

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕКЛАМНОГО АГЕНСТВА И ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ ФИРМ

Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Голубева О.В., Ехилевский С.Г., Федченко Т.Н.,
Зязюля П.В., Сорокин П.В.

THE MATHEMATICAL MODEL OF REKLAME AGENCY And TWO RIVAL COMPANIES

Аннотация: Приведена математическая модель экспансии фирмы с плохим качеством товара и рекламного агентства на фирму с высоким качеством товара. Возможны два режима блокировки и отток большей доли покупателей города от фирмы с хорошим качеством продукции – устойчивый фокус и устойчивый узел.

Ключевые слова: Математическая модель, система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим две конкурирующие фирмы, выпускающие однотипные изделия, например, обувь. У изделий первой фирмы качество товаров ниже, чем у второй, и, она пользуется услугами рекламного агентства для увеличения спроса своего товара.

Динамику изменения числа покупателей товаров первой фирмы N_1 , второй N_2 можно описать системой 2 нелинейных безразмерных [1] дифференциальных уравнений первого порядка (усложнённая модель А.А.Самарского [2] на случай двух переменных):

$$\begin{cases} \frac{d\bar{N}_1}{dt} = (-\bar{\alpha}_1 + \bar{N}_1\bar{\beta}_1 + \bar{c}_1\bar{N}_2)(1 - \bar{N}_1 - \bar{N}_2) \\ \frac{d\bar{N}_2}{dt} = (\bar{\alpha}_2 - \bar{N}_2\bar{\beta}_2 - \bar{c}_2\bar{N}_1)(1 - \bar{N}_1 - \bar{N}_2) \end{cases} \quad \bar{N}_1 = \frac{N_1}{N_0}, \bar{N}_2 = \frac{N_2}{N_0}, \bar{t} = \frac{t}{T_0}, \quad 0 \leq \bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{t} \leq 1 \quad (1)$$

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 T_0, \bar{\alpha}_2 = \alpha_2 T_0, \bar{\beta}_1 = \beta_1 T_0 N_0, \bar{\beta}_2 = \beta_2 T_0 N_0, \bar{c}_1 = c_1 T_0 N_0, \bar{c}_2 = c_2 T_0 N_0, \bar{t} = t/T_0.$$

Где: N_0 - население города с потенциальной возможностью покупки товара обеих фирм, T_0 рассматриваемый промежуток времени (\bar{t} - безразмерное время). N_1, N_2 - число покупателей товара 1 и 2 фирм соответственно. Второй множитель в правой части системы $1 - \bar{N}_1 - \bar{N}_2$ равен оставшейся доле потенциальных покупателей в городе. Скорость покупателей товара второй фирмы $\frac{d\bar{N}_2}{dt}$ пропорциональна $1 - \bar{N}_1 - \bar{N}_2$ с коэффициентом рекламы первого порядка $\bar{\alpha}_2$, скорость $\frac{d\bar{N}_1}{dt}$ пропорциональна $1 - \bar{N}_1 - \bar{N}_2$ с коэффициентом $-\bar{\alpha}_1$ ($\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$) (рекламное агентство превозносит достоинства товара второй фирмы в ущерб товару первой фирмы).

Реклама второго порядка генерируется покупателями и соответствует умножению доли покупателей \bar{N}_1 с коэффициентом $\bar{\beta}_1 > 0$ (качественным товаром) и умножению \bar{N}_2 на отрицательный коэффициент $-\bar{\beta}_2$ с дешёвым некачественным товаром. Коэффициенты \bar{c}_1, \bar{c}_2 моделируют отношение покупателей товара одной фирмы к товару противоположной фирмы (реклама второго порядка). Покупатели товара первой фирмы с долей \bar{N}_1 хвалят свою покупку и осуждают качество второй фирмы (коэффициенты $\bar{\beta}_1, -\bar{c}_2$ соответственно). Недовольные покупатели с долей \bar{N}_2 низким качеством второй фирмы предполагают высокое качество у первой фирмы (коэффициенты $-\bar{\beta}_2, \bar{c}_1$ соответственно). В выбранной нами модели безразмерные коэффициенты порядка единицы (т.к. коэффициенты в левой части (1) равны 1, иначе некоторые слагаемые в системе (1) можно удалить) отражают стоимость, качество товара и отношение покупателей $\bar{\alpha}_1 = 0.7, \bar{\alpha}_2 = 0.7, \bar{\beta}_1 = 0.75, \bar{\beta}_2 = 0.97, \bar{c}_1 = 1.07, \bar{c}_2 = 0.9$.

Предположим, что поворот точки с фазовыми координатами (\bar{N}_1, \bar{N}_2) на угол 2π происходит раньше истечения гарантийного срока. Магазины принимают возвращённый товар от покупателей по первому их требованию до истечения гарантийного срока, т.е.

возможна ситуация $\frac{d\bar{N}_1}{dt} < 0, \frac{d\bar{N}_2}{dt} < 0$. Определим[3] стационарную точку $(\bar{N}_{01}, \bar{N}_{02})$ для системы уравнений(1):

$$\begin{cases} \frac{d\bar{N}_1}{dt} = 0 \Leftrightarrow (-\bar{\alpha}_1 + \bar{N}_{10}\bar{\beta}_1 + c_1\bar{N}_{20}) = 0 \\ \frac{d\bar{N}_2}{dt} = 0 \Leftrightarrow (\bar{\alpha}_2 - \bar{N}_{20}\bar{\beta}_2 - c_2\bar{N}_{10}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{N}_{10} = \frac{\bar{\alpha}_2 c_1 - \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2}{c_1 c_2 - \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2} \approx 0.297. \\ \bar{N}_{20} = \frac{\bar{\alpha}_1 c_2 - \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1}{c_1 c_2 - \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2} \approx 0.446 \end{cases} \quad (2)$$

В новых переменных $\bar{n}_1 = \bar{N}_1 - \bar{N}_{10}, \bar{n}_2 = \bar{N}_2 - \bar{N}_{20}$ из (1) в окрестности особой точки (0,0) получим систему уравнений (3):

$$\begin{cases} \frac{d\bar{n}_1}{dt} = (\bar{n}_1 \bar{\beta}_1 + c_1 \bar{n}_2)(1 - \bar{N}_{10} - \bar{N}_{20} - \bar{n}_1 - \bar{n}_2) \approx (\bar{n}_1 \bar{\beta}_1 + c_1 \bar{n}_2)(1 - \bar{N}_{10} - \bar{N}_{20}) \\ \frac{d\bar{n}_2}{dt} = (-\bar{n}_2 \bar{\beta}_2 - c_2 \bar{n}_1)(1 - \bar{N}_{10} - \bar{N}_{20} - \bar{n}_1 - \bar{n}_2) \approx (-\bar{n}_2 \bar{\beta}_2 - c_2 \bar{n}_1)(1 - \bar{N}_{10} - \bar{N}_{20}) \end{cases} \quad (3)$$

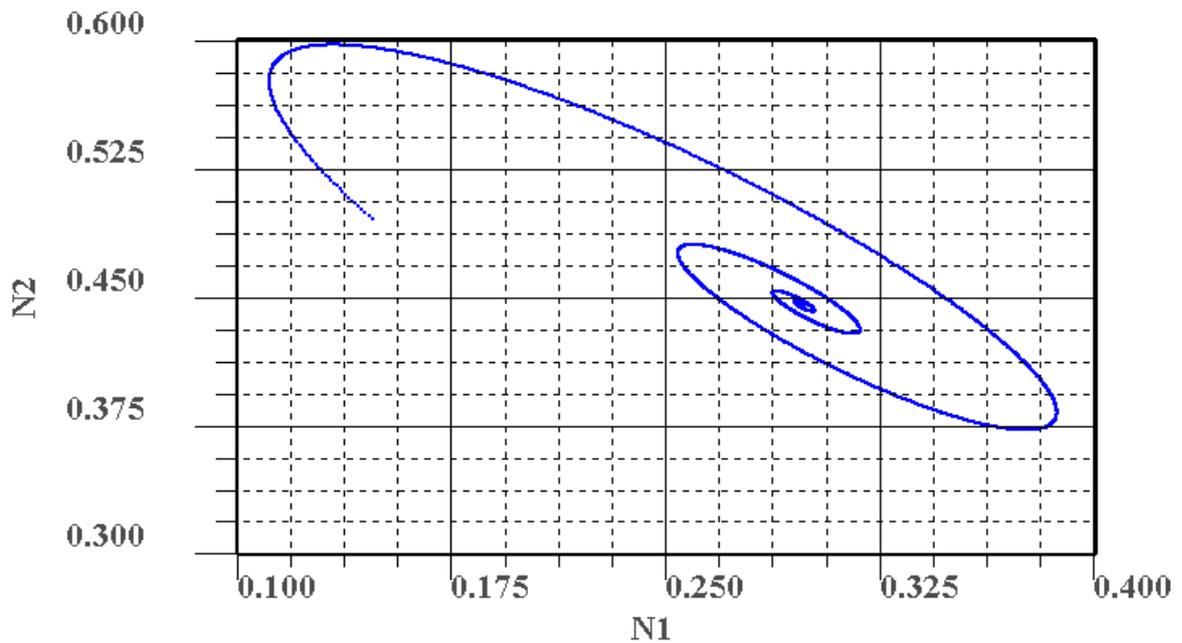


Рис.1 Зависимость $\bar{N}_2(\bar{N}_1)$: $\bar{\alpha}_1 = 0.7, \bar{\alpha}_2 = 0.7, \bar{\beta}_1 = 0.75, \bar{\beta}_2 = 0.97, \bar{c}_1 = 1.07, \bar{c}_2 = 0.9$, с начальными условиями $\bar{n}_1 = -0.15, \bar{n}_2 = 0.05$ и временным шагом $h_t = 0.03$ (уст. фокус).

Характеристическое уравнение для собственных значений (3) $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} \bar{\beta}_1(1 - \bar{N}_{10} - \bar{N}_{20}) - \lambda & c_1(1 - \bar{N}_{10} - \bar{N}_{20}) \\ -c_2(1 - \bar{N}_{10} - \bar{N}_{20}) & -\bar{\beta}_2(1 - \bar{N}_{10} - \bar{N}_{20}) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = (1 - \bar{N}_{10} - \bar{N}_{20}) \left(\frac{\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2)^2}{4} - 4c_1 c_2} \right)$$

По классификации особых точек [3] если особая точка $(n_1 = 0, n_2 = 0)$ является устойчивым фокусом (в линейном приближении), то

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_2 > \bar{\beta}_1, (\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2)^2 - 4c_1 c_2 < 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2} \leq \frac{\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2}{2} < \sqrt{c_1 c_2} \Rightarrow \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 < c_1 c_2. \\ \cdot \bar{N}_{10} > 0, \bar{N}_{20} > 0, \frac{\bar{\beta}_2}{c_1} < \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1} < \frac{c_2}{\bar{\beta}_1} &\Rightarrow \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 < c_1 c_2. \end{aligned}$$

Численно решим нелинейную систему уравнений(3) методом Рунге – Кутты 4-го порядка (результаты приведены на рис.1).

Если особая точка $(n_1 = 0, n_2 = 0)$ - устойчивый узел [3], то

$$\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2 + \sqrt{(\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2)^2 - 4c_1 c_2} < 0 \Leftrightarrow \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 < c_1 c_2, \bar{\beta}_2 > \bar{\beta}_1, \frac{\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2}{2} > \sqrt{c_1 c_2} > \sqrt{\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2}$$

$$\overline{N_{10}} > 0, \overline{N_{20}} > 0, \frac{\overline{\beta_2}}{c_1} < \frac{\overline{\alpha_2}}{\alpha_1} < \frac{\overline{c_2}}{\beta_1} \Rightarrow \overline{\beta_1 \beta_2} < \overline{c_1 c_2} (\overline{N_{10}} = 0.144, \overline{N_{20}} = 0.225).$$

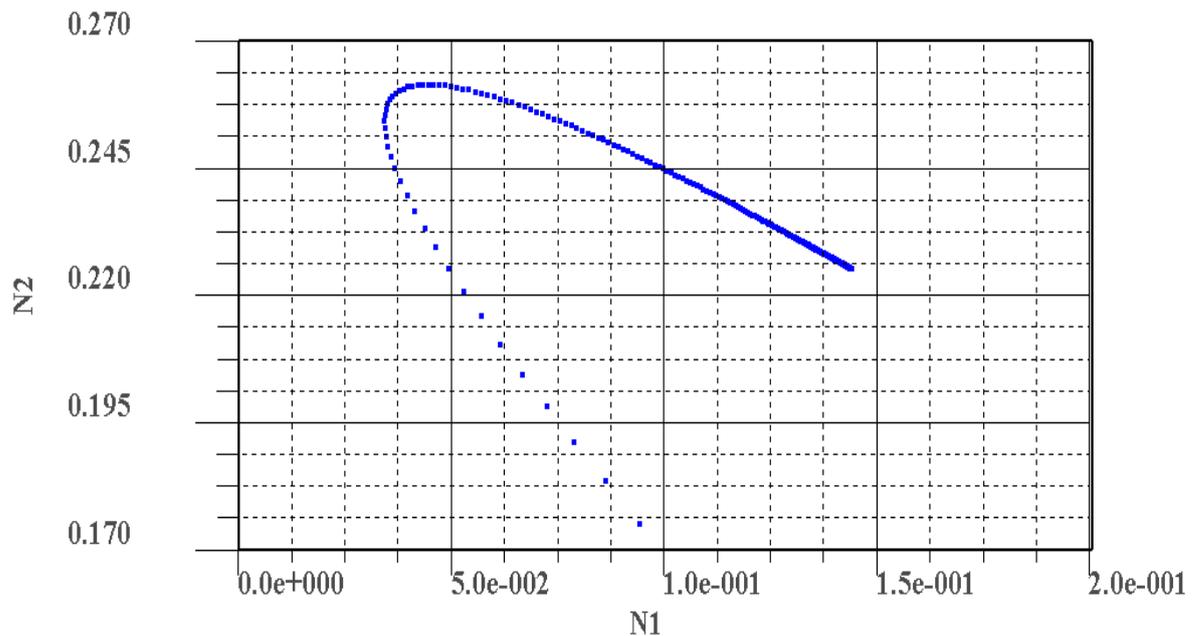


Рис.2 Зависимость $\overline{N_2}(\overline{N_1})$: $\overline{\alpha_1} = 0.8, \overline{\alpha_2} = 0.8, \overline{\beta_1} = 0.8, \overline{\beta_2} = 2.88, \overline{c_1} = 1.05, \overline{c_2} = 3.04$, с начальными условиями $\overline{n_1} = -0.05, \overline{n_2} = -0.05$ и шагом сетки $h_t = 0.03$ (уст. узел).

Из рис.1, рис.2 видно, что система уравнений(3) направляет любую начальную точку, удалённую от стационарной точки по каждой переменной (на рис.1 не более чем на 0.15, на рис.2 не более чем на 0.05) в стационарную точку. Стационарная точка - устойчивое состоянием системы бесконечное время, в котором вторая фирма с плохим качеством товара имеет почти вдвое больше покупателей, чем фирма с высоким качеством товара и большей стоимостью. Вторым недостатком – изоляция большей доли покупателей.

Вывод. Приведена математическая модель экспансии фирмы с плохим качеством товара и рекламного агентства на фирму с высоким качества товара. Возможны два режима блокировки и отток большей доли покупателей города от фирмы с хорошим качеством продукции – устойчивый фокус и устойчивый узел, в последнем случае разорение фирмы с хорошим качеством товара происходит скорее.

Литература:

- 1) Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М: Наука. Физмат. лит. 1977. – 435 с.
- 2) Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. – М.: Физмат лит. 2001. – 320 с. – ISBN 5-9221-0120-X.
- 3) Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М: Наука. Физмат лит. 1992. – 128 с.

The Abstract: is Brought mathematical model to expansions of the company with bad quality of goods and advertising agency on company with high quality of goods. Possible two locks mode and reduction of the greater share of the buyers of the city from company with goodnesses of the product - a firm focus and firm node.

The Keywords: Mathematical model, system of the nonlinear differential first-order equations.