

## МЕТОД ПОДОБИЯ В ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Голубева О.В., Ехилевский С.Г., Федченко Т.Н.

Полоцкий государственный университет

**Аннотация:** Решена задача максимального ослабления проникающего гамма - излучения многослойной стены жилого помещения (укрытия). Задача линейного программирования в нормальной форме решалась численно симплекс – методом. Доказана лемма о подобии решения ЗЛП. Утверждения леммы проверены с помощью программы. На основе леммы предложен графический алгоритм построения решения для произвольной толщины стены по решению с максимальной толщиной стены 1м (в том числе с дополнительными условиями). Сделана поправка на случай целочисленного программирования.

**Ключевые слова:** Радиационная безопасность, подобие решения однопараметрической задачи линейного программирования, симплекс метод, математическое моделирование.

### THE METHOD of the RESEMBLANCE In ONE PARAMETRIC PROBLEM of the LINEAR PROGRAMMING

Pastuhov D., Pastuhov YU., Golubeva O., Ehilevskiy S., Fedchenko T.

**The Abstract:** is Solved problem of the maximum weakening penetrating radiations laminated wall vein of the premises(the covertures). The Problem is actual for Belorussia. The Problem of the linear programming in normal form dared numerically simplex - a method. The Proved lemma about resemblance of the decision ZLP. Approving the lemma are numerically checked also by program. Graphic algorithm of the building of the decision is offered On base of the lemma for free thickness wall on decision for maximum thickness wall 100 refer to(including with additional condition).Correction is Made for event strained numerical programming.

**The Keywords:** Radiacionnaya safety, resemblance of the decision of one parametric problem of the linear programming, simplex - a method, mathematical modeling.

### Введение

В предлагаемой работе рассматривается задача максимального ослабления гамма – радиации в зависимости от стоимости  $1 \text{ м}^2$  многослойной стены жилого помещения. Обеспечить защиту от радиации необходимо различным рода укрытиям, армейским бункерам, расположенным в предполагаемых точках дислокации во время военных действий. Среди всех видов радиации наибольшей проникающей способностью является гамма – излучение [3]. Данная задача является особенно актуальной в последнее время в связи с увеличением в мире источников радиации. Одним из основных принципов нормативного документа НРБ – 2000 является принцип оптимальности, который требует максимальной защиты населения и окружающей среды от проникающей радиации при строительстве жилых помещений с учётом экономических факторов. В жилых помещениях наиболее незащищённой от радиации частью является оконный проём. Источники радиации направленного действия, расположенные на земле, не оказывают влияния на верхние этажи, начиная со второго, при достаточной защите стен и межэтажных перекрытий. Действие излучения диффузного типа, проникающего хаотично через окно от общего радиационного фона и из космоса, требует оценки. Рассмотрим окно в комнате максимальной площади  $dS = 2 * 2 = 4 \text{ м}^2$ . Человек, удалённый от окна на расстояние  $r = 2 \text{ м}$  получит долю радиации от окружающего радиационного фона  $\alpha = \frac{1}{4\pi} \frac{dS}{r^2} \approx 0.08 < 0.1(10\%)$ . Поэтому, стены жилого помещения должны ослаблять излучение более чем в 10 раз. То есть ослаблять до 10 % общий фон диффузно направленной радиации, действующей на человека, удалённого на 2м от окна. Во – вторых, исходная задача сводится к однопараметрической нормальной форме задачи линейного программирования с ограничениями типа неравенств и решается численно симплекс – методом. В работе доказана лемма (метод подобия в задаче линейного программирования). Лемма позволяет графически по формулам (5),(6),(7) получить решение задачи с произвольной максимальной толщиной стены по решению с максимальной толщиной в 1м. В – третьих, справедливость леммы проверена численными методами, т.е.данная задача представляет собой типичный пример математического моделирования.

### Постановка задачи и свойства решения задачи

Рассмотрим задачу максимального ослабления гамма-излучения стены некоторого жилого помещения, содержащего несколько слоёв строительных материалов. Самыми распространёнными из них являются, например, кирпич, сосна и бетон. Коэффициент ослабления гамма – радиации стеной из трёх слоёв в любой последовательности материалов даётся формулой[3]:

$$k(x_1, x_2, x_3) = 2 \left( \frac{x_1}{\Delta_1} + \frac{x_2}{\Delta_2} + \frac{x_3}{\Delta_3} \right) \rightarrow \min \quad (1)$$

Где:  $x_1, x_2, x_3$  - толщины слоёв из кирпича, сосны и бетона соответственно в м. Очевидно, что эти величины неотрицательны  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ ; толщины половинного ослабления

$\Delta_1 = 0.14\text{м}, \Delta_2 = 0.3\text{м}, \Delta_3 = 0.16\text{м}$  - кирпича, древесины и бетона соответственно. Учитывая сложный компонентный состав бетона, его прочности (марки М50-М300), рыхлости, добавления щебня, керамзита и др. компонентов,  $\Delta_3$  меняется в пределах (10-20)см – мы выбрали [4] значение  $\Delta_3 = 0.16\text{м}$  в задаче(1).

Обычно толщина стены не превосходит 1м.  $x_1 + x_2 + x_3 \leq x_0 = 1\text{м}$ . Тогда стоимость 1  $\text{м}^2$  стенки равна

$$C(\text{млн.руб}/\text{м}^2) = (C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3)$$

На период 01.12.2015 среднюю стоимость кубометра кирпича, сосны и бетона на строительных рынках Минской области находим  $C_1 = 1.7\text{млн.р./м}^3, C_2 = 2.5\text{млн.р./м}^3, C_3 = 0.8\text{млн.р./м}^3$ .

Получаем задачу на условный экстремум:

$$\begin{cases} k(x_1, x_2, x_3) = 2 \frac{(x_1 + x_2 + x_3)}{(\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)} \rightarrow \min(\inf) \\ C = (C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3) \leq C_{\text{var}} \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq x_0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Отметим, что в постановке задачи (2) величина  $C_{\text{var}}$  является параметром, в отличие от стоимости 1  $\text{м}^2$  стенки  $C$  при фиксированных толщинах ( $C \leq C_{\text{var}}$ ). Поэтому мы назвали задачи (2) и (3) однопараметрическими ЗЛП.

Напомним, что в задаче (3) максимальная толщина стенки  $x_0$  составляет 1м, данное ограничение возникает при проектировании одного или нескольких расположенных близко друг к другу зданий. Задача (2) равносильна задаче линейного программирования (3):

$$\begin{cases} d(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{\Delta_1} + \frac{x_2}{\Delta_2} + \frac{x_3}{\Delta_3} \right) \rightarrow \max(\sup) \\ (C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3) \leq C_{\text{var}} \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq x_0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ C_{\text{var}} \in [0, \max\{C_1, C_2, C_3\}] \equiv [0, C_{\text{var}}^0] \end{cases} \quad (3)$$

Задача (3) представляет собой нормальную форму постановки задачи линейного программирования и решается симплекс – методом, для этого нормальную форму необходимо привести к канонической форме введением дополнительных переменных[1]. Мы не будем сводить (3) к каноническому виду численного её решения, где параметр  $C_{\text{var}}$  в программе принимает до 250 различных эквидистантных значений (это число равно максимальному числу точек на графиках).

Предположим, что задача (3) имеет решение при  $x_0 = 1\text{м}$ , но мы хотим получить решение при максимальной толщине стенки  $m x_0\text{м}$  ( $m$  – безразмерная величина,  $m > 1$  либо ( $m < 1$ )). Докажем следующее утверждение:

**Лемма (метод подобия в ЗЛП).** Пусть существует однопараметрическое решение семейства задачи линейного программирования (ЗЛП) (3)  $\bar{x}_1(C_{\text{var}}), \bar{x}_2(C_{\text{var}}), \bar{x}_3(C_{\text{var}})$  (при  $x_0 = 1\text{м}$ ). Тогда решение задачи(4)(при допустимой толщине стены  $m x_0$ ) получаем из решения(3) методом подобия – однородным растяжением масштабов координатных осей в  $m$  раз, т.е.:

$$\bar{x}_1^{(4)}(C'_{\text{var}}) = m \bar{x}_1^{(3)}(m C_{\text{var}}), \bar{x}_2^{(4)}(C'_{\text{var}}) = m \bar{x}_2^{(3)}(m C_{\text{var}}), \bar{x}_3^{(4)}(C'_{\text{var}}) = m \bar{x}_3^{(3)}(m C_{\text{var}})$$

**Доказательство:**

Умножим каждое уравнение системы(3) на положительное число  $m$ , получим:

$$\begin{cases} D(x_1, x_2, x_3) = md(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{mx_1}{\Delta_1} + \frac{mx_2}{\Delta_2} + \frac{mx_3}{\Delta_3} \right) \rightarrow \max(\sup) \\ (C_1mx_1 + C_2mx_2 + C_3mx_3) \leq mC_{\text{var}} \\ mx_1 + mx_2 + mx_3 \leq mx_0 \\ mx_1 \geq 0, mx_2 \geq 0, mx_3 \geq 0 \\ mC_{\text{var}} \in [0, m \max\{C_1, C_2, C_3\}] = [0, mC_{\text{var}}^0] \end{cases}$$

Введём переменные  $y_1 = mx_1, y_2 = mx_2, y_3 = mx_3$ . Обозначим  $X_0 = mx_0, C'_{\text{var}} = mC_{\text{var}}$ , в новых переменных получим задачу (4):

$$\left\{ \begin{array}{l} D(y_1, y_2, y_3) = \left( \frac{y_1}{\Delta_1} + \frac{y_2}{\Delta_2} + \frac{y_3}{\Delta_3} \right) \rightarrow \max(\text{sup}) \\ (C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3) \leq C'_{\text{var}} \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq X_0 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \\ C'_{\text{var}} = mC_{\text{var}} \in [0, m \max\{C_1, C_2, C_3\}] = [0, mC_{\text{var}}^0] \end{array} \right. \quad (4)$$

Сравнивая задачи (3) и (4), мы видим, что (3) и (4) отличаются только обозначением переменных  $x_1, x_2, x_3$  и  $y_1, y_2, y_3$ , причём

$$y_1 = mx_1, y_2 = mx_2, y_3 = mx_3 \quad 0 \leq y_1 \leq mx_0, 0 \leq y_2 \leq mx_0, 0 \leq y_3 \leq mx_0,$$

$$\text{а также } C'_{\text{var}} = mC_{\text{var}}, 0 \leq C'_{\text{var}} \leq mC_{\text{var}}^0$$

что соответствует растяжению масштабов параметра  $C_{\text{var}}$  координатных осей  $x_1, x_2, x_3$ , и областей изменения переменных  $C_{\text{var}}^0, x_0$  в  $m$  раз.

Следовательно, если существует решение задачи (3), то существует и решение задачи (4), а решения связаны между собой соотношением подобия (ведь постановки (3) и (4) отличаются только буквенным обозначением):

$$\bar{x}_1^{(4)}(\bar{C}'_{\text{var}}) = m \bar{x}_1^{(3)}(m \bar{C}_{\text{var}}), \bar{x}_2^{(4)}(\bar{C}'_{\text{var}}) = m \bar{x}_2^{(3)}(m \bar{C}_{\text{var}}), \bar{x}_3^{(4)}(\bar{C}'_{\text{var}}) = m \bar{x}_3^{(3)}(m \bar{C}_{\text{var}}) \quad (5)$$

Лемма доказана.

Отметим также, что коэффициент ослабления радиации в задаче (2) согласно полученной лемме

$$D(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) = md(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \left( \frac{m\bar{x}_1}{\Delta_1} + \frac{m\bar{x}_2}{\Delta_2} + \frac{m\bar{x}_3}{\Delta_3} \right)$$

$$K(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) = K(m\bar{x}_1, m\bar{x}_2, m\bar{x}_3) = 2^{-m \left( \frac{\bar{x}_1}{\Delta_1} + \frac{\bar{x}_2}{\Delta_2} + \frac{\bar{x}_3}{\Delta_3} \right)} = \left( 2^{-\left( \frac{\bar{x}_1}{\Delta_1} + \frac{\bar{x}_2}{\Delta_2} + \frac{\bar{x}_3}{\Delta_3} \right)} \right)^m = \left( k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \right)^m \quad (6)$$

### Описание программы

Программа написана на языке *Fortran(Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.6.0)*. Подпрограмма *Dlprs* решает задачу линейного программирования [2]:

$\min(C^T x), x \in R^n$  с ограничениями  $bl \leq Ax \leq bu, xlb \leq x \leq xub$ . Для решения системы уравнений (3) используем библиотеку *imsl* с вызовом *use imsl*.

*call Ddlprs(m, nvar, a, Lda, b, b, c, irtipe, xlb, xub, obj, xsol, dsol)* – вызов подпрограммы,

$m = 2$  - число ограничений,  $nvar = 3$  - число переменных.  $a$  - массив формы  $(Lda, nvar)$  с матрицей системы уравнений (3) -  $m * nvar$ ,  $Lda \geq m, bl$  – вектор размера  $m$ , содержащий нижние границы ограничений общего вида;  $bu$  – содержит верхние границы ограничений общего вида.  $c$  – вектор размера  $nvar$ , содержащий коэффициенты целевой функции, *irtipe* - вектор размера  $m$ , указывающий тип ограничений.  $xlbu xub$  – левые и правые ограничения значений переменных; *obj* – значение целевой функции; *xsol* – вектор решений размера  $nvar$ ; *dsol* – вектор решений двойственной задачи линейного программирования. В программе по циклу выводится 250 точек при различных значениях  $C_{\text{var}} = 0 \div 2.5$  (млн.р./м<sup>2</sup>) шагом  $-0.01$ ,  $a = /17.0, 1.0, 25.0, 1.0, 80, 1.0/$ ; *irtipe* = /1, 1/, целевой вектор  $c = \backslash 1.0/14.0, 1.0/30.0, 1.0/16.0$ ;  $xlbu = /3 * 0.0/$ ;  $xub = /3 * -1e30/$ . Значение параметра *irtipe* = 0 - соответствует ограничению типа равенства, если *irtipe* = 1 (имеем ограничение типа  $\leq 0$ ), если *irtipe* = 2 (то ограничение вида  $\geq 0$ ). В нашей задаче (3) второе и третье уравнения соответствуют вектору *irtipe* = /1, 1/. Большая часть (3/4) написанной программы относится к записи массивов и к графике, решение ЗЛП – собственно 2 выделенные строки в программе. Строки  $c = -c, obj = -obj, dsol = -dsol$  необходимы для сведения задачи ЗЛП в нормальной форме на *max* к подпрограмме *Ddlprs* на *min* [2]. Для графики используется приложение *Compaq Array Viewer(Version 1.6.0)* Решаем задачу для частного случая  $x_0 = 1m$ , затем воспользуемся леммой для получения произвольного решения.

```
program dlprsTest
```

```
use dfimsl
```

```
integer(8), parameter :: m=2, nvar=3, n=2500, hn=10, Lda=m, mm=int(n/hn)+1
```

```

integer(4)::irtype(m)
real(4)::a(Lda,nvar),b(m),c(nvar),dsol(m),obj,xlb(nvar),xsol(nvar),xub(nvar),mas(5,mm)
real(4),allocatable::vrz(:,:)
!dec$attributes array_visualizer::vrz
data xlb/3*0.0,xub/3*-1e30,a / 17.0,1.0,25.0,1.0,8.0,1.0/irtype/1,1/
c(1)=1.0/14.0
c(2)=1.0/30.0
c(3)=1.0/16.0
c=-c
do i=1,mm
b(1)=dfloat(i*hn)
b(2)=100.0
mas(1,i)=b(1)
call dlprs(m,nvar,a,Lda,b,b,c,irtype,xlb,xub,obj,xsol,dsol)
obj=-obj;dsol=-dsol
mas(2,i)=obj
mas(3,i)=xsol(1)
mas(4,i)=xsol(2)
mas(5,i)=xsol(3)
print*, 'objective=',obj
print*, 'primal solution',xsol
enddo
allocate(vrz(2,mm))
do i=1,mm
vrz(1,i)=mas(1,i)*1d-3
vrz(2,i)=mas(3,i)
end do
call vGraph(vrz,mm)
deallocate(vrz)
allocate(vrz(2,mm))
do i=1,mm
vrz(1,i)=mas(1,i)*1d-3
vrz(2,i)=mas(5,i)
end do
call vGraph(vrz,mm)
deallocate(vrz)
allocate(vrz(2,mm))
do i=1,mm
vrz(1,i)=mas(1,i)*1d-3
if(exp(-log(2.0)*mas(2,i))<=(1e-1))then
vrz(2,i)=(exp(-log(2.0)*(mas(2,i))))
else
vrz(1,i)=0
vrz(2,i)=0
endif
end do
call vGraph(vrz,mm)
deallocate(vrz)
end program dlprsTest
subroutine vGraph(fun,nvalues) ! графический вывод 2-мерных изображений
use avdef
use avviewer
use dflib
integer(4)::nvalues
real(4)::fun(2,nvalues)
integer(4)::hv,status,nError
character(2)::key
character(av_max_label_len)::ylabel='x,sm'
character(av_max_label_len)::xlabel='C'
call faglStartWatch(fun,status)
print*, "Starting Array Viewer"
call favStartViewer(hv,status)
if (status/=0)then

```

```

    call favGetErrorNo(hv,nError,status)
if(nError/=0)then
    print*,"Array Viewer reports error",nError
    stop
end if
end if
call favSetArray(hv,fun,status)
call favSetArrayName(hv,"Wind stream",status)
call favSetGraphType(hv,VectorGraph,status)
call favSetUseAxisLabel(hv,x_axis,1,status)
call favSetUseAxisLabel(hv,y_axis,2,status)
call favSetAxisLabel(hv,x_axis,xLabel,status)
call favSetAxisLabel(hv,y_axis,yLabel,status)
call favShowWindow(hv,av_true,status)
print*,"Press any key to close down the viewer"
key=getcharqq()
call favEndViewer(hv,status)
call faglEndWatch(fun,status)
end subroutine vGraph

```

### Анализ полученных результатов

1) Численные решения, полученные программой для слоя кирпича (рис.1 и рис.4) и слоя бетона (рис.2 и рис.5) не содержат слоя древесины. Другими словами, древесина не может быть использована для защиты от гамма радиации (разве что только в качестве декоративного и утеплительного материала)  $\bar{x}_2^{(3)}(\overline{C'_{var}}) \equiv 0$ ,  $\bar{x}_2^{(4)}(\overline{C'_{var}}) \equiv 0$ . Для простоты на графиках  $\overline{C'_{var}}$  обозначается буквой С(верхние индексы (3) и(4) соответствуют исходному и решению полученному преобразованием подобия соответственно).

2) Все графики рис.1 – рис.6 соответствуют непрерывным и кусочно дифференцируемым функциям. После второго излома на всех графиках в точке  $(\overline{C'_{var}})_{2point} = (mC_{var})_{2point} = C_1m$  все решения и коэффициент ослабления гамма радиации стабилизируются и дальнейший рост денежных ресурсов не улучшают ослабления радиации  $k$  (рис.3,рис.6). В данной постановке задач (3) и (4) существенно ограничение в виде неравенства  $(C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3) \leq C_{var}$ , содержащее параметр  $C_{var}$ .

3) Пары графиков рис.1 и рис.4, а также рис.2 и рис.5 совпадают при совмещении координатных осей. Рис.1 и рис.2 получены программой с параметрами  $C_{var}^0 = \max\{C_1, C_2, C_3\} = 2500(m500(.m^2))$ ,  $b(2) = x_0 = 1(m)$ , а рис.4 и рис.5 получены программой с параметрами  $mC_{var}^0 = 1250(m0(m\alpha^2))$ ,  $b(2) = mx_0 = 0.5(m)$ . Другими словами, рис.4 и рис.5 можно получить однородным по двум осям растяжением соответственно рис.1 и рис.2 в  $m=1/2$  раз. Т.е. мы численно убедились в справедливости формулы (5) при  $m = \frac{1}{2}$

$$\bar{x}_1^{(4)}(\overline{C'_{var}}) = \frac{1}{2} \bar{x}_1^{(3)}\left(\frac{1}{2} \overline{C'_{var}}\right), \bar{x}_2^{(4)}(\overline{C'_{var}}) = \frac{1}{2} \bar{x}_2^{(3)}\left(\frac{1}{2} \overline{C'_{var}}\right), \bar{x}_3^{(4)}(\overline{C'_{var}}) = \frac{1}{2} \bar{x}_3^{(3)}\left(\frac{1}{2} \overline{C'_{var}}\right).$$

И косвенно в справедливости доказанной леммы (верхние индексы (3) и (4) имеют исходное решение и преобразованное графически с масштабом  $m$  соответственно).

4) Просмотр точек излома графика (коэффициента поглощения радиации  $k$  - рис.3) с большим увеличением требует введения дополнительного условия:

$$k(\bar{x}_1^{(3)}(\overline{C'_{var}}), \bar{x}_2^{(3)}(\overline{C'_{var}}), \bar{x}_3^{(3)}(\overline{C'_{var}})) = k(\overline{C'_{var}}) \leq 0.1 \quad (K^2(\overline{C'_{var}}) \leq 0.1), \text{ обозначим } \overline{C'^{in}_{var}} : k(\overline{C'^{in}_{var}}) = 0.1. \quad (7)$$

Согласно формуле (6)  $k(\bar{x}_1^{(3)}, \bar{x}_2^{(3)}, \bar{x}_3^{(3)}) = \left(K(\bar{x}_1^{(4)}, \bar{x}_2^{(4)}, \bar{x}_3^{(4)})\right)^{1/m}$ ,  $k(\bar{x}_1^{(3)}, \bar{x}_2^{(3)}, \bar{x}_3^{(3)}) = K^2(\bar{x}_1^{(4)}, \bar{x}_2^{(4)}, \bar{x}_3^{(4)})$ .

Связь между графиками рис.3 и рис.6 найдём, используя формулу:

$$K^2(\bar{x}_1^{(4)}(\overline{C'_{var}}), \bar{x}_2^{(4)}(\overline{C'_{var}}), \bar{x}_3^{(4)}(\overline{C'_{var}})) = K^2\left(\frac{\bar{x}_1^{(3)}}{2}, \frac{\bar{x}_2^{(3)}}{2}, \frac{\bar{x}_3^{(3)}}{2}\right) = k(\bar{x}_1^{(3)}(\overline{C'_{var}}), \bar{x}_2^{(3)}(\overline{C'_{var}}), \bar{x}_3^{(3)}(\overline{C'_{var}})).$$

Последняя формула связывает график квадрата коэффициента ослабления  $K^2$  рис.6(левая часть) преобразованного решения с графиком коэффициента ослабления  $k$  рис3 (правая часть) исходного решения.

Поскольку:

$K^2 \left( \frac{\overline{C_{var}^{in}}}{2} \right) = 0.1 = k \left( \overline{C_{var}^{in}} \right)$ , Т.е. из крайней левой точки  $\left( \overline{C_{var}^{in}}, 0.1 \right)$  рисунка 3 мы получаем крайнюю левую точку  $\left( \frac{\overline{C_{var}^{in}}}{2}, 0.1 \right)$  рис.6 сжатием горизонтальной оси в  $m$  раз.  $\left( C' \right)_{var}^{in} = m C_{var}^{in}$

5) Таким образом, нами указан **алгоритм графического решения** (формулы (5),(6),(7)) задачи максимального ослабления гамма – радиации с произвольной максимальной толщиной стены **по единственному численному решению** с максимальной толщиной стены жилого помещения 1м.

6) Утверждения леммы для задач (2), (3) остаются справедливыми для любого конечного числа переменных.

Задача ЗЛП решается численно библиотекой imsl с любым числом переменных (числом слоёв многокомпонентной конструкции стены).

7) Задача имеет один важный инвариант. Как видно из рисунков, при условии, что  $C_{var} \geq \min\{C_1, C_2, C_3\} = C_{var}^{00}$  ( $C'_{var} = m C_{var} \geq m * \min\{C_1, C_2, C_3\} = m C_{var}^{00}$ ), толщина стены равна максимальному значению  $x_0 (m x_0)$ , т.е. сохраняется. Этот инвариант даёт дискретную поправку задачи (целочисленное программирование). Действительно, число кирпичей в слое может быть только целым. Пользуясь формулами (5), (6), (7), мы получаем непрерывное решение слоёв кирпича и бетона от стоимости 1 м<sup>2</sup> стены  $\overline{x_1(C_{var})}, \overline{x_3(C_{var})}$ . Округлим число кирпичей до целого числа в меньшую сторону (знак[] – означает целую часть числа),  $h$  - толщина 1 кирпича.

$$n_1^{diskr} = \left[ \overline{x_1(C_{var})} / h \right], x_3^{diskr} = x_0 - h \left[ \overline{x_1(C_{var})} / h \right]. \left( x_1^{diskr} = h \left[ \overline{m x_1(C_{var})} / h \right], x_3^{diskr} = m x_0 - h \left[ \overline{m x_1(C_{var})} / h \right] \right)$$

Учитывая большую стоимость кубометра кирпичей чем бетона, мы заменяем дробную часть слоя одного кирпича, на такую же часть бетона, при этом стоимость слоя стенки может только уменьшится, неравенство  $(C_1 x_1 + C_3 x_3) \leq C_{var}$  заменяется на неравенство  $(C_1 x_1^{diskr} + C_3 x_3^{diskr}) \leq C_{var}$ , что не противоречит второму неравенству системы(4). Замена слоя кирпичей с избытком приведёт к неравенству  $(C_1 x_1^{diskr} + C_3 x_3^{diskr}) > C_{var}$ , которое принципиально изменит постановку задачи (4), что недопустимо.

Метод подобия часто использовали академик Андрей Николаевич Колмогоров, профессора МГУ Анастасия Алексеевна Сперанская, Елена Петровна Анисимова в работах по гидродинамики и теории турбулентности.

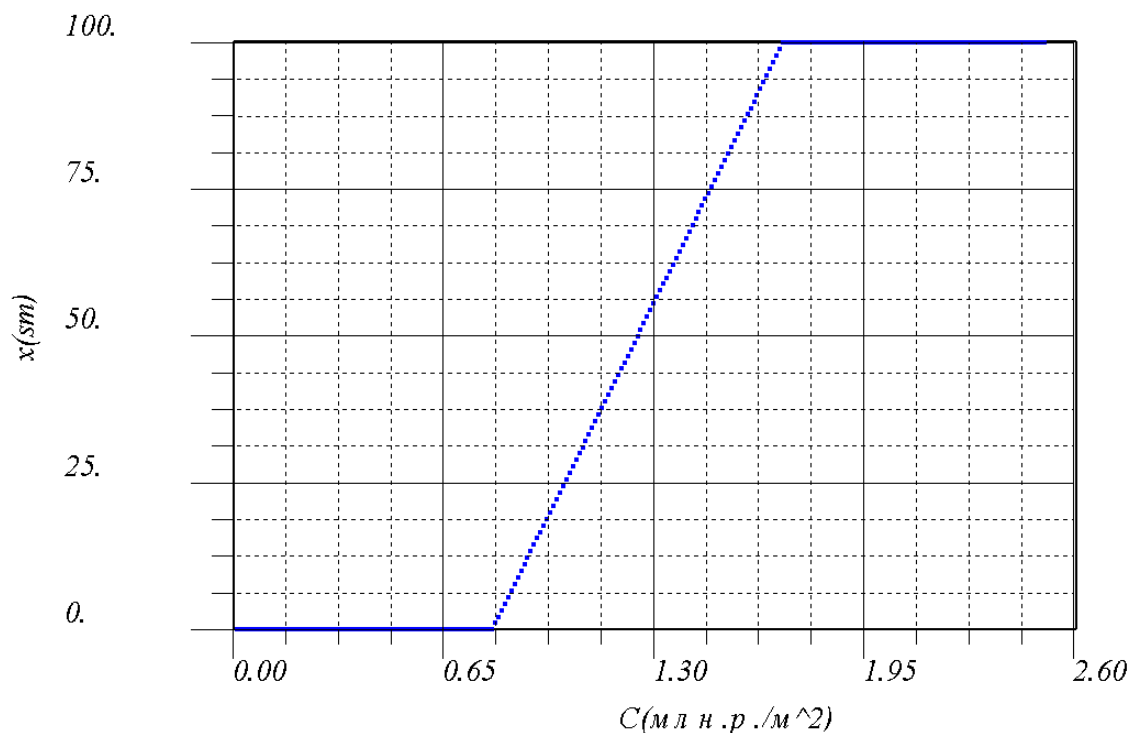


Рис.1 Зависимость толщины слоя кирпича ( $m=1$ )  $\Leftrightarrow x_0 = 1$ м от стоимости 1 м<sup>2</sup> стенки  $C$ (млн.р./м<sup>2</sup>)

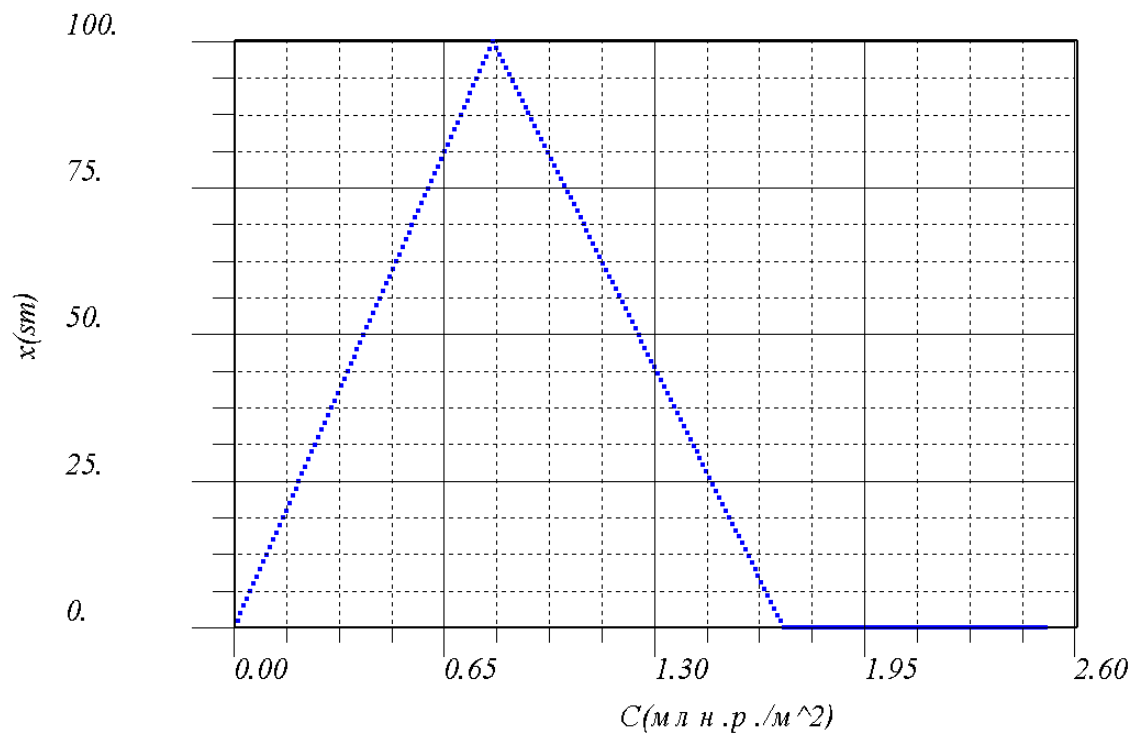


Рис.2.Зависимость толщины слоя бетона ( $m=1$ )  $\Leftrightarrow x_0 = 1\text{м}$  от стоимости 1 м<sup>2</sup> стенки  $C(\text{млн.р./м}^2)$

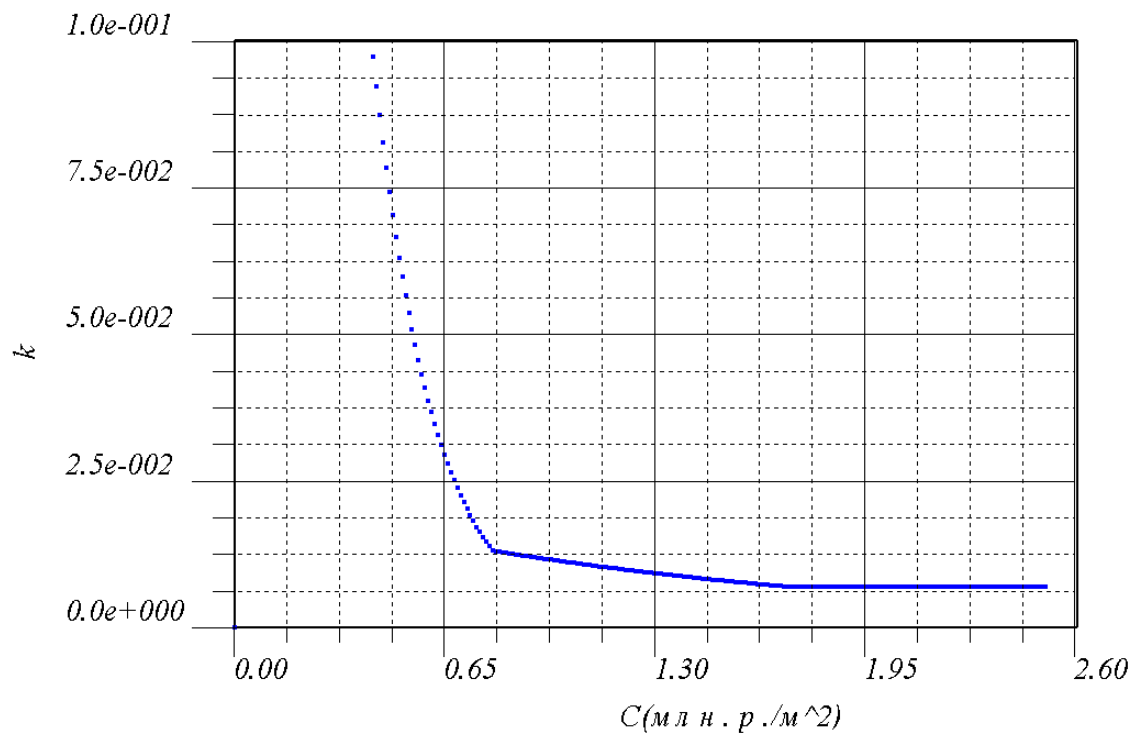


Рис.3 Зависимость коэффициента поглощения гамма – излучения  $k$  ( $m=1$ )  $\Leftrightarrow x_0 = 1\text{м}$  от стоимости 1 м<sup>2</sup> стенки  $C(\text{млн.р./м}^2)$  с ограничением  $k \leq 0.1$ .

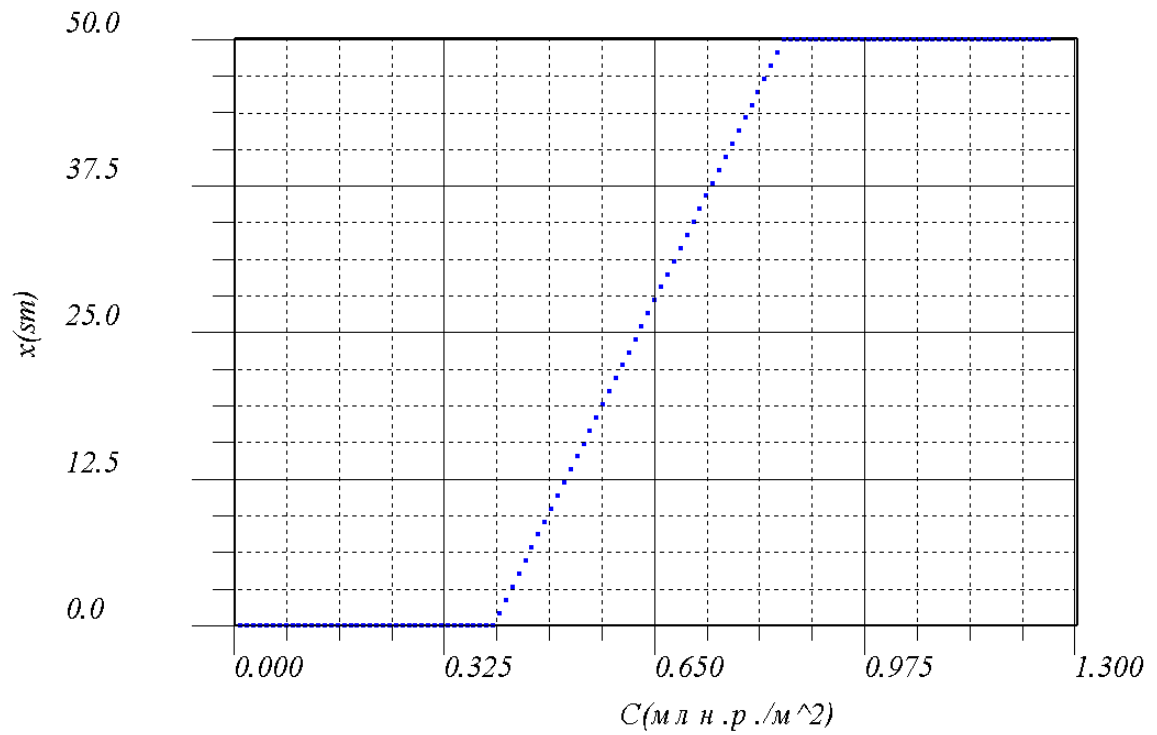


Рис.4.Зависимость толщины слоя кирпича  $\left(m = \frac{1}{2}\right)$  от стоимости 1 м<sup>2</sup> стенки  $C$ (млн.р./м<sup>2</sup>)

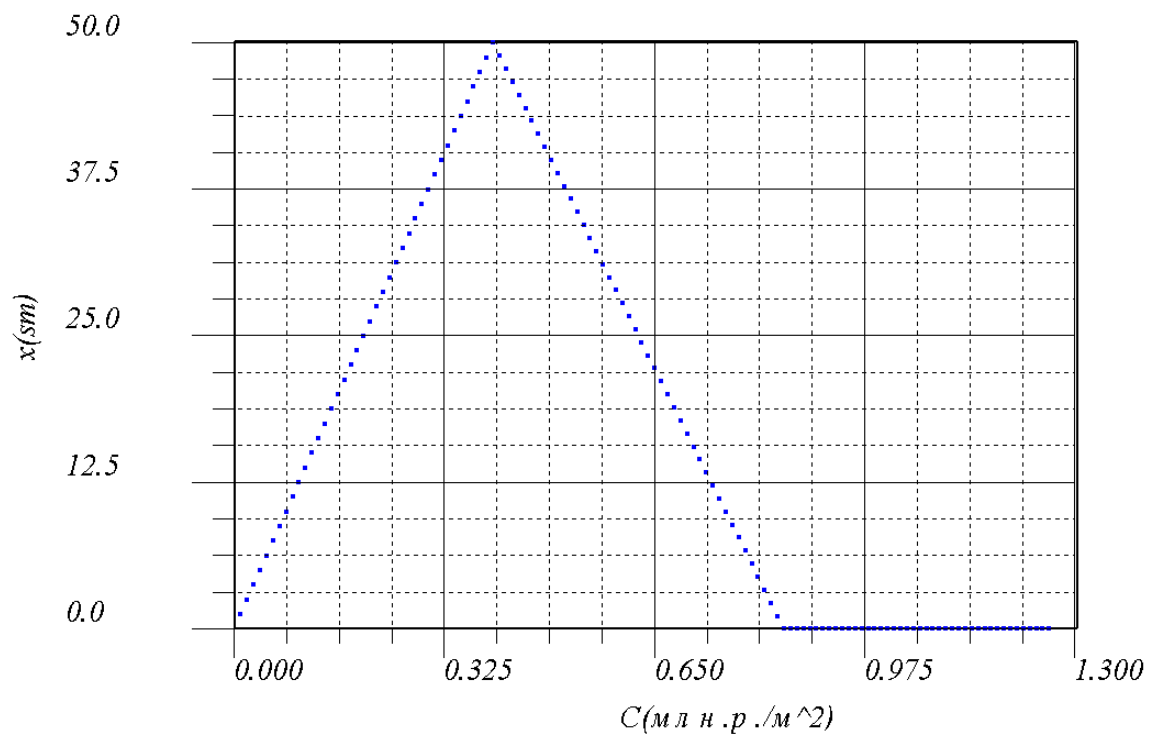


Рис.5 Зависимость толщины слоя бетона  $\left(m = \frac{1}{2}\right)$  от стоимости 1 м<sup>2</sup> стенки  $C$ (млн.р./м<sup>2</sup>)



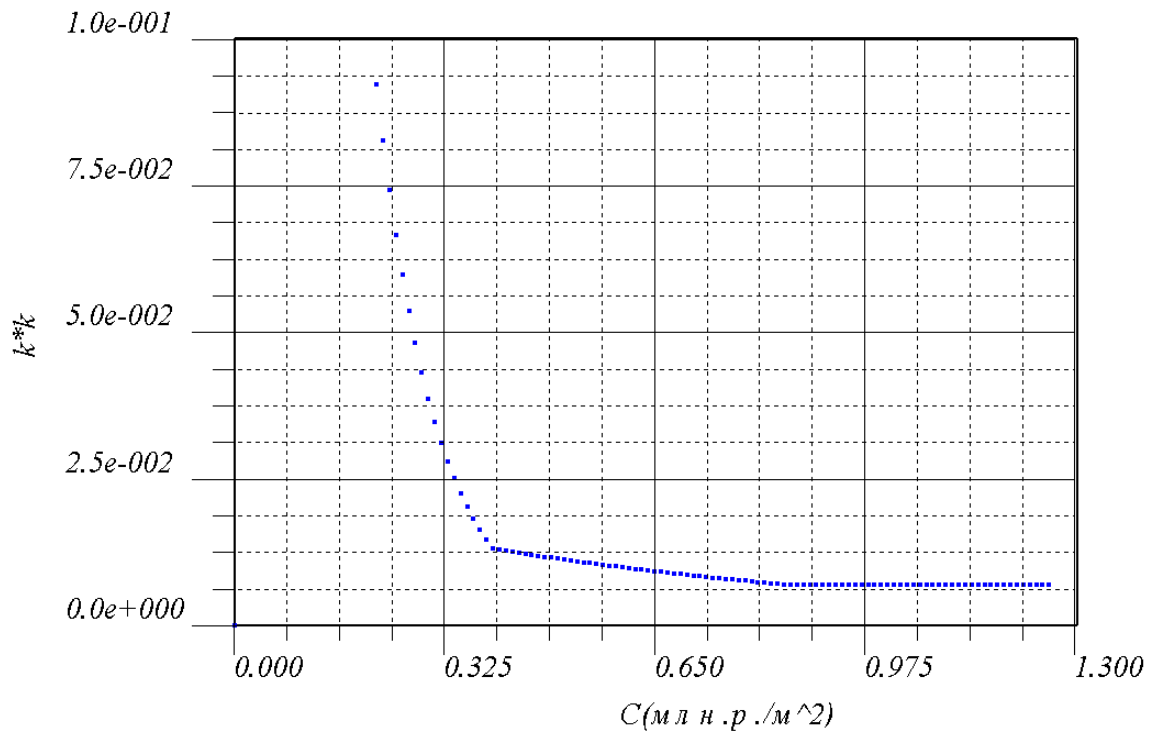


Рис.6 Зависимость квадрата поглощения гамма излучения  $k^2 \left( m = \frac{1}{2} \right)$  от стоимости 1 м<sup>2</sup> стенки  $C$  (млн.р./м<sup>2</sup>) с ограничением  $k^2 \leq 0.1$ .

8) Рассмотрим пример. Пусть к стене здания предъявлены ограничения – максимальная толщина  $X_0 = 0.5$  м при максимальной допустимой стоимости  $C_{\text{var}} = 0.65$  (млн.р./м<sup>2</sup>). Вычисляем масштабный коэффициент  $m = X_0/x_0 = 0.5/1 = 0.5$ . Для максимальной толщины 1 м допустимая стоимость составит  $C_{\text{var}} = C_{\text{var}}'/m = 0.65/0.5 = 1.3$  (млн.р./м<sup>2</sup>). По рис.1 и рис.2 находим толщины слоёв кирпича и бетона соответственно  $x_1 = 50 + 25/4 = 56.25$  см,  $x_3 = 50 - 25/4 = 43.75$  см. Тогда толщины слоёв кирпича и бетона для  $X_0 = 0.5$  м будут  $y_1 = mx_1 = 28.125$  см,  $y_3 = mx_3 = 21.875$  см. С учётом поправки на целое число единиц кирпича (берём с недостатком, т.к.  $C_1 = 1.7$  млн р/м<sup>2</sup> >  $C_3 = 0.8$  млн р/м<sup>2</sup>), например, 5 кирпичей толщиной 5 см (25 < 28.125 см). Тогда  $y_1 = 25$  см,  $y_3 = X_0 - y_1 = 50 - 25 = 25$  см. Получим, что остаточная стоимость  $\Delta C = C_{\text{var}}' - y_1 C_1 - y_3 C_3 = 0.65 - 0.25(1.7 + 0.8) = 0.025$  млн р/м<sup>2</sup> > 0. Что согласуется со вторым неравенством системы (4). Коэффициент ослабления для рис.3 для  $C_{\text{var}} k = (3/8) * 0.025 = 0.009375$ . Тогда по формуле (6)  $K = k^m = 0.009375^{0.5} = 0.0968$ . Из-за поправки слоёв на целочисленность сохранилась 1 значащая цифра (25 и 28.125 см). Поэтому округляем значение ослабления до 1 верного знака  $K \approx 0.1$ . Полученная оптимальная конструкция стены ослабит радиацию в 10 раз.

#### Выводы

- 1) Решена задача максимального ослабления проникающего излучения многослойной стены жилого помещения (укрытия).
- 2) Задача линейного программирования в нормальной форме решена симплекс – методом.
- 3) Доказана лемма о подобии решения ЗЛП. Утверждения леммы проверены численно программой.
- 4) На основе леммы предложен графический алгоритм нахождения решения с произвольной толщиной стены по решению с максимальной толщиной стены 1 м (в том числе с дополнительными условиями). Сделана поправка на случай целочисленного программирования.

#### Литература

- 1) Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – Изд. – во Моск. Ун – та, 1989. – 204с.: ил.
- 2) Бартенев О.В. “Математическая библиотека IMSL”. (ЧЗ). – М.: Диалог МИФИ, 2001. – 368 с.
- 3) Сивухин Д.В. “Атомная и ядерная физика”. В 2 – х ч. Ч.2. Ядерная физика. – Наука. Гл. ред. Физ. – мат. лит. 1989. – 416с. – (Общий курс физики. Т.5)
- 4) Ковчур С.Г. и др. “Радиационная безопасность”. – Витебск: УО “ВГТУ”, 2006. – 175 с.