная формула для отрезка, алгебраический порядок точности.**

Аппроксимация определённого интеграла квадратурной формулой с непрерывной функции $f(x)$, $x \in [a,b]$, имеет вид:

$$\int_a^b f(z)dz = \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i) + r(f) \tag{1}$$

Где: $x_i, i = \overline{0,n}$ - узлы квадратурной формулы;

$C_i$ – весовые коэффициенты; $r(f)$ - погрешность аппроксимации.

Из формулы (1) следует, что $r(f) = \int_a^b f(z)dz - \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i)$ является линейным оператором относительно функции $f$ как разность линейных операторов. Поэтому если формула(1) точна для всех степенных функций вида $x^j : r(x^j) = 0,\ j = \overline{0,m}$, то $r(P_m(x)) = 0$ для всех многочленов степени не выше $m$.

**Определение 1**. Пусть квадратурная формула(1) точна для всех степенных функций $x^k, k = \overline{0,m}$ включительно, т.е. $r(x^k) = 0, k = \overline{0,m}$, тогда говорят что алгебраический порядок точности интегральной квадратурной формулы(1) равен $m$.

**Определение 2**. Пусть алгебраический порядок точности квадратурной формулы(1) равен $m$, а погрешность $r(f)$ формулы (1)отлична от нуля степенной функции $x^l, l \geq m+1$, тогда говорят что порядок погрешности формулы(1) равен $l$. Другими словами, порядок погрешности формулы (1) - минимальная степень многочлена $l$ такая, что $r(P_l(x)) \neq 0$.

Рассмотрим канонический отрезок[-1,1], на котором в силу симметрии узлы квадратурной формулы расположены симметрично относительно нуля, а весовые коэффициенты симметричных узлов имеют равные значения. Выберем чётное число интервалов разбиения $n_0 = 2l$ и нечётное число узлов $2n_0 + 1$ во всех квадратурных формулах (в данной работе отрезок[-1,1] разбивается на $n_0 \in \{6,10,14\}$ число равных частей).

Пользуясь формулой (1) , определением 1 найдём условия на весовые коэффициенты $C_k$ в квадратурной формуле с равномерным шагом на отрезке [-1,1](с учётом сказанной симметрии):

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} dz = 2 = C_0 + 2\sum_{k=1}^{n_0/2} C_k \\ \int_{-1}^{1} z^{2s} dz = 2/(2s+1) = 2\sum_{k=1}^{n_0/2} C_k (2k/n_0)^{2s}, s = \overline{1, n_0/2} \end{cases} \tag{2}$$

Решение системы уравнений (2) подставим в квадратурную формулу (1), имеем:

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx C_0 f(0) + \sum_{k=1}^{n_0/2} C_k \left( f(-2k/n_0) + f(2k/n_0) \right), x_k = \pm 2k/n_0, k = \overline{0, n_0/2} \tag{3}$$

Сначала, разделим отрезок [-1,1] на 6 равных частей, т.е. используем 7 равноотстоящих узлов: $x_1 = -1, x_2 = -2/3, x_3 = -1/3, x_4 = 0, x_5 = 1/3, x_6 = 2/3, x_7 = 1$, $n_0 = 6$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | -2/3 | -1/3 | 0 | 1/3 | 2/3 | 1 |
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
| $C_3$ | $C_2$ | $C_1$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |

Согласно симметрии и квадратурной формуле (3) ( $n_0 = 6$ )получим:

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx C_0 f(0) + C_1\big(f(-1/3) + f(1/3)\big) + C_2\big(f(-2/3) + f(2/3)\big) + C_3\big(f(-1) + f(1)\big)$$

Подставляя в (2) степенные функции, начиная с нулевой степени, используя только чётные степени (для нечётных степеней имеем тривиальные тождества $0 = 0$ ), запишем систему уравнений:

$$f(z) \equiv 1: \int_{-1}^{1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} dz = 2 = C_0 + 2C_1 + 2C_2 + 2C_3$$

$$f(z) = z^2: \int_{-1}^{1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} z^2 dz = \frac{2}{3} = \frac{2}{9}C_1 + \frac{8}{9}C_2 + 2C_3 \Leftrightarrow 3 = C_1 + 4C_2 + 9C_3$$

$$f(z) = z^4: \int_{-1}^{1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} z^4 dz = \frac{2}{5} = \frac{2}{81}C_1 + \frac{32}{81}C_2 + 2C_3 \Leftrightarrow 81 = 5C_1 + 80C_2 + 405C_3$$

$$f(z) = z^6: \int_{-1}^{1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} z^6 dz = \frac{2}{7} = \frac{2}{729}C_1 + \frac{128}{729}C_2 + 2C_3 \Leftrightarrow 729 = 7C_1 + 448C_2 + 5103C_3$$

То есть необходимо решить неоднородную систему 4 линейных уравнений с 4 неизвестными.

$$\begin{cases} C_0 + 2C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 2 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 3 \\ 5C_1 + 80C_2 + 405C_3 = 81 \\ 7C_1 + 448C_2 + 5103C_3 = 729 \end{cases} \Leftrightarrow C_0 = \frac{68}{105}, C_1 = \frac{9}{140}, C_2 = \frac{18}{35}, C_3 = \frac{41}{420} \qquad (4)$$

Из формул (3)( $n_0 = 6$ ) и (4) получим формулу (5):

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx S_f = \frac{68}{105} f(0) + \frac{9}{140}\big(f(-1/3) + f(1/3)\big) + \frac{18}{35}\big(f(-2/3) + f(2/3)\big) + \frac{41}{420}\big(f(-1) + f(1)\big) \qquad (5)$$

Проверкой убеждаемся, что коэффициенты $C_0$, $C_1$, $C_2$, $C_3$ являются решением системы уравнений(4), т.е. по определению 1 у квадратурной формулы (5) алгебраический порядок точности равен семи (так как с учётом (4) и $\int_{-1}^{1} z^7 dz = 0 = \sum_{k=-3}^{3} C_k (2k/6)^7 = 0$ ), следовательно, по определению 2 порядок погрешности для формулы (5) равен 8. В частности, если $f(z) \equiv 1: \int_{-1}^{1} f(z)dz = 2 = \frac{68}{105} + 2\left(\frac{9}{140} + \frac{18}{35} + \frac{41}{420}\right)$, то интеграл равен длине отрезка [-1,1]. Учитывая шаг $h = 1/3$, перепишем формулу (5) в виде $\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx 3h\sum_{i=0}^{6} C_i f(x_i)$, в общем случае:

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0} C_i f(x_i), \quad \frac{hn_0}{2} = 1, x_i = -1 + ih, i = \overline{0, n_0} \qquad (6)$$

Рассмотрим составную квадратурную формулу для вычисления определённого интеграла, т.е. формула (6) используется $k$ раз на отрезке $[a,b], b - a = kn_0 h$. Шаблон весовых коэффициентов для составной формулы получим из (4) (коэффициенты в смежных узлах удваиваются), например:

$$\left\{\frac{41}{420}.\frac{18}{35}, \frac{9}{140}, \frac{68}{105}, \frac{9}{140}, \frac{18}{35}, \frac{41}{210}, \frac{18}{35}, \frac{9}{140}, \frac{68}{105}, \frac{9}{140}, \frac{18}{35}, \frac{41}{420}\right\} \; ( n = 12, k = 2, n_0 = 6 )$$

А определённый интеграл на отрезке $[a,b]$ отличается от(6) длиной интервала в $k = n/n_0$ раз.

$$\int_{a}^{b} f(z)dz \approx \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0 * k} C_i f(x_i), \sum_{i=0}^{n_0} C_i = 2, h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + ih, i = \overline{0, n} \qquad (7)$$

Для функции $f(z)\equiv 1, \int_a^b f(z)dz = \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0*k} C_i = \frac{hn_0}{2}2k = hkn_0 = b-a$ . Т.е. составная формула (7) является общей, в частности, коэффициенты $C_i$ для случая ( $n_0 = 6$ ) определяются алгоритмом:

$$
\begin{cases}
\text{если } \ j=0 \ \text{ или } j=n: C_j = \dfrac{41}{420}; \\
\text{если } \ j\equiv 1 \bmod 6 \ \text{ или } \ j\equiv 5 \bmod 6: C_j = \dfrac{18}{35}; \\
\text{если } \ j\equiv 2 \bmod 6 \ \text{ или } \ j\equiv 4 \bmod 6: C_j = \dfrac{9}{140}; \\
\text{если } j\equiv 3 \bmod 6: C_j = \dfrac{68}{105}; \\
\text{если } \ j\equiv 0 \bmod 6 \ , j>0, j<n: C_j = \dfrac{41}{210};
\end{cases} \tag{8}
$$

Аналогично формуле (5) можно разбить канонический отрезок[-1,1] $n_0 = 10$ равных частей (из соображений удобства разбиения), используя симметрию весовых коэффициентов, и получить решение системы уравнений(2) ( $n_0 = 10$ ), в которой 6 неизвестных коэффициентов $C_0$, $C_1$, $C_2$, $C_3$ $C_4$, $C_5$ являются решением неоднородной системы $n_0/2+1=6$ линейных уравнений с 11 алгебраическим порядком точности:

$$
\left\{ C_0 = \frac{17807}{12474}, C_1 = -\frac{4825}{5544}, C_2 = \frac{5675}{6237}, C_3 = -\frac{16175}{99792}, C_4 = \frac{26575}{74844}, C_5 = \frac{16067}{299376} \right. \tag{9}
$$

Проверим на компьютере, что рациональный вид коэффициентов (9)(символьное решение системы (2) для $n_0 = 10$ ) удовлетворяет(2) с двойной точностью(16 значащих цифр). В таблице 1 в левой части указано точное значение интеграла $a(s) = \int_{-1}^{1} z^s dz, s = \overline{0,12}$ , а справа численное значение правой части уравнений системы (2) - $b(s)$ с использованием значений весовых коэффициентов (8) ( $s-$показатель степенной функции).

Таблица 1

| | |
|---|---|
| a(0)=2.0000000000000000 | b(0)=2.0000000000000004 |
| a(1)=0.0000000000000000 | b(1)=0.0000000000000000 |
| a(2)=0.6666666666666666 | b(2)=0.6666666666666669 |
| a(3)=0.0000000000000000 | b(3)=-0.0000000000000000 |
| a(4)=0.4000000000000000 | b(4)=0.4000000000000001 |
| a(5)=0.0000000000000000 | b(5)=-0.0000000000000000 |
| a(6)=0.2857142857142857 | b(6)=0.2857142857142858 |
| a(7)=0.0000000000000000 | b(7)=0.0000000000000000 |
| a(8)=0.2222222222222222 | b(8)=0.2222222222222223 |
| a(9)=0.0000000000000000 | b(9)=-0.0000000000000000 |
| a(10)=0.1818181818181818 | b(10)=0.1818181818181819 |
| a(11)= 0.0000000000000000 | b(11)=-0.0000000000000000 |
| a(12)= 0.1538461538461539 | b(12)= 0.1554621683809524 |

Из таблицы 1 видно, что алгебраический порядок точности системы уравнений (2) при $n_0 = 10$ равен11, а порядок погрешности квадратурной формулы $\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx 5h\sum_{i=0}^{10} C_i f(x_i)$, где $5h = 1, \sum_{i=0}^{10} C_i = 2, x_i = -1+ih, i = \overline{0,10}$ равен 12( $C_i$ определяются с помощью (9)).

Из выражения (7) для $n_0 = 10$ получим составную формулу:

$$
\int_a^b f(z)dz \approx 5h\sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i), h = \frac{(b-a)}{n}, x_i = a+ih, n = 10k, \left( \sum_{i=0}^{10} C_i = 2 \right) \tag{10}
$$

в которой весовые коэффициенты $C_i$ определяются алгоритмом (11):

$$\begin{cases} если \;\; j=0 \;\; или \;\; j=n: C_j = \dfrac{16067}{299376}; \\ если \;\; j\equiv 1 \bmod 10 \;\; или \;\; j\equiv 9 \bmod 10: C_j = \dfrac{26575}{74844}; \\ если \;\; j\equiv 2 \bmod 10 \;\; или \;\; j\equiv 8 \bmod 10: C_j = -\dfrac{16175}{99792}; \\ если \;\; j\equiv 3 \bmod 10 \;\; или \;\; j\equiv 7 \bmod 10: C_j = \dfrac{5675}{6237}; \\ если \;\; j\equiv 4 \bmod 10 \;\; или \;\; j\equiv 6 \bmod 10: C_j = -\dfrac{4825}{5544}; \\ если \;\; j\equiv 5 \bmod 10: C_j = \dfrac{17807}{12474}; \\ если \;\; j\equiv 0 \bmod 10 \;, j>0, j<n: C_j = \dfrac{16067}{149688}; \end{cases} \quad (11)$$

Решение системы уравнений (2) ( $n_0 = 14$ ), с делением отрезка[-1,1] на 14 равных частей есть:

$$\begin{cases} C_0 = \dfrac{101741867}{13030875}; C_1 = -\dfrac{5600756791}{833976000}; C_2 = \dfrac{789382601}{156370500}; C_3 = -\dfrac{6625093363}{2501928000}; \\ C_4 = \dfrac{109420087}{78185250}; C_5 = -\dfrac{770720657}{2501928000}; C_6 = \dfrac{44436679}{156370500}; C_7 = \dfrac{90241897}{2501928000}. \end{cases} \quad (12)$$

Численно проверим, что весовые коэффициенты (12),- символьное решение системы (2) (для $n_0 = 14$ ), удовлетворяет(2) с двойной точностью (16 значащих цифр). Значения занесём в таблицу 2.

Таблица 2

| | |
|---|---|
| a(0)=2.0000000000000000 | b(0)=2.0000000000000009 |
| a(1)=0.0000000000000000 | b(1)=0.0000000000000001 |
| a(2)=0.6666666666666666 | b(2)=0.6666666666666665 |
| a(3)=0.0000000000000000 | b(3)=0.0000000000000000 |
| a(4)=0.4000000000000000 | b(4)=0.4000000000000000 |
| a(5)=0.0000000000000000 | b(5)=0.0000000000000000 |
| a(6)=0.2857142857142857 | b(6)=0.2857142857142856 |
| a(7)=0.0000000000000000 | b(7)=0.0000000000000000 |
| a(8)=0.2222222222222222 | b(8)=0.2222222222222221 |
| a(9)=0.0000000000000000 | b(9)=0.0000000000000000 |
| a(10)=0.1818181818181818 | b(10)=0.1818181818181817 |
| a(11)=0.0000000000000000 | b(11)=0.0000000000000000 |
| a(12)=0.1538461538461539 | b(12)=0.1538461538461538 |
| a(13)=0.0000000000000000 | b(13)=0.0000000000000000 |
| a(14)=0.1333333333333333 | a(14)=0.1333333333333333 |
| a(15)=0.0000000000000000 | b(15)=0.0000000000000000 |
| a(16)=0.1176470588235294 | b(16)=0.1179107308149041 |

Из таблицы 2 видно, что формула

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx 7h\sum_{i=0}^{14} C_i f(x_i), 7h = 1, \sum_{i=0}^{14} C_i = 2, x_i = -1 + ih, i = \overline{0{,}14}$$

имеет 15 алгебраический порядок точности и 16 порядок погрешности. Используя формулу (7) ( $n_0 = 14$ ),получим составную формулу с делением отрезка $[a,b]$ на число частей кратное 14:

$$\int_a^b f(z)dz = 7h\sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i), h = \frac{(b-a)}{n}, x_i = a + ih, n = 14k, \left(\sum_{i=0}^{14} C_i = 2\right) \quad (13)$$

Весовые коэффициенты $C_i$ определяются алгоритмом:

$$\begin{cases} если\ \ j=0\ \ или\ j=n: C_j=\dfrac{90241897}{2501928000}; \\ если\ \ j\equiv 1 \bmod 14\ или\ \ j\equiv 13 \bmod 14: C_j=\dfrac{44436679}{156370500}; \\ если\ \ j\equiv 2 \bmod 14\ или\ \ j\equiv 12 \bmod 14: C_j=-\dfrac{770720657}{2501928000}; \\ если\ \ j\equiv 3 \bmod 14\ или\ \ j\equiv 11 \bmod 14: C_j=\dfrac{109420087}{78185250}; \\ если\ \ j\equiv 4 \bmod 14\ или\ \ j\equiv 10 \bmod 14: C_j=-\dfrac{6625093363}{2501928000}; \\ если\ \ j\equiv 5 \bmod 14\ или\ \ j\equiv 9 \bmod 14: C_j=\dfrac{789382601}{156370500}; \\ если\ \ j\equiv 6 \bmod 14\ или\ \ j\equiv 8 \bmod 14: C_j=-\dfrac{5600756791}{833976000}; \\ если\ \ j\equiv 7 \bmod 14: C_j=\dfrac{101741867}{13030875}; \\ если\ \ j\equiv 0 \bmod 14\ ,\ j>0,\ j<n: C_j=\dfrac{90241897}{1250964000}; \end{cases} \tag{14}$$

Докажем следующее утверждение:

**Лемма.** Пусть дана функция $f(x)\in C^{(n_0+2)}[a,b]$ и составная квадратурная формула (1) с равномерным шагом точна для всех многочленов степени равной $n_0 \in \{6,10,14\}$. То есть выполнено условие (формула (7)):

$$\int_{-H}^{H} z^t dz = \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n} C_i z_i^{\,t},\ t=\overline{0,n_0}\ \text{, где: } c-\text{ середина отрезка } [a,b] \tag{15}$$

$$c=(a+b)/2, x=z+c, dx=dz, h=(b-a)/n, H=(b-a)/2, x\in[a,b], z\in[-H,H]$$

$$x_i=c+z_i, x_i=a+i(b-a)/n=a+ih, i=\overline{0,n}$$

Тогда порядок погрешности $r(f)$ составной формулы равен $n_0+2$, другими словами, алгебраический порядок точности равен $n_0+1\in\{7,11,15\}$.

**Доказательство.** Разложим функцию $f(x)\in C^{(n_0+2)}[a,b]$, в ряд Тейлора с центром в точке $x=c$:

$$f(c+z)=\sum_{k=0}^{n_0}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}z^k+\frac{f^{(n_0+1)}(c)}{(n_0+1)!}z^{n_0+1}+\frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!}z^{n_0+2}+O\left(z^{n_0+3}\right), |z|\le H\ .$$

Покажем, что из условия (15) следует

$$\int_a^b x^t dx=\left(\frac{hn_0}{2}\right)\sum_{i=0}^{n}C_i x_i^{\,t}=\left(\frac{hn_0}{2}\right)\sum_{i=0}^{n}C_i x_i^{\,t}, t=\overline{0,n_0}, t\in N\ .$$

$$\int_a^b x^t dx-\left(\frac{hn_0}{2}\right)\sum_{i=0}^{n}C_i x_i^{\,t}=\int_{-H}^{H}(z+c)^t dz-\left(\frac{hn_0}{2}\right)\sum_{i=0}^{n}C_i\left(c+z_i\right)^t=\sum_{s=0}^{t}C_t^s c^{t-s}\left(\int_{-H}^{H}z^s dz-\frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n}C_i z_i^{\,s}\right)=0, \forall t=\overline{0,n_0}, \forall s=\overline{0,t}$$

т.е. из (15) следует $\int_a^b x^t dx=\frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n}C_i x_i^{\,t}, t=\overline{0,n_0}$ (параллельный перенос системы координат не изменяет алгебраического порядка точности квадратурной формулы). $C_t^s=t!/s!(t-s)!$-биномиальный коэффициент.

$$|r(f)|\le\frac{\left|f^{(n_0+2)}(c)\right|}{(n_0+2)!}H^{n_0+3}\left|\frac{2}{n_0+3}-\frac{hn_0}{2H}\sum_{i=0}^{n}C_i\left(\frac{z_i}{H}\right)^{n_0+2}+O(H)\right|, \left|\frac{z_i}{H}\right|\le 1$$

$$|r(f)|=\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n}C_i f(x_i)\right|=\left|\int_{-H}^{H}\left(\sum_{t=0}^{n_0}\frac{f^{(t)}(c)}{t!}z^t+\frac{f^{(n_0}}{(n_0}\right.\right. \ldots$$

$$-\frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n}C_i\left(\sum_{t=0}^{n_0}\frac{f^{(t)}(c)}{t!}z_i^{\,t}+\frac{f^{(n_0+1)}(c)}{(n_0+1)!}z_i^{\,n_0+1}+\frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!}z_i^{\,n_0+2}+O\left(H^{n} \ldots\right.\right.$$

$$\sum_{t=n_0+1}^{n_0+2}\frac{f^{(t)}(c)}{t!}\left(\int_{-H}^{H}z^t dz-\frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n}C_i z_i^{\,t}+O\left(H^{n_0+4}\right)\right)\Bigg|=\frac{\left|f^{(n_0+2)}(c)\right|}{(n_0+2)!}\left|\frac{2H^{n_0+3}}{n_0+3}-\frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n}C_i z_i^{\,n_0+2}+O\left(H^{n_0+4}\right)\right| \tag{16}$$

В формуле (16) учтены равенства справедливые в силу соотношений:

$$\int_{-H}^{H} z^{n_0+1}dz = 0, \sum_{i=0}^{n} C_i z_i^{n_0+1} = 0, так\ как C_{n/2-j} = C_{n/2+j}, z_{n/2-j} = -z_{n/2+j}, z_{n/2} = 0, j = \overline{-n/2, n/2}$$

$$z_i = \left(\frac{i-n/2}{n/2}\right)H = \frac{2j}{n}H, i = \overline{0,n}, j = i - n/2, j = \overline{-n/2, n/2}, i = \overline{0,n}, |z_i| \le H .$$

В формуле (16) последний множитель представляет собой многочлен степени $n_0+2$, которая определяет порядок погрешности $|r(f)|$ составной формулы согласно определению 2, другими словами, алгебраический порядок точности равен $n_0+1 = 7{,}11{,}15$ по определению 1 .

**Лемма** доказана.

Формулу (16) можно проанализировать и упростить

$$|r(f)| \le \frac{\left|f^{(n_0+2)}(c)\right|}{(n_0+2)!} H^{n_0+3} \left| \frac{2}{n_0+3} - \frac{hn_0}{2H} \sum_{i=0}^{n} C_i \left(\frac{z_i}{H}\right)^{n_0+2} + O\left(H^{n_0+4}\right) \right|$$

Выражение $\frac{2}{n_0+3} \approx \sum_{i=0}^{n_0} C_i \left(\frac{z_i}{H}\right)^{n_0+2} \ (k=1)$ справедливо с точностью до 3 знаков (как видно из таблицы 2 в случае $s=16$ $a(16)$ и $b(16)$ отличаются в четвёртой значащей цифре, а из таблицы 1 в случае $s=12$ $a(12)$ и $b(12)$ отличаются в третьей значащей цифре). Поэтому для(16)справедливо:

$$|r(f)| \le \frac{\left|f^{(n_0+2)}(c)\right|}{(n_0+2)!} H^{n_0+3} \left| \frac{2}{n_0+3} + O(H) \right| = \frac{2\left|f^{(n_0+2)}(c)\right|}{(n_0+3)!} H^{n_0+3} + O\left(H^{n_0+4}\right)$$

С другой стороны, суммирование на $n = kn_0$ узлах эквивалентно взятию $k$ интегралов на интервалах длиной $b_j - a_j = \frac{b-a}{k}, j = \overline{1,k}$. Обозначим среднее значение производной $\overline{\left|f^{(n_0+2)}\right|} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} f^{(n_0+2)}\left(\frac{a_j+b_j}{2}\right) \approx \left(\frac{1}{b-a}\right)\int_a^b f^{(n_0+2)}(x)dx$ . Тогда имеет место оценка

$$|r(f)|^{[a,b]} \le k|r(f)|^{[a_j,b_j]} \le \frac{k}{(n_0+2)!}\overline{\left|f^{(n_0+2)}(x)\right|} \frac{2}{(n_0+3)}\left(\frac{b-a}{2k}\right)^{n_0+3} = \frac{2H^{n_0+3}}{k^{n_0+2}(n_0+3)!}\overline{\left|f^{(n_0+2)}(x)\right|} \quad (17)$$

Нас будет интересовать порядок погрешности составной квадратурной формулы и двойная точность относительной погрешности результата интегрирования (16 значащих цифр).

Вычислим определённый интеграл (ответ с 16 значащими цифрами):

$$\int_0^2 \exp(2x)dx = (\exp(4)-1)/2 = 26.79907501657212 \ ,$$

При $N = 28, k = 2$ написанная нами программа с использованием формул (13),(14) возвращает значения ( $epsilon \equiv (\mathrm{int}1 - exact)/exact$ ):

int 1 =26.79907501657214delta, exact=26.79907501657212 $delta$ =-0.00000000000002=-2*10 $^{-14}$

$epsilon$ =-0.0000000000000008.

Снова оценим погрешность составной интегральной квадратуры по формуле (17)

для интеграла $\int_0^2 \exp(2x)dx = (\exp(4)-1)/2 = 26.79907501657212$ :

$$\overline{\left|f^{(n_0+2)}\right|} = \left(\frac{1}{b-a}\right)\int_a^b f^{(n_0+2)}(x)dx = \left(\frac{1}{2-0}\right)\int_0^2 (\exp(2x))2^{(16)}dx = \frac{(\exp(4)-1)}{4}2^{16} ,$$

$$|r(f)| \le \frac{1}{k^{n_0+2}} \frac{2H^{n_0+3}}{(n_0+3)!}\overline{\left|f^{(n_0+2)}(x)\right|} = \frac{2^{17}}{2^{16}17!}\frac{(\exp(4)-1)}{4} = 7.5\cdot 10^{-14}$$

Видно, что $|r(f)|$ хорошо приближает численное значение $|delta|$ с избытком. Достигнув двойной точности с помощью(17), мы получим и двойную точность численное значение. В программе получена двойная точность, т.к. $|epsilon| = 8\cdot 10^{-16}$.

**2.Построение двумерных и трёхмерных алгоритмов**

Для построения двумерных и трёхмерных квадратурных интегральных формул рассмотрим сначала случай функций с разделяющимися переменными.

1) Пусть $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$, воспользуемся дважды составной формулой (7) для определённого интеграла функции одной переменной:

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y),\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy\approx\frac{h_1n_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0*k}C_if_1(x_i)\frac{h_2n_0}{2}\sum_{j=0}^{n_0*k}C_jf_2(y_j)=$$

$$\frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i=0}^{n_0\cdot k}\sum_{j=0}^{n_0\cdot k}C_iC_jf_1(x_i)f_2(x_j)=\frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0\cdot k}C_{i,j}f\left(x_i,y_j\right) \quad (18)$$

$$C_{i,j}=C_iC_j,\ f\left(x_i,y_j\right)=f_1\left(x_i\right)f_2\left(y_j\right),x_i=a+ih_1,y_j=c+jh_2,h_1=\frac{b-a}{n},h_2=\frac{d-c}{n},i,j=\overline{0,n}$$

2) Пусть $(x,y,z)\in[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$, воспользуемся трижды составной формулой (7) для определённого интеграла функции одной переменной:

$$f(x,y,z)=f_1(x)f_2(y)f_3(z),\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy\int_e^f f_3(z)dz=$$

$$=\frac{h_1n_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0\cdot k}C_if_1(x_i)\frac{h_2n_0}{2}\sum_{j=0}^{n_0\cdot k}C_jf_2(y_j)\frac{h_3n_0}{2}\sum_{s=0}^{n_0\cdot k}C_sf_3(z_s)=\frac{h_1h_2h_3n_0^3}{8}\sum_{i=0}^{n_0\cdot k}\sum_{j=0}^{n_0\cdot k}\sum_{s=0}^{n_0\cdot k}C_iC_jC_sf_1(x_i)f_2(y_j)f_3(z_s)=$$

$$\frac{h_1h_2h_3n_0^3}{8}\sum_{i,j,s=0}^{n_0\cdot k}C_{i,j,s}f(x_i,y_j,z_s) \quad (19)$$

$$C_{i,j,s}=C_iC_jC_s,\ f\left(x_i,y_j,z_s\right)=f_1\left(x_i\right)f_2\left(y_j\right)f_3\left(z_s\right),x_i=a+ih_1,y_j=c+jh_2,z_s=e+sh_3$$

$$h_1=\frac{b-a}{n},h_2=\frac{d-c}{n},i,h_3=\frac{d-c}{n},\ i,j,s=\overline{0,n}$$

Формулы (20),(21),(22)получим подстановкой в (18) $n_0=6{,}10{,}14$ соответственно

1) $$I_2=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy\approx 9h_1h_2\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_{i,j}f\left(x_iy_j\right),h_1=\frac{(b-a)}{n},h_2=\frac{(d-c)}{n}, \quad (20)$$
$$C_{i,j}=C_iC_j;x_i=a+h_1\cdot i,y_j=c+h_2\cdot j;\quad i,j=\overline{0,n}$$

Где: $C_i,C_j$ - весовые коэффициенты определяются формулой (8)

2) $$I_2=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy\approx 25h_1h_2\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_{i,j}f\left(x_iy_j\right),h_1=\frac{(b-a)}{n},h_2=\frac{(d-c)}{n}, \quad (21)$$
$$C_{i,j}=C_iC_j;x_i=a+h_1\cdot i,y_j=c+h_2\cdot j;i,j=\overline{0,n}$$

Где: $C_i,C_j$ - весовые коэффициенты определяются формулой (11)

3) $$I_2=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy\approx 49h_1h_2\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_{i,j}f\left(x_iy_j\right),h_1=\frac{(b-a)}{n},h_2=\frac{(d-c)}{n}, \quad (22)$$
$$C_{i,j}=C_iC_j;x_i=a+h_1\cdot i,y_j=c+h_2\cdot j;i,j=\overline{0,n}$$

Где: $C_i,C_j$ - весовые коэффициенты определяются формулой (14)

Формулы (23)-(25)получим подстановкой в (19) $n_0=6{,}10{,}14$ соответственно

4) $I_3=\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dxdydz \approx 27h_1h_2h_3\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_{i,j,k}\,f\left(x_iy_jz_k\right), h_1=\frac{(b-a)}{n}, h_2=\frac{(d-c)}{n}, h_3=\frac{(f-e)}{n}$ (23)

$C_{i,j,k}=C_iC_jC_k; x_i=a+h_1\cdot i, y_j=c+h_2\cdot j, z_k=c+h_3\cdot k; i,j,k=\overline{0,n}$

Где: $C_i, C_j, C_k$ - весовые коэффициенты определяются формулой (8)

5) $I_3=\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dxdydz \approx 125h_1h_2h_3\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_{i,j,k}\,f\left(x_iy_jz_k\right), h_1=\frac{(b-a)}{n}, h_2=\frac{(d-c)}{n}, h_3=\frac{(f-e)}{n}$ (24)

$C_{i,j,k}=C_iC_jC_k; x_i=a+h_1\cdot i, y_j=c+h_2\cdot j, z_k=c+h_3\cdot k; i,j,k=\overline{0,n}$

Где: $C_i, C_j, C_k$ - весовые коэффициенты определяются формулой (11)

6) $I_3=\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dxdydz \approx 343h_1h_2h_3\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_{i,j,k}\,f\left(x_iy_jz_k\right), h_1=\frac{(b-a)}{n}, h_2=\frac{(d-c)}{n}, h_3=\frac{(f-e)}{n}$ (25)

$C_{i,j,k}=C_iC_jC_k; x_i=a+h_1\cdot i, y_j=c+h_2\cdot j, z_k=c+h_3\cdot k; i,j,k=\overline{0,n}$

Где: $C_i, C_j, C_k$ - весовые коэффициенты определяются формулой (14)

**Теорема 1:** Формульные пары (20)-(8);(21)-(11);(22)-(14);(23)-(8);(24)-(11);(25)-(14) справедливы для любой функции $f(x,y)\in C^{n_0+2}([-1,1]\times[-1,1])\left(f(x,y,z)\in C^{n_0+2}([-1,1]\times[-1,1])\times[-1,1]\right)$ необязательно с разделяющимися переменными. Порядок погрешности двумерной (трёхмерной) интегральной квадратурной формулы совпадает с порядком погрешности одномерной квадратурной формулы(равен 7,11,15 соответственно для алгоритмов (8),(11),(14)).

**Доказательство:** проведём в два этапа:

**Утверждение 1. Для** двойного интеграла на каноническом квадрате $(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]$ и тройного интеграла на каноническом кубе $(x,y,z)\in[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ равноудалённые от центра точки имеют равные весовые коэффициенты.

Не теряя общности, доказательство рассмотрим для двумерного случая, выберем каноническую область квадрат $(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]$ со стороной 2.

**1.1)** Сделаем линейную замену переменных в интеграле $x'\big|_{-1}^{1}=y\big|_{-1}^{1}, y'\big|_{-1}^{1}=x\big|_{-1}^{1}; dx'=dy; dy'=dx$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(y',x')dy'dx'=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(y',x')dx'dy'\approx\frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0}C_{i,j}\,f\left(x_i,y_j\right)=\frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0}C_{j,i}\,f\left(y_j,x_i\right)$$

Последняя формула означает инвариантность интеграла от произвольной функции при зеркальном отражении канонического квадрата относительно прямой $y=x$. Что в свою очередь для $f\left(x_i,y_j\right)\equiv 1$ приводит к симметрии (равенству) весовых коэффициентов $C_{j,i}=C_{i,j}, i,j=\overline{0,n_0}$

**1.2)** Рассмотрим инверсию канонического квадрата относительно центра (поворот на $180^0$)

$$x'\big|_{-1}^{1}=-x\big|_{1}^{-1}, y'\big|_{-1}^{1}=-y\big|_{1}^{-1}; dx'=-dx; dy'=-dy$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(-x',-y')d\left(-x'\right)d\left(-y'\right)=\int_{1}^{-1}\int_{1}^{-1}f(-x',-y')dx'dy'=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(-x',-y')dx'dy'\approx\frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0}C_{i,j}\,f\left(x_i,y_j\right)=\frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0}C_{n_0-i,n_0-j}\,f\left(x_{n_0-i},y_{n_0-j}\right)$$

Равенство интегралов означает инвариантность интеграла при повороте канонического квадрата на $180^0$ (преобразование инверсии), а в случае $f\left(x_i,y_j\right)\equiv 1$ для интегральных сумм $C_{i,j}=C_{n_0-i,n_0-j}, i,j=\overline{0,n_0}$.

1.3)Рассмотрим поворот канонического квадрата на $90^0$.

$$x'\big|_{-1}^{1}=y\big|_{-1}^{1}, y'\big|_{1}^{-1}=-x\big|_{-1}^{1}; dx'=dy; dy'=-dx$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(-y',x')d\left(-y'\right)dx'=-\int_{1}^{-1}\int_{-1}^{1}f(-y',x')dy'dx'=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(-y',x')dy'dx'=$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(-y',x')d(x')dy' \approx \frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} f(x_i,y_j) = \frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0} C_{n_0-j,i} f(y_{n_0-j},x_i)$$

Равенство интегралов означает инвариантность интеграла при повороте канонического квадрата на $90^0$, а в случае $f(x_i,y_j)\equiv 1$ для интегральных сумм $C_{i,j}=C_{n_0-j,i}, i,j=\overline{0,n_0}$.

На целочисленной решётке с координатами $(x_i,y_j)$ квадрат с фиксированным расстоянием до центра есть $x_i^2+y_j^2=const$, поэтому решением этого же уравнения будут пары чисел: $(x_i,y_j),(-x_i,y_j),(x_i,-y_j),(-x_i,-y_j),(y_j,x_i),(y_j,-x_i),(-y_j,x_i),(-y_j,-x_i)$.

Последние 4 пары отличаются от первых четырёх преобразованием симметрии **1.1**.Первая и четвертая пары, а также вторая и третья пары отличаются друг от друга преобразованием инверсии **1.2**. Наконец, первая и шестая пары совмещаются поворотом относительно центра на $90^0$ (преобразование 1.3). Следовательно, в силу **1.1-1.3** весовые коэффициенты на всех восьми (или четырёх) указанных точках имеют равные значения.

Доказанное **утверждение 1** справедливо независимо от вида алгоритма построения весовых коэффициентов (8),(11),(14).

**Утверждение 2**. Квадратурные интегральные формулы (18) для двойного интеграла и (19) для тройного интеграла справедливы для произвольной непрерывной функции (не обязательно с разделяющимися переменными). Порядок погрешности в двойной интегральной квадратурной формуле (18) и в тройной (19) тот же, что и в одномерной квадратурной формуле (7).

Доказательство для определённости проведём для двойного интеграла в простейшем случае $n_0=6$.

На квадрате $(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]$ с равномерной сеткой для случая $n_0=6$ имеем $(n_0+1)^2=49$ узлов (соответственно 49 весовых коэффициентов $C_{i,j}, i,j=\overline{0,n_0}$). Квадратурная формула для двойного интеграла (аналог (6)) имеет вид:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy = \overline{C_0} f(0,0) + \overline{C_1}\left(f\left(-\frac{1}{3},0\right)+f\left(\frac{1}{3},0\right)+f\left(0,-\frac{1}{3}\right)+f\left(0,\frac{1}{3}\right)\right)+\overline{C_2}\left(f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)+f\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)+\right.$$

$$\left.f\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right)+\overline{C_3}\left(f\left(-\frac{2}{3},0\right)+f\left(\frac{2}{3},0\right)+f\left(0,-\frac{2}{3}\right)+f\left(0,\frac{2}{3}\right)\right)+\overline{C_4}\left(f\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)+f\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)+f\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)+f\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)+f\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right)+\overline{C_5}\left(f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)+\right.$$

$$\left.f\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)+f\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right)+\overline{C_6}\big(f(0,1)+f(0,-1)+f(-1,0)+f(1,0)\big)+\overline{C_7}\left(f\left(\frac{1}{3},1\right)+f\left(1,\frac{1}{3}\right)+f\left(1,-\frac{1}{3}\right)+\right.$$

$$\left.f\left(\frac{1}{3},-1\right)+f\left(-\frac{1}{3},-1\right)+f\left(-1,-\frac{1}{3}\right)+f\left(-1,\frac{1}{3}\right)+f\left(-\frac{1}{3},1\right)\right)+\overline{C_8}\left(f\left(\frac{2}{3},1\right)+f\left(1,\frac{2}{3}\right)+f\left(1,-\frac{2}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{2}{3},-1\right)+f\left(-1,-\frac{2}{3}\right)+f\left(-\frac{2}{3},-1\right)+f\left(-\frac{2}{3},1\right)+f\left(-1,\frac{2}{3}\right)\right)+\overline{C_9}\big(f(1,1)+f(1,-1)+f(-1,-1)+f(-1,1)\big) \qquad (26)$$

В формуле(26) согласно **утверждению 1** сгруппированы с одинаковым весом все узлы, равно - удалённые от центра канонического квадрата $(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]$ как видно из формулы (26), число таких узлов 4 либо 8, за исключением центра.

Аналогично одномерной интерполяционной задаче (2) можно поставить двумерную на каноническом квадрате и трёхмерную на каноническом кубе задачи интерполяции:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dxdy = \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} = 4 \\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^{2s}y^{2l}dxdy = \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j}x_i^{2s}y_j^{2l}, 2s+2l\in\overline{0,n_0} \end{cases} \qquad (27)$$

В формуле (27) $f(x,y)\in C^{n_0+2}([-1,1]\times[-1,1])$ используется множество линейно независимых степенных функций двух переменных $\{1,x,y,x^2,xy,y^2,..x^{n_0},x^{n_0-1}y,..xy^{n_0-1},y^{n_0}\}$. Здесь $n_0$ - алгебраический порядок точности квадратурной формулы (27). Из-за симметрии, как и в задаче (2) нетривиальные условия на коэффициенты получим при условии, что степени $x,y$ чётные, учитывая формулу (26):

1) $f(x,y)\equiv 1$:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}dxdy=4=\sum_{i,j=0}^{n_0}C_{i,j}=\overline{C_0}+4\overline{C_1}+4\overline{C_2}+4\overline{C_3}+8\overline{C_4}+4\overline{C_5}+4\overline{C_6}+8\overline{C_7}+8\overline{C_8}+4\overline{C_9}$$

2) $f(x,y)=x^2$ (для $f(x,y)=x^2$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x^2dxdy=\frac{4}{3}=\frac{2}{9}\overline{C_1}+\frac{4}{9}\overline{C_2}+\frac{8}{9}\overline{C_3}+\frac{20}{9}\overline{C_4}+\frac{16}{9}\overline{C_5}+2\overline{C_6}+\frac{40}{9}\overline{C_7}+\frac{52}{9}\overline{C_8}+4\overline{C_9}$$

3) $f(x,y)=x^4$ (для $f(x,y)=y^4$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x^4dxdy=\frac{4}{5}=\frac{2}{81}\overline{C_1}+\frac{4}{81}\overline{C_2}+\frac{32}{81}\overline{C_3}+\frac{68}{81}\overline{C_4}+\frac{64}{81}\overline{C_5}+2\overline{C_6}+\frac{328}{81}\overline{C_7}+\frac{388}{81}\overline{C_8}+4\overline{C_9}$$

4) $f(x,y)=x^2y^2$:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x^2y^2dxdy=\frac{4}{9}=\frac{4}{81}\overline{C_2}+\frac{32}{81}\overline{C_4}+\frac{64}{81}\overline{C_5}+\frac{8}{9}\overline{C_7}+\frac{32}{9}\overline{C_8}+4\overline{C_9}$$

5) $f(x,y)=x^6$ (для $f(x,y)=y^6$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x^6dxdy=\frac{4}{7}=\frac{2}{3^6}\overline{C_1}+\frac{4}{3^6}\overline{C_2}+\frac{128}{3^6}\overline{C_3}+\frac{260}{3^6}\overline{C_4}+\frac{256}{3^6}\overline{C_5}+2\overline{C_6}+\frac{2920}{3^6}\overline{C_7}+\frac{3172}{3^6}\overline{C_8}+4\overline{C_9}$$

6) $f(x,y)=x^4y^4$ (для $f(x,y)=x^2y^4$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x^4y^2dxdy=\frac{4}{15}=\frac{4}{3^6}\overline{C_2}+\frac{80}{3^6}\overline{C_4}+\frac{256}{3^6}\overline{C_5}+\frac{360}{3^6}\overline{C_7}+\frac{1872}{3^6}\overline{C_8}+4\overline{C_9}$$

7) $f(x,y)=x^8$:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x^8dxdy=\frac{4}{9}=\frac{2}{3^8}\overline{C_1}+\frac{4}{3^8}\overline{C_2}+\frac{512}{3^8}\overline{C_3}+\frac{1028}{3^8}\overline{C_4}+\frac{1024}{3^8}\overline{C_5}+2\overline{C_6}+\frac{26248}{3^8}\overline{C_7}+\frac{27268}{3^8}\overline{C_8}+4\overline{C_9}$$

8) $f(x,y)=x^6y^2$ (для $f(x,y)=x^2y^6$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x^6y^2dxdy=\frac{4}{21}=\frac{4}{3^8}\overline{C_2}+\frac{272}{3^8}\overline{C_4}+\frac{1024}{3^8}\overline{C_5}+\frac{2952}{3^8}\overline{C_7}+\frac{13968}{3^8}\overline{C_8}+4\overline{C_9}$$

9) $f(x,y)=x^4y^4$:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x^4y^4dxdy=\frac{4}{25}=\frac{4}{3^8}\overline{C_2}+\frac{128}{3^8}\overline{C_4}+\frac{1024}{3^8}\overline{C_5}+\frac{648}{3^8}\overline{C_7}+\frac{1296}{3^8}\overline{C_8}+4\overline{C_9}$$

Если верно **утверждение 2** с формулой весов $C_{i,j}=C_iC_j, i,j=\overline{0,n_0}$ и сохранением алгебраического порядка точности таким же, как и в одномерном случае (равен семи для $n_0=6$), то условия 1)-6) должны выполняться тождественно, а условия 7),8),9) имеют погрешность. Учитывая(8) получим

$$\overline{C_0}=C_3C_3=\left(\frac{68}{105}\right)^2=\frac{4624}{11025};\overline{C_1}=C_3C_4=\frac{68}{105}\frac{9}{140}=\frac{612}{14700};\overline{C_2}=C_4C_4=\left(\frac{9}{140}\right)^2=\frac{81}{19600};$$

$$\overline{C_3}=C_3C_5=\frac{68}{105}\frac{18}{35}=\frac{1224}{3850};\overline{C_4}=C_4C_5=\frac{9}{140}\frac{18}{35}=\frac{162}{4900};\overline{C_5}=C_5C_5=\left(\frac{18}{35}\right)^2=\frac{324}{1225};$$

$$\overline{C_6}=C_3C_6=\frac{68}{105}\frac{41}{420}=\frac{2788}{44100};\overline{C_7}=C_4C_6=\frac{9}{140}\frac{41}{420}=\frac{369}{58800};\overline{C_8}=C_5C_6=\frac{18}{35}\frac{41}{420}=\frac{738}{14700};$$

$$\overline{C_9} = C_6 C_6 = \left(\frac{41}{420}\right)^2 = \frac{1681}{176400}. \qquad (28)$$

Подставим коэффициенты(28) $\overline{C_i}$ $i = \overline{0,9}$ в интегральную квадратурную формулу (26) для двойного интеграла от произвольной непрерывной функции $f(x,y)$ проверяя справедливость $C_{i,j} = C_i C_j, i,j = \overline{0,n_0}$ . Результаты проверки собраны в таблице 3.

Таблица 3

| | | |
|---|---|---|
| $f(x,y) \equiv 1$ | $num(1) = 3.9999999999999996$ | $exact(1) = 4.0000000000000000$ |
| $f(x,y) = x^2$ | $num(2) = 1.3333333333333333$ | $exact(2) = 1.3333333333333333$ |
| $f(x,y) = x^4$ | $num(3) = 0.4444444444444444$ | $exact(3) = 0.4444444444444444$ |
| $f(x,y) = x^2y^2$ | $num(4) = 0.7999999999999999$ | $exact(4) = 0.8000000000000000$ |
| $f(x,y) = x^6$ | $num(5) = 0.5714285714285714$ | $exact(5) = 0.5714285714285714$ |
| $f(x,y) = x^4y^2$ | $num(6) = 0.2666666666666666$ | $exact(6) = 0.2666666666666667$ |
| $f(x,y) = x^8$ | $num(7) = 0.4707818930041152$ | $exact(7) = 0.4444444444444444$ |
| $f(x,y) = x^6y^2$ | $num(8) = 0.1904761904761905$ | $exact(8) = 0.1904761904761905$ |
| $f(x,y) = x^4y^4$ | $num(9) = 0.0905820105820106$ | $exact(9) = 0.1600000000000000$ |

В первом столбце указана функция, во втором - численное значение правой части (26), в третьем столбце точное значение интеграла от указанной функции (левая часть(26)). **И**з таблицы 3, что квадратурная интегральная формула (26) имеет *седьмой алгебраический порядок точности* по определению 2 (учитывая тривиальное тождество 0=0 для функции $f(x,y) = x^l y^s, l+s = 7$ (27)) .

*Нами показано, что с использованием тождества $C_{i,j} = C_i C_j, i,j = \overline{0,n_0}$ $n_0 = 6$ двухмерная квадратурная формула (26) имеет седьмой алгебраический порядок точности для произвольной функции $f(x,y) \in C^{n_0+2}([-1,1]\times[-1,1])$ и этот порядок совпадает с порядком одномерной формулы.*

**Замечание.** Из формул (18),(19) для функций с разделяющимися переменными следует равенство алгебраических порядков точности двойных(18) (тройных(19)) квадратурных формул с учётом $C_{i,j} = C_i C_j \,(C_{i,j,s} = C_i C_j C_s), i,j,s = \overline{0,n_0}$ алгебраическому порядку точности одномерной квадратурной формулы(7) . Действительно, перемножая интегральные суммы, точные для многочленов степени $m$, получим двойные или тройные интегральные суммы точные для многочленов того же порядка.

Проверим численно, используя в программе формулы (20),(8) для тройного интеграла, что сохраняется алгебраический порядок точности такой же, как и в однократном интеграле, т.е. равный семи

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 e^x y^4 z^5 dxdydz = \frac{y^5 z^6}{30}\left(e^x - 1\right)\Big|_0^2 = \left(e^2 - 1\right)\frac{2^{11}}{30} = 436{,}1595630203324 \text{ ( 16 знач. цифр).}$$

Для небольших $N$ численно получим:

Если $N = 18$, программа возвращает значение eps=0.0000000000245057

int 3 =436.1595630310208100, exact=436.1595630203324300 $delta$ =0.0000000106883

Если $N = 36$, программа возвращает значение eps=0.0000000000000989

int 3 =436.1595630203755700, exact=436.1595630203324300 $delta$ =0.0000000000431

Определим порядок погрешности формул(20),(8) - при уменьшении шага сетки в 2 раза погрешность уменьшится в число раз:

$\left|\frac{delta_2}{delta_1}\right| = \frac{0.0000000106883}{0.0000000000431} = 248 \approx 256 = 2^8$ т.е. порядок погрешности равен 8(согласно определению 2).

**3. Интерполяция интегралов в полярной и сферической системах координат**

Рассмотрим равновеликое отображение обобщённых координат - полярных в кольце (круге) на прямоугольник в декартовой системе координат, сохраняющее площади фигур и равномерный шаг сетки вдоль всех координатных линий:

$b = r_2 - r_1, a = \pi(r_2 + r_1),$

где: $r_2, r_1 -$ внешний и внутренний радиусы кольца,

$a, b -$ стороны прямоугольника,

Тогда площадь кольца равна $S = ab = \pi(r_2^2 - r_1^2)$, где

$$0 \le x \le a, 0 \le y \le b, \frac{x}{a} = \frac{\varphi}{2\pi}, y = r - r_1, dx = \frac{a}{2\pi} d\varphi, dy = dr, h_1 = \frac{\pi(r_2 + r_1)}{n}, h_2 = \frac{(r_2 - r_1)}{n}.$$

При таком отображении оба берега разреза кольца вдоль радиуса $\varphi = 0 \to x = 0; \varphi = 2\pi \to x = a$ переходят в вертикальные стороны прямоугольника, внутренняя и внешняя окружности $r_1 = const \to y = 0; r_2 = const \to y = r_2 - r_1$ переходят в горизонтальные стороны прямоугольника.

По теореме 4(стр.282) [5]отображение $(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$ должно обладать следующими свойствами: якобиан замены координат $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r, x_\varphi \\ y_r, y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{a}{2\pi} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a}{2\pi} \ne 0$ во всех точках рассматриваемой области;

частные производные $x_r, x_\varphi, y_r, y_\varphi$ непрерывны во всех точках области; отображение $(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$ взаимно однозначно в силу линейности отображения обобщённых координат. Все требования выполнены, если область интегрирования - кольцо ( $r_1 \ne 0$ ). В случае круга ( $r_1 = 0$ ) выполнены первые 2 требования из трёх Третье - неоднозначность отображения в точке $r_1 = 0$ - не выполнено, что в данном интеграле несущественно, так как мера интеграла в полярных координатах в окрестности указанной точки $dI_2 = f(r,\varphi) r dr d\varphi = f(0,\varphi) 0 dr d\varphi = 0$.

$$I_2 = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} f(r,\varphi) r dr d\varphi = \int_0^b\int_0^a f\left(y + r_1, \frac{2\pi}{a}x\right)(y + r_1) dy \frac{2\pi}{a} dx = \frac{2\pi}{a}\int_0^{(r_2 - r_1)}\int_0^{\pi(r_2 + r_1)} f\left(y + r_1, \frac{2\pi}{a}x\right)(r_1 + y) dy dx =$$

$$\frac{2\pi}{\pi(r_2 + r_1)}\int_0^{(r_2 - r_1)}\int_0^{\pi(r_2 + r_1)} f\left(y + r_1, \frac{2\pi}{a}x\right)(r_1 + y) dy dx = \frac{2}{(r_2 + r_1)}\int_0^{(r_2 - r_1)}\int_0^{\pi(r_2 + r_1)} f\left(y + r_1, \frac{2\pi}{a}x\right)(r_1 + y) dy dx \approx$$

$$\approx \frac{2}{(r_2 + r_1)}\frac{n_0 h_1}{2}\frac{n_0 h_2}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} C_{i,j} f\left(r_1 + y_j, \frac{2\pi}{a}x_i\right)(r_1 + y_j) = \frac{n_0^2 h_1 h_2}{2(r_2 + r_1)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} C_{i,j} f\left(r_1 + jh_2, \frac{2\pi}{a} ih_1\right)(r_1 + jh_2) \quad (29)$$

Рассмотрим пример (ответ с 16 значащими цифрами):

$$\int_0^{10}\int_0^{2\pi} r^8 \sin^2(\varphi) r dr d\varphi = \left.\frac{r^{10}}{10}\right|_0^{10} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 10^9\left(\pi - \left.\frac{\sin 2\varphi}{4}\right|_0^{2\pi}\right) = 10^9\pi = 3141592653.589793$$

Программа для двойных интегралов в полярной системе координат с учётом формул(29),(13),(14):

при $n1 = 5, r_1 = 0.0, r_2 = 10.0$ возвращает значения (в программе $N \equiv n$ ):

n=14 k=1 numerical=3141521192.673302 exact=3141592653.589793 *delta* =71460.916492n=14 *epsilon* 14)=0.0000227467161950

n=28 k=2 numerical=3141592655.167346 exact=3141592653.589793 *delta* =-1.577553n=28 *epsilon* (28)=-0.0000000005021507

n=42 k=3 numerical=3141592653.589776 exact=3141592653.589793 *delta* =0.000017n=42 *epsilon* (42)=0.0000000000000055

n=56 k=4 numerical=3141592653.589798 exact=3141592653.589793 *delta* =-0.000005n=56 *epsilon* (56)=-0.0000000000000015

n=70 k=5 numerical=3141592653.589792 exact=3141592653.589793 *delta* =0.000001n=70 *epsilon* (70)=0.0000000000000005

v(1)=3141521192.673302 v(2)=3141592653.589776 v(3)=3141592653.589792 v(4)=3141592653.589798 v(5)=3141592655.167346

result: $k(opt)$ =5 $epsilon(5)$ =-0.0000000000000005

int(polar) =3141592653.589792, exact=3141592653.589793 $delta$ =-0.000001.

Мы видим, что значение интеграла в круге $r_1 = 0, r_2 = 10$ достигает двойной точности $epsilon = -5*10^{-16}$ и $n = 70$. Часто на практике неизвестно точное значение интеграла, например, оно не может быть выражено через элементарные функции. Поэтому в программе использован алгоритм медианной фильтрации, позволяющий из нескольких значений интеграла при малых параметрах $N = 14k$ выбрать значение с наименьшей относительной ошибкой, соответствующее центральному элементу окна фильтра (элемент массива $v[(n_1+1)/2], n_1 = 5$), как видно по результату программы. Медианная фильтрация применима здесь благодаря знакопеременности относительной погрешности $epsilon$ [7]. Получаемая численная погрешность не является случайной величиной и повторяет своё значение при запуске программы. Оптимальное значение числа узлов $k(opt)$ с наименьшей относительной ошибкой может быть найдено предварительно и фиксироваться в цикле при вычислении нескольких тысяч интегралов. В алгоритме(14) мы видим рациональные весовые коэффициенты с 10 значащими цифрами, тогда используя формулы (22),(25) получим произведение весовых коэффициентов с 20 и 30 значащими цифрами соответственно. Распространённые компиляторы обеспечивают только двойную точность(16 значащих цифр) относительной погрешности $epsilon$. Использование компиляторов с 32 верными знаками обеспечит эффективное применение алгоритма(14) без потери точности. Оценим порядок точности(22),(14) по первым 2 значениям $delta$:

$\left|\frac{delta(14)}{delta(28)}\right| = \left|\frac{71460.916492}{-1.577553}\right| = 45300 \approx 2^{16} = 65536$ *,т.е. погрешность пары (25),(13) имеет тот же 16 – ий порядок, что и порядок погрешности интегральных квадратур 15-го алгебраического порядка точности на отрезке и прямоугольнике, согласно замечанию 3 леммы, но применённым уже в полярной системе координат.*

Рассмотрим пример: $\int\limits_5^{10}\int\limits_0^{2\pi} r^8 \sin^2 \varphi r dr d\varphi = \pi \left.\frac{r^{10}}{10}\right|_5^{10} = \pi\left(10^{10} - 5^{10}\right)/10 = 3138524692.01402$

Для параметров $n1 = 5, r_1 = 5.0, r_2 = 10.0$ программа возвращает значения:

result: k(opt)=4 $epsilon$ (4)=0.0000000000000024

int(polar) =3138524692.0140295, exact=3138524692.014022 $delta$ =0.0000076

То есть в кольце формульная пара(29),(14)обеспечивает двойную точность относительной погрешности.

Рассмотрим равновеликое отображение обобщённых координат - сферической системы в шаре (шаровом слое) на декартовую систему в параллелепипеде, сохраняющее объёмы тел и равномерный шаг сетки вдоль всех координатных линий:

$$a = \pi(r_2 + r_1), b = \frac{4}{3}\left(\frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2}{r_2 + r_1}\right), c = r_2 - r_1,$$

где: $r_2, r_1 -$ внешний и внутренний радиусы шарового слоя,

$a, b, c -$ стороны параллелепипеда

Тогда объём шарового слоя $V = abc = \frac{4}{3}\pi\left(r_2^3 - r_1^3\right)$, где

$$0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c, \frac{x}{a} = \frac{\varphi}{2\pi}, \frac{\theta}{\pi} = \frac{y}{b}, z = r - r_1, dx = \frac{a}{2\pi}d\varphi, dy = \frac{b}{\pi}d\theta, dz = dr$$

$$z_k = kh_1, h_1 = \frac{c}{n}; y_j = h_2 j, h_2 = \frac{b}{n}j; x_i = h_3 i, h_3 = \frac{a}{n}i; i, j, k = \overline{0, n}$$

При отображении $x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi)$ внутренняя и внешняя сфера переходят в нижнюю и верхнюю грани параллелепипеда $r_1 = const \to z = 0; r_2 = const \to z = r_2 - r_1$. Сечения: $\varphi = 0 \to x = 0; \varphi = 2\pi \to x = a; \theta = 0 \to y = 0, \theta = \pi \to y = b$. По теореме 9 (стр.298)[5] отображение $x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi)$ должно обладать свойствами:

1) якобиан перехода $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} x_r, x_\theta, x_\varphi \\ y_r, y_\theta, y_\varphi \\ z_r, z_\theta, z_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2\pi} \\ 0 & \frac{b}{\pi} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{ab}{2\pi^2}\neq 0$ во всех точках рассматриваемой области;

2) частные производные $x_r, x_\theta, x_\varphi, y_r, y_\theta, y_\varphi, z_r, z_\theta, z_\varphi$ непрерывны во всех точках области; 3)отображение $x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi)$ взаимно однозначно.

Первые два требования выполнены всегда.

В сферическом слое или шаре не выполнено третье условие (однозначность отображения) в 2 азимутальных направлениях $\theta_1=0, \theta_2=\pi$ (особые направления) и в центре шара $r=0$. Мы можем проколоть сферический слой насквозь вдоль выбранных направлений, что топологически эквивалентно сфере с 1 ручкой. Сжать указанную область от полюсов к экватору так, что получится торообразный слой с плоскими боковыми гранями, разрезать его от оси симметрии плоскостью $\varphi=0$ и разогнуть полученное тело в параллелепипед. Вдоль особых направлений неоднозначность отображения нарушается, что, однако, не сказывается на мере интеграла в сферических координатах, так как во всех точках направлений $\theta=0, \theta=\pi, f(r,\theta,\varphi)r^2\sin(\theta)dr\theta d\varphi=0$. Для шара имеем ещё одну особую точку $r_1=0$, выполнены первые 2 требования гладкой замены переменных интегрирования кроме третьего (неоднозначность отображения в точке $r=0$). Что для интеграла несущественно, так как мера интеграла в сферических координатах в окрестности указанной точки: $dI_3 = f(r,\theta,\varphi)r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi = f(0,\theta,\varphi)0^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi=0$.

$$I_3=\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi)r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi=\int_0^c\int_0^b\int_0^a f\left(r_1+z,\frac{\pi y}{b},\frac{2\pi}{a}x\right)(r_1+z)^2 dz\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\frac{\pi}{b}dy\frac{2\pi}{a}dx$$

$$\frac{2\pi^2}{ab}\int_0^{r_2-r_1}\int_0^{\frac{4}{3}\left(\frac{r_2^2+r_1r_2+r_1^2}{r_2+r_1}\right)}\int_0^{\pi(r_2+r_1)} f\left(r_1+z,\frac{\pi y}{b},\frac{2\pi}{a}x\right)(r_1+z)^2\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)dzdydx=$$

$$\frac{3\pi}{2\left(r_2^2+r_1r_2+r_1^2\right)}\int_0^{r_2-r_1}\int_0^{\frac{4}{3}\left(\frac{r_2^2+r_1r_2+r_1^2}{r_2+r_1}\right)}\int_0^{\pi(r_2+r_1)} f\left(r_1+z,\frac{\pi y}{b},\frac{2\pi}{a}x\right)(r_1+z)^2\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)dzdydx=$$

$$\approx\frac{3\pi}{2\left(r_2^2+r_1r_2+r_1^2\right)}\frac{n_0h_1}{2}\frac{n_0h_2}{2}\frac{n_0h_3}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}C_{i,j,k}f\left(r_1+z_k,\frac{\pi y_j}{b},\frac{2\pi}{a}x_i\right)(r_1+z_k)^2\sin\left(\frac{\pi y_j}{b}\right)=$$

$$=\frac{3\pi n_0^3h_1h_2h_3}{16\left(r_2^2+r_1r_2+r_1^2\right)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}C_{i,j,k}f\left(r_1+kh_1,\frac{\pi}{b}h_2j,\frac{2\pi}{a}h_3i\right)(r_1+kh_1)^2\sin\left(\frac{\pi}{b}h_2j\right) \qquad (30)$$

Рассмотрим пример:

$$\int_5^{10}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(r^7\sin^2\varphi\sin\theta\right)r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi=\left.\frac{r^{10}}{10}\right|_5^{10}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)d\theta=\left(10^{10}-5^{10}\right)\frac{\pi^2}{20}$$

Программа для тройных интегралов в сферической системе координат с учётом формул (11),(30): возвращает значения (в программе $N\equiv n$):

n=10 k=1 numerical=4914074506.509758 exact=4929983057.770709 *delta* =-15908551.260951
*epsilon* (10)=-0.0032373443340911

n=20 k=2 numerical=4929989554.759921 exact=4929983057.770709 *delta* =6496.989212
*epsilon* (20)=0.0000013178505025

n=30 k=3 numerical=4929983057.770734 exact=4929983057.770709 *delta* =0.000025
*epsilon* (30)=0.0000000000000050

v(1)=4914074506.509758 v(2)=4929983057.770734 v(3)=4929989554.759921
result: n(opt)=3 eps(3)=0.0000000000000050

int =4929983057.770734, exact=4929983057.770709 $delta$ =0.000025.

По первым 2 значениям $delta$ при малых $N$ оценим порядок погрешности формул(26),(10):

$$2028 = 2^{11} < \left|\frac{delta(10)}{delta(20)}\right| = \left|\frac{= -15908551.260951}{6496.989212}\right| = 2449 < 2^{12} = 4096,$$ *что является хорошим подтверждением леммы для алгоритма(11) и квадратур с алгебраическим порядком точности равным 11, но применённым уже к тройному интегралу в сферической системе координат*.

**Выводы:**

1) Получены формулы и алгоритмы для составных интегральных квадратур с равномерным шагом,(7),(8);(10),(11);(13),(14) с 7,11,15 алгебраическим порядком точности соответственно.
2) Найдены аналоги формул (20)-(22), (23) – (25) для двойных на прямоугольнике и тройных в параллелепипеде интегралов с сохранением порядка погрешности, что и в одномерном случае.
3) Построены линейные отображения обобщённых координат с кольца (круга) на прямоугольник, с шарового слоя (шара) на параллелепипед, а также интегральные квадратуры(29) в полярной системе координат и(30) в сферической системе координат с сохранением алгебраического порядка точности, что проверено численно.

**Литература**

1)Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.:Наука, 2008.

2)Пикулин В.П.,Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. – М.:Наука,1995.

3)Н.С.Бахвалов, А.В.Лапин, Е.В.Чижонков. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.:БИНОМ. Лаборатория знаний,2010.

4) Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Об эффективном поиске безусловного экстремума гладких функционалов в конечномерных задачах. Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2016. – № 4 . –С. 119 – 131.

5) Бутузов В.Ф., Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин. Математический анализ в вопросах и задачах, – М. Физико – математическая литература, 2001 – 480 с.

6)Бартеньев О.В. “Математическая библиотека IMSL”.:(Ч1). – М .:Диалог МИФИ,2001. – 457 с.

7) Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу. Вестн. Полоцкого государственного ун-та. Серия С. Фундаментальные науки. – 2015. – № 4 . –С. 27 – 36.