УДК 517.6:517.958

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХ- И ПЯТИДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.К. Волосова (аспирант Московского государственного технического университета МГТУ им. Н.Э. Баумана);

К.А. Волосов, профессор, д.ф. - м.н. (МИИТ), А.К. Волосова, к.ф.- м.н. (ООО "Трамплин"), г. Москва;

к. ф.-м. н., доц. Д.Ф. Пастухов, к. ф.-м. н., доц. Ю.Ф. Пастухов

(***Полоцкий государственный университет***)

Предложен алгоритм векторного аналога прогонки для решения произвольных матричных уравнений с квадратными трех- и пятидиагональными матрицами за конечное число арифметических вычислений. Доказаны достаточные условия корректности векторных формул прогонки для произвольных трех-диагональных матриц (теорема 1) и достаточные условия для пятидиагональных матриц Теплица (теорема 2). Приведенные программа и два примера показывают, что данные алгоритмы являются точными. Предложен численный алгоритм для предельных значений коэффициентов прогонки вперед (теорема 3), показано, что полученные численные предельные значения не противоречат теореме 2.

Ключевые слова: *векторный аналог метода прогонки, трех- и пятидиагональные матрицы, матрица Теплица, выпуклые множества, параллельные вычисления.*

Введение. Матрицы и матричные уравнения специального типа применяются во многих разделах прикладной математики. В квантовой механике динамика частиц со спином определяется матрицами кватернионов (полукватернионов)[1,2]. Другой пример, одним из методов решения эллиптических уравнений математической физики численными методами является метод прогонки[3,4,5,12,13]. Здесь используются матрицы диагонального вида. Алгебраический метод прогонки, используемый построчно на прямоугольной сетке совместно с формулой простой итерации[5] является приближенным методом, так как число итераций не ограничено, но имея формулы с аппроксимацией дифференциальных операторов с высоким порядком погрешности можно значительно снизить число и время вычислений[5]. В данной работе рассмотрен векторный аналог метода прогонки для решения матричных уравнений с квадратными матрицами трех- и пятидиагонального типа за конечное число арифметических действий. Если диагональная матрица, соответствующая разностным уравнениям прогонки имеет постоянные коэффициенты на главной диагонали и на двух (четырёх) диагоналях параллельным главной, то матрица коэффициентов называется матрицей Теплица. В данной работе доказаны необходимые условия корректности формул прогонки для произвольных трехдиагональных матриц и для пятидиагональных симметрических матриц Теплица, решаемых векторным аналогом метода прогонки. Сегодня необходимо рассматривать также численные задачи с параллельными вычислениями[3,4,7,8,11]. Поэтому для решения пятидиагональных матричных уравнений в работе рассмотрены два алгоритма последовательного и параллельного вычисления.

Постановка задачи

Рассмотрим матричное уравнение, в котором неизвестная матрица X, а также заданные матрицы A – матрица левой части, и матрица правой части уравнения F являются квадратными порядка n.

$$AX = F \qquad (1)$$

Кроме того, в матричном уравнении (1) рассмотрим матрицу A трехдиагонального, или пяти-диагонального типа соответственно, у которых коэффициенты удовлетворяют условиям (2)

$$\begin{cases} a_{i,j} = 0, \ |i-j| > 1 \\ a_{i,j} \neq 0, |i-j| \leq 1 \end{cases}; i, j = \overline{1,n} \qquad \begin{cases} a_{i,j} = 0, \ |i-j| > 2 \\ a_{i,j} \neq 0, |i-j| \leq 2 \end{cases}; i, j = \overline{1,n} \qquad (2)$$

Учитывая условие(2), уравнение (1) запишем подробно для трехдиагональных матриц

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0\dots. & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34}\,0\dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0\dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,n-1} & x_{1,n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n-1} & x_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \dots & x_{n-1,n-1} & x_{n-1,n} \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,n-1} & x_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12}\cdots & f_{1.n-1} & f_{1.n} \\ f_{21} & f_{22}\cdots & f_{2,n-1} & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2}\cdots & f_{n,n-1} & f_{n,n} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Транспонируем уравнение(1) и его подробную запись (3), получим соответственно формулы(4),(5)

$$AX = F \Leftrightarrow X^T \cdot A^T = F^T \qquad (4)$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n-1,1} & x_{n,1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n-1,2} & x_{n,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,n-1} & x_{2,n-1} & \dots & x_{n-1,n-1} & x_{n,n-1} \\ x_{1,n} & x_{2,n} & \dots & x_{n-1,n} & x_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & 0\dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0\dots. & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_{43}\,0\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\dots & a_{n-2,n-1} & a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ 0 & 0\dots & 0 & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21}\cdots & f_{n-1,1} & f_{n,1} \\ f_{12} & f_{22}\cdots & f_{n-1,2,} & f_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1,n} & f_{2,n}\cdots & f_{n-1,n} & f_{n,n} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Последнее матричное уравнение(5) с учетом условий(2) равносильно системе векторных уравнений (6)

$$\begin{cases} x_{11}a_{11} + x_{21}a_{12} = f_{11}, x_{12}a_{11} + x_{22}a_{12} = f_{12}, ..x_{1j}a_{11} + x_{2j}a_{12} = f_{1j}, \forall j = \overline{1,n} \Leftrightarrow a_{11}x^1 + a_{12}x^2 = f^1 \\ x_{11}a_{21} + x_{21}a_{22} + x_{31}a_{23} = f_{21}, ...x_{1j}a_{21} + x_{2j}a_{22} + x_{3j}a_{23} = f_{2j}, \forall j = \overline{1,n} \Leftrightarrow a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 = f^2 \\ x_{k-1,1}a_{k,k-1} + x_{k,1}a_{k,k} + x_{k+1,1}a_{k,k+1} = f_{k,1}, x_{k-1,j}a_{k,k-1} + x_{k,j}a_{k,k} + x_{k+1,j}a_{k,k+1} = f_{k,j}, \forall j = \overline{1,n}, k = \overline{2,n-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_{k,k-1}x^{k-1} + a_{k,k}x^k + a_{k,k+1}x^{k+1} = f^k, \forall k = \overline{2,n-1} \\ x_{n-1,1}a_{n,n-1} + x_{n,1}a_{n,n} = f_{n,1}, ..x_{n-1,j}a_{n,n-1} + x_{n,j}a_{n,n} = f_{n,j}, \forall j = \overline{1,n} \Leftrightarrow a_{n,n-1}x^{n-1} + a_{n,n}x^n = f^n \end{cases} \qquad (6)$$

В векторной системе уравнений (6) в k-ое уравнение входят строки с номерами k-1,k,k+1 решения X – матрицы с коэффициентами из k-ой строки матрицы A и с k-ой строкой матрицы F(его правой части).

$$\begin{cases} a_{11}x^1 + a_{12}x^2 = f^1 \\ a_{k,k-1}x^{k-1} + a_{k,k}x^k + a_{k,k+1}x^{k+1} = f^k, \forall k = \overline{2,n-1} \\ a_{n,n-1}x^{n-1} + a_{n,n}x^n = f^n \end{cases} \qquad (7)$$

Будем искать решение рекуррентно заданной системы векторных уравнений (7) в виде(8)

$$x^k = \lambda_k x^{k+1} + \nu_k, k = \overline{1,n-1} \qquad (8)$$

Из первого уравнения системы(7) имеем

$$x^1 = \frac{f^1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x^2 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}, \nu_1 = \frac{f^1}{a_{11}},$$

так как из (8) $x^{k-1} = \lambda_{k-1}x^k + \nu_{k-1}$, то преобразуем среднее уравнение системы(7) $a_{k,k-1}(\lambda_{k-1}x^k + \nu_{k-1}) + a_{kk}x^k + a_{k,k+1}x^{k+1} = f^k, x^k(a_{k,k-1}\lambda_{k-1} + a_{kk}) = -a_{k,k+1}x^{k+1} + f^k - a_{k,k-1}\nu_{k-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^k = \frac{-a_{k,k+1}}{(a_{k,k-1}\lambda_{k-1} + a_{kk})}x^{k+1} + \frac{f^k - a_{k,k-1}\nu_{k-1}}{(a_{k,k-1}\lambda_{k-1} + a_{kk})} \Leftrightarrow \lambda_k = \frac{-a_{k,k+1}}{(a_{k,k-1}\lambda_{k-1} + a_{kk})}, \nu_k = \frac{f^k - a_{k,k-1}\nu_{k-1}}{(a_{k,k-1}\lambda_{k-1} + a_{kk})}, k = \overline{2,n-1} \qquad (9)$$

Анализ размерности[6,9] показывает, что в формулах(8),(9) величины $\lambda_k, a_{k,k-1}, a_{kk}, a_{k,k+1}$ являются числами, а f^k, ν_k - векторами. Кроме того, последнее уравнение системы(7) имеет на одно слагаемое меньше, чем у среднего уравнения, поэтому и решение для последнего уравнения(7)следует искать не в виде(8), но в виде $x^n = \nu_n$. Используя(8) при k=n-1 уравнение $x^{n-1} = \lambda_{n-1} x^n + \nu_{n-1}$, последнее уравнение системы(7), получим

$$a_{n,n-1} x^{n-1} + a_{n,n} x^n = a_{n,n-1}\left(\lambda_{n-1} x^n + \nu_{n-1}\right) + a_{n,n} x^n = f^n \Leftrightarrow x^n\left(a_{n,n-1}\lambda_{n-1} + a_{n,n}\right) = f^n - a_{n,n-1}\nu_{n-1} \Leftrightarrow$$

$$x^n = \frac{f^n - a_{n,n-1}\nu_{n-1}}{\left(a_{n,n-1}\lambda_{n-1} + a_{n,n}\right)} = \nu_n \tag{10}$$

Система уравнений(9) называется формулами прогонки вперед, а уравнения(10),(8)- формулами прогонки назад. Рассмотрим тестовый пример (11) (вычисления проверяются напрямую перемножением матриц):

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 & 7 & 2 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 2 & 7 & 2 & 7 & 2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Трехдиагональная матрица из тестового примера(11) применяется для решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с шаблоном “крест” [3,стр. 584]. Программа, написанная нами на языке FORTRAN[7,8] с использованием алгоритма(8)-(11) возвращает решение (неизвестную матрицу X в примере (11)) по заданным матрицам A,F (смотрим таблицу 1)

Таблица 1. Решение, полученное программой с использованием алгоритма(8)-(10)

i/ j	1	2	3	4	5	6	7
1	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000
2	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000
3	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000
4	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000
5	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000
6	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000
7	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000	2.00000000000000	1.00000000000000

Замечание 1. Сравнение значений таблицы 1 и второй матрицы X из примера (11) показывает их полное совпадение с двойной точностью. Таким образом, алгоритм(8)-(10) является точным методом решения трех-диагональных уравнений (1) (за конечное число арифметических операций[3,4]) . Оценим число арифметических операций. Для вычисления x^n (по формуле(10)) - 3*n+2 операций, для λ_k - (3*(n-2)), для ν_k - (3*n+2)*(n-2)(по формуле(9)). Для вычисления x^k число операций составит по формуле(8) 2n*(n-1). Итого число арифметических операций: $N = 3n + 2 + 3n - 6 + 3n^2 - 4n - 4 + 2n^2 - 2n = 5n^2 - 8 \sim 5n^2.$

Теорема 1(достаточные условия устойчивости алгоритма (8)-(10)). Пусть выполнены условия:

1) $\left|a_{i,i}\right| \geq \left|a_{i,i-1}\right| + \left|a_{i,i+1}\right|, \forall i = \overline{1,n-1}, \forall i = \overline{2,n-1})$ трехдиагональная матрица A уравнения(1) с нестрогим диагональным преобладанием элементов и для первой и последней строк $\left|a_{1,1}\right| \geq \left|a_{1,2}\right| > 0, \left|a_{n,n}\right| > \left|a_{n,n-1}\right| > 0.$;

2) $\left\| f^i \right\| \leq \left\| f \right\| < \infty, \forall i = \overline{1,n-1};$

Тогда:1) $|\lambda_k| \le 1, \forall k = \overline{1,n-1}$

2)формулы прогонки (9),(10) корректны, то есть

$\|v_k\| < \infty, k = \overline{1,n-1}, \|x^k\| < \infty, k = \overline{1,n}$

Доказательство проведем по индукции. 1)Для **базы индукции** при k=1 имеем

$$|a_{1,1}| \ge |a_{1,2}| \Rightarrow |\lambda_1| = \frac{|a_{1,2}|}{|a_{1,1}|} \le 1 \; |\lambda_2| = \left|\frac{-a_{2,3}}{(a_{2,1}\lambda_1 + a_{22})}\right| \le \frac{|a_{2,3}|}{|a_{22}| - |a_{2,1}||\lambda_1|} \le \frac{|a_{2,3}|}{|a_{22}| - |a_{2,1}|} \le \frac{|a_{2,3}|}{|a_{2,3}|} = 1$$

База индукции проверена. **Индуктивный переход**. Так как

$|a_{i+1,i+1}| \ge |a_{i+1,i}| + |a_{i+1,i+2}|, |a_{i+1,i+1}| - |a_{i+1,i}| \ge |a_{i+1,i+2}|, \dfrac{1}{|a_{i+1,i+1}| - |a_{i+1,i}|} \le \dfrac{1}{|a_{i+1,i+2}|}$, и пусть верно

$$|\lambda_k| \le 1, \forall k = \overline{1,i} \Rightarrow |\lambda_{i+1}| \overset{(9)}{=} \frac{|-a_{i+1,i+2}|}{|a_{i+1,i}\lambda_i + a_{i+1i+1}|} \le \frac{|a_{i+1,i+2}|}{|a_{i+1i+1}| - |a_{i+1,i}||\lambda_i|} \le \frac{|a_{i+1,i+2}|}{|a_{i+1i+1}| - |a_{i+1,i}|} \le \frac{|a_{i+1,i+2}|}{|a_{i+1,i+2}|} = 1$$

Первая часть **теоремы 1** доказана $\forall k = \overline{1,n-1}$.

2)Обозначим $\|f^i\| = \max\limits_{\underline{j=1,n}} \|f_{i,j}\|, \|f\| \equiv \max\limits_{\underline{i=1,n}} \|f^i\|, \|v^i\| = \max\limits_{\underline{j=1,n}} \|v_{i,j}\|, \|v\| = \max\limits_{\underline{i=1,n-1}} \|v^i\|$. Так как

$$|\lambda_k| \le 1, \forall k = \overline{1,n-1}, |a_{k,k-1}\lambda_{k-1} + a_{kk}| \ge |a_{kk}| - |a_{k,k-1}||\lambda_{k-1}| \ge |a_{kk}| - |a_{k,k-1}| \ge |a_{k,k+1}| > 0 (a_{k,k+1} \ne 0) \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{|a_{k,k-1}\lambda_{k-1} + a_{kk}|} \le \frac{1}{|a_{k,k+1}|} < \infty, \forall k = \overline{1,n-1}.$$

База индукции: $|a_{1,1}| \ge |a_{1,2}| > 0, \|v_1\| = \dfrac{\|f^1\|}{|a_{11}|} \le \dfrac{\|f\|}{|a_{11}|} < \infty - \textit{проверена}$. **Индуктивный переход**, пусть $\|v_{k-1}\| < \infty, \|v_k\| = \dfrac{\|f^k - a_{k,k-1}v_{k-1}\|}{|a_{k,k-1}\lambda_{k-1} + a_{kk}|} \le \dfrac{\|f^k - a_{k,k-1}v_{k-1}\|}{|a_{k,k+1}|} \le \dfrac{\|f^k\| + |a_{k,k-1}|\|v_{k-1}\|}{|a_{k,k+1}|} \le \dfrac{\|f\| + |a_{k,k-1}|\|v_{k-1}\|}{|a_{k,k+1}|} < \infty, \forall k = 2, n-1$

$\|x^n\| = \dfrac{\|f^n - a_{n,n-1}v_{n-1}\|}{|a_{n,n-1}\lambda_{n-1} + a_{n,n}|} \le \dfrac{\|f^n\| + |a_{n,n-1}|\|v_{n-1}\|}{|a_{n,n}| - |a_{n,n-1}|} \le \dfrac{\|f\| + |a_{n,n-1}|\|v\|}{|a_{n,n}| - |a_{n,n-1}|} \overset{1)}{<} \infty$. По формуле(8) $|\lambda_k| \le 1, k = \overline{1,n-1}$

$$\|x^1\| \le \|x^2\| + \|v_1\| \le \|x^2\| + \|v\| \le \|x^3\| + 2\|v\| \le \|x^4\| + 3\|v\| \le \|x^n\| + (n-1)\|v\| < \infty, \|x^k\| < \infty, \forall k = \overline{1,n}$$

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим матричное уравнение(1) с пятидиагональной матрицей, то есть со вторым условием на коэффициенты(2). Повторяя рассуждения аналогичные (3)-(7), получим систему векторных уравнений(12)

$$\begin{cases} a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 = f^1 \\ a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 + a_{24}x^4 = f^2 \\ a_{k,k-2}x^{k-2} + a_{k,k-1}x^{k-1} + a_{kk}x^k + a_{k,k+1}x^{k+1} + a_{k,k+2}x^{k+2} = f^k, \forall k = \overline{3,n-2} \\ a_{n-1,n-3}x^{n-3} + a_{n-1,n-2}x^{n-2} + a_{n-1,n-1}x^{n-1} + a_{n-1,n}x^n = f^{n-1} \\ a_{n,n-2}x^{n-2} + a_{n,n-1}x^{n-1} + a_{n,n}x^n = f^n \end{cases} \qquad (12)$$

В системе уравнений (12) кроме известных элементов $a_{i,j}$ пятидиагональной матрицы заданы вектор – строки $f^i, i=\overline{1,n}$ правой части уравнения(1), $x^i, i=\overline{1,n}$ - неизвестные вектор – строки уравнения(1).

Аналогично (7), (8) будем искать решение третьей строки системы(12) в виде $x^k = \lambda_{1,k}x^{k+1} + \lambda_{2,k}x^{k+2} + \nu_k, k=\overline{1,n-2}$ (13)

Теория размерностей[6,9] показывает, что в(13) $\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}$ являются числами, а, ν_k как и x^k - векторами.

Выразим из первого уравнения(12) строку $x^1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x^2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x^3 + \frac{f^1}{a_{11}}$. Сравнивая последнее выражение x^1 с уравнением(13) при k=1, получим

$$\lambda_{1,1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}, \lambda_{2,1} = -\frac{a_{13}}{a_{11}}, \nu_{1,j} = \frac{f_j^1}{a_{11}}, j=\overline{1,n} \tag{14}$$

Подставим x^1 во второе уравнение(12), из которого, выражая затем x^2, получим

$$a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 + a_{24}x^4 = a_{21}\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}x^2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x^3 + \frac{f^1}{a_{11}}\right) + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 + a_{24}x^4 = f^2$$

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right)x^2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{11}}\right)x^3 + a_{24}x^4 = f^2 - \frac{a_{21}f^1}{a_{11}} \Leftrightarrow$$

$$x^2 = \left(\frac{a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}\right)x^3 - \left(\frac{a_{24}a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}\right)x^4 + \left(\frac{a_{11}f^2 - a_{21}f^1}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}\right)$$

Сравнивая последнее выражение и формулу(13) при k=2, получим коэффициенты:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}, \lambda_{2,2} = -\frac{a_{24}a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}, \nu_{2,j} = \frac{a_{11}f_j^2 - a_{21}f_j^1}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}, j=\overline{1,n} \tag{15}$$

В работе[5,стр.69] получены формулы для решения скалярного разностного уравнения

$$A_{1k}x_{k-2} + A_{2k}x_{k-1} - C_k x_k + B_{1k}x_{k+1} + B_{2k}x_{k+2} = f^k, \forall k = \overline{2,n-2} \tag{16}$$

С коэффициентами прогонки

$$\lambda_{1,k} = \frac{B_{1k} + A_{2k}\lambda_{2k-1} + A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{2k-1}}{C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}}, \lambda_{2,k} = \frac{B_{2k}}{C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}},$$
$$\nu_k = \frac{A_{1k}\lambda_{1k-2}\nu_{k-1} + A_{1k}\nu_{k-2} + A_{2k}\nu_{k-1} - F_k}{C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}}, k=\overline{3,n-2} \tag{17}$$

Сравнивая уравнения(16) с третьим уравнением системы(12), получим формулы для векторных формул метода прогонки в соответствии с(17)

$$\lambda_{1,k} = -\left(\frac{a_{k,k+1} + a_{k,k-1}\lambda_{2k-1} + a_{k,k-2}\lambda_{1k-2}\lambda_{2k-1}}{a_{k,k} + a_{k,k-2}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} + a_{k,k-2}\lambda_{2k-2} + a_{k,k-1}\lambda_{1k-1}}\right), \lambda_{2,k} = \frac{-a_{k,k+2}}{a_{k,k} + a_{k,k-2}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} + a_{k,k-2}\lambda_{2k-2} + a_{k,k-1}\lambda_{1k-1}},$$
$$\nu_{k,j} = -\left(\frac{a_{k,k-2}\lambda_{1k-2}\nu_{k-1,j} + a_{k,k-2}\nu_{k-2,j} + a_{k,k-1}\nu_{k-1,j} - F_{k,j}}{a_{k,k} + a_{k,k-2}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} + a_{k,k-2}\lambda_{2k-2} + a_{k,k-1}\lambda_{1k-1}}\right), k=\overline{3,n-2}, j=\overline{1,n} \tag{18}$$

Формулы(14),(15) совместно с (18) называются формулами прогонки вперед.

В настоящее время в численных методах актуально рассматривать задачи с параллельными вычислениями, когда несколько ядер процессора проводят однотипные вычисления для сокращения времени. Например, задачу(1) могут параллельно решать 2 ядра, если известно решение одной строки матрицы X. Для простоты, будем считать известной последнюю строку решения x^n и укажем формулы получения остальных строк. Выражая из последнего уравнения(12) x^{n-2}, получим

$$x^{n-2} = -\frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n-2}}x^{n-1} - \frac{a_{n,n}}{a_{n,n-2}}x^n + \frac{f^n}{a_{n,n-2}} \tag{19}$$

Используя уравнение(13) можем записать $x^{n-3} = \lambda_{1,n-3}x^{n-2} + \lambda_{2,n-3}x^{n-1} + \nu_{n-3}, k = n-3$, которое подставим в четвертое уравнение системы(12)

$$a_{n-1,n-3}x^{n-3} + a_{n-1,n-2}x^{n-2} + a_{n-1,n-1}x^{n-1} + a_{n-1,n}x^n = f^{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1,n-3}\left(\lambda_{1,n-3}x^{n-2} + \lambda_{2,n-3}x^{n-1} + \nu_{n-3}\right) + a_{n-1,n-2}x^{n-2} + a_{n-1,n-1}x^{n-1} + a_{n-1,n}x^n =$$

$$= \left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)x^{n-2} + \left(a_{n-1,n-3}\lambda_{2,n-3} + a_{n-1,n-1}\right)x^{n-1} + a_{n-1,n}x^n = f^{n-1} - a_{n-1,n-3}\nu_{k-3}$$

В последнее уравнение подставим x^{n-2} - правую часть формулы(19)

$$\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\left(-\frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n-2}}x^{n-1} - \frac{a_{n,n}}{a_{n,n-2}}x^n + \frac{f^n}{a_{n,n-2}}\right) + \left(a_{n-1,n-3}\lambda_{2,n-3} + a_{n-1,n-1}\right)x^{n-1} + a_{n-1,n}x^n = f^{n-1} - a_{n-1,n-3}\nu_{k-3} \Leftrightarrow$$

$$x^{n-1}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{2,n-3} + a_{n-1,n-1} - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n-2}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\right) = x^n\left(-a_{n-1,n} + \frac{a_{n,n}}{a_{n,n-2}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\right) +$$

$$+ f^{n-1} - a_{n-1,n-3}\nu_{k-3} - \frac{f^n}{a_{n,n-2}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right) \Leftrightarrow$$

$$x_j^{n-1} = \frac{x_j^n\left(-a_{n-1,n} + \frac{a_{n,n}}{a_{n,n-2}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\right) + f_j^{n-1} - a_{n-1,n-3}\nu_{k-3,j} - \frac{f_j^n}{a_{n,n-2}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)}{\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{2,n-3} + a_{n-1,n-1} - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n-2}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\right)}, j = \overline{1,n} \tag{20}$$

Сравнивая формулу(20) с решением второй строки системы(23) видно, что

$$\begin{cases} \lambda_{1,n-1} = \dfrac{\left(-a_{n-1,n} + \frac{a_{n,n}}{a_{n,n-2}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\right)}{\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{2,n-3} + a_{n-1,n-1} - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n-2}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\right)} \\ \nu_{n-1} = \dfrac{f_j^{n-1} - a_{n-1,n-3}\nu_{k-3,j} - \frac{f_j^n}{a_{n,n-2}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)}{\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{2,n-3} + a_{n-1,n-1} - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n-2}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\right)} \end{cases}, \ j = \overline{1,n} \tag{21}$$

Таким образом, получен алгоритм параллельного вычисления, сначала вычисляем коэффициенты по “формулам прогонки вперед” (14),(15),(18),(21). Далее, по известной строке x^n по формуле(20) получим x^{n-1}, а по “формулам прогонки назад” (20),(13) строки решения $x^k, k = \overline{n-2,1}$. Имея уравнение (1) с матрицами порядка 2n+1 с известной строкой x^{n+1},первый процессор вычисляет строки с 1 по n,сверху – вниз, (для него последняя строка с номером n+1). Второй процессор вычисляет строки с 2n+1 по n+2,снизу-вверх, (и для него последняя строка с номером n+1).

Рассмотрим тестовый пример(22), в котором коэффициенты матрицы взяты из работы[5,формула(34),стр.73].

Здесь первая и последняя строка пятидиагональной матрицы системы содержат по 3 ненулевых элемента, вторая и предпоследняя строки по 4 ненулевых элемента, остальные строки по 5 ненулевых элементов.

$$\begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & \frac{-31}{2} & -7 & \frac{-31}{2} & -7 & \frac{-31}{2} & -7 \\ -15 & -6 & -15 & -6 & -15 & -6 & -15 \\ -4 & -11 & -4 & -11 & -4 & -11 & -4 \\ -11 & -4 & -11 & -4 & -11 & -4 & -11 \\ -4 & 6 & -4 & 6 & -4 & 6 & -4 \\ -15 & -6 & -15 & -6 & -15 & -6 & -15 \\ -7 & \frac{-31}{2} & -7 & \frac{-31}{2} & -7 & \frac{-31}{2} & -7 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Программа на FORTRAN с учетом алгоритма(14),(15),(18),(21), (20),(13), с известной последней строкой решения $x^n = (3,6,3,6,3,6,3)$ возвращает остальные строки решения, записанные в таблице 2.

Таблица 2. Решение, полученное программой с использованием алгоритма(14),(15),(18),(21)(20),(13), $x^n = (3,6,3,6,3,6,3)$.

Таблица 3. Решение, полученное программой с использованием алгоритма(14),(15),(18),(21),(24),(20),(13).

i/j	1	2	3	4	5	6	7
1	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000
2	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000
3	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000
4	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000
5	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000
6	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000
7	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000	6.00000000000000	3.00000000000000

Сравнение таблицы 2 и решения примера(22)показывает, что алгоритм(14),(15),(18),(21),(20),(13) с одной известной строкой $x^n = (3,6,3,6,3,6,3)$ является точным методом (решаемым за конечное число арифметических действий), так как совпадают 15 значащих цифр у всех элементов неизвестной матрицы.

При решении матричного уравнения (22) с квадратной матрицей порядка n = 151 решение, как и в таблице 3 (при n = 7), алгоритмом (14), (15), (18), (21), (24), (20), (13) возвращается программой с двойной точностью за конечное число арифметических операций.

Рассмотрим алгоритм решения задачи(1) с пятидиагональной матрицей одним ядром процессора, в случае если все строки решения неизвестны. В системе уравнений(12) третье, четвертое, пятое разностные уравнения содержат соответственно 5,4,3 разностных слагаемых. Поскольку решение третьего уравнения (12) имеет вид(13) и содержит 2 разностных слагаемых и 1 постоянное слагаемое, то четвертое и пятое уравнение имеет решение на одно, на два разностных слагаемых меньше соответственно

$$\begin{cases} x^{n-2} = \lambda_{1,n-2}x^{n-1} + \lambda_{2,n-2}x^n + \nu_{n-2} \\ x^{n-1} = \lambda_{1,n-1}x^n + \nu_{n-1} \\ x^n = \nu_n \end{cases} \tag{23}$$

В последнее уравнение системы (12) подставим первых две формулы из системы(23), получим

$$a_{n,n-2}x^{n-2} + a_{n,n-1}x^{n-1} + a_{n,n}x^n = f^n \Leftrightarrow a_{n,n-2}\left(\lambda_{1,n-2}x^{n-1} + \lambda_{2,n-2}x^n + \nu_{n-2}\right) + a_{n,n-1}x^{n-1} + a_{n,n}x^n = f^n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(a_{n,n-2}\lambda_{1,n-2} + a_{n,n-1}\right)x^{n-1} + \left(a_{n,n-2}\lambda_{2,n-2} + a_{n,n}\right)x^n = f^n - a_{n,n-2}\nu_{n-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a_{n,n-2}\lambda_{1,n-2} + a_{n,n-1}\right)\left(\lambda_{1,n-1}x^n + \nu_{n-1}\right) + \left(a_{n,n-2}\lambda_{2,n-2} + a_{n,n}\right)x^n = f^n - a_{n,n-2}\nu_{n-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(a_{n,n-2}\lambda_{1,n-2} + a_{n,n-1}\right)\lambda_{1,n-1} + a_{n,n-2}\lambda_{2,n-2} + a_{n,n}\right)x^n = f^n - a_{n,n-2}\nu_{n-2} - \nu_{n-1}\left(a_{n,n-2}\lambda_{1,n-2} + a_{n,n-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_j{}^n = \frac{f_j{}^n - a_{n,n-2}\nu_{n-2,j} - \nu_{n-1,j}\left(a_{n,n-2}\lambda_{1,n-2} + a_{n,n-1}\right)}{\left(\left(a_{n,n-2}\lambda_{1,n-2} + a_{n,n-1}\right)\lambda_{1,n-1} + a_{n,n-2}\lambda_{2,n-2} + a_{n,n}\right)},\ j = \overline{1,n} \tag{24}$$
$$\nu_j^n = \frac{f_j{}^n - a_{n,n-2}\nu_{n-2,j} - \nu_{n-1,j}\left(a_{n,n-2}\lambda_{1,n-2} + a_{n,n-1}\right)}{\left(\left(a_{n,n-2}\lambda_{1,n-2} + a_{n,n-1}\right)\lambda_{1,n-1} + a_{n,n-2}\lambda_{2,n-2} + a_{n,n}\right)},\ j = \overline{1,n} \tag{25}$$

Замечание 2. При решении матричного уравнения(22) с квадратной матрицей порядка n=101 решение, как и в таблице 3(при n=7), алгоритмом (14),(15),(18),(21),(24),(20),(13) возвращаются программой с двойной точностью за конечное число арифметических операций.

Последние уравнения(24),(25) согласуются с последним уравнением системы(23). В двух приведенных примерах(11),(22) шаблоны трех и пятидиагональных матриц используются для аппроксимации дифференциального оператора Пуассона, из-за чего сумма весовых коэффициентов шаблона равна нулю (так как производная константы есть ноль)[3]

$$\Delta u_{k,k} = \frac{1}{h^2}\left[u_{k,k-1} + u_{k,k+1} + u_{k-1,k} + u_{k+1,k} - 4u_{k,k}\right],$$
$$\Delta u_{k,k} = \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{6}\left(u_{k,k-1} + u_{k,k+1} + u_{k-1,k} + u_{k+1,k}\right) + \frac{2}{3}\left(u_{k-1,k-1} + u_{k+1,k-1} + u_{k-1,k+1} + u_{k+1,k+1}\right) - \frac{10}{3}u_{k,k}\right]$$ [5]

Поэтому, центральный (диагональный) коэффициент имеет знак противоположный знакам других коэффициентов шаблона (недиагональным коэффициентам строки матрицы). Из приведенных примеров видно, что диагональный элемент имеет максимальный модуль. Наименьший модуль 1/6 коэффициента расположен в узлах, удаленных от центра на шаг по одной координатной прямой. Промежуточное значение 2/3 находится в узлах удаленных на шаг по двум координатным прямым. Выразим все сказанное в виде условий. Для удобства введем обозначения $q_1 = \left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|, q_2 = \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right|, z = \left|\frac{a_{1,3}}{a_{1,2}}\right|$

Для пятидиагональной матрицы Теплица потребуем нестрогое двойное диагональное преобладание ее элементов

$$2\left(\left|a_{k,k-2}\right| + \left|a_{k,k-1}\right| + \left|a_{k,k+1}\right| + \left|a_{k,k+2}\right|\right) \le \left|a_{k,k}\right|, \forall k = \overline{3,n-2} \Leftrightarrow 2\left(2\left|a_{k,k+1}\right| + 2\left|a_{k,k+2}\right|\right) \le \left|a_{k,k}\right| \Leftrightarrow$$
$$4\left(\left|a_{k,k+1}\right| + \left|a_{k,k+2}\right|\right) \le \left|a_{k,k}\right| \Leftrightarrow \frac{\left|a_{k,k+1}\right| + \left|a_{k,k+2}\right|}{\left|a_{k,k}\right|} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow q_1 + q_2 \le \frac{1}{4}, q_2 \ge q_1 \Leftrightarrow q_1 \le \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \ge q_2 \ge \frac{1}{8}$$

Теорема 2(о корректности алгоритма прогонки(14),(15),(18),(21),(24),(20),(13)**).** Пусть на пятидиагональную матрицу Теплица A уравнения (1) наложены условия:

1)A-симметрическая $a_{i,j} = a_{j,i}, i, j = \overline{1,n}, a_{i,i-1} = a_{i,i+1}, i = \overline{2,n-1}, a_{i,i-2} = a_{i,i+2}, i = \overline{3,n-2};$

2) элементы матрицы A имеют *нестрогое двойное диагональное преобладание.* $0 < 2\left|a_{k,k-2}\right| \le 2\left(\left|a_{k,k-2}\right| + \left|a_{k,k-1}\right| + \left|a_{k,k+1}\right| + \left|a_{k,k+2}\right|\right) \le \left|a_{k,k}\right|, \forall k = \overline{3,n-2},\ 0 < 2\left|a_{1,3}\right| \le 2\left(\left|a_{1,2}\right| + \left|a_{1,3}\right|\right) \le \left|a_{1,1}\right|,$

$$0<2|a_{2,4}|\le 2(|a_{2,1}|+|a_{2,3}|+|a_{2,4}|)\le |a_{2,2}|,\ 0<2|a_{n-1,n-3}|\le 2(|a_{n-1,n-3}|+|a_{n-1,n-2}|+|a_{n-1,n}|)\le |a_{n-1,n-1}|,$$
$$0<2|a_{n,n-2}|\le 2(|a_{n,n-2}|+|a_{n,n-1}|)\le |a_{n,n}|$$

3) $a_{k,k+1}\cdot a_{k,k}<0, a_{k,k+2}\cdot a_{k,k}<0$

Тогда: $\forall z\equiv\left|\dfrac{a_{1,3}}{a_{1,2}}\right|\in[1,4]$:

1) $0<\lambda_{1,i}\le\dfrac{4}{3}q_1, i=\overline{1,n-1}, 0<\lambda_{2,i}\le\dfrac{21}{20}q_2, i=\overline{1,n-2};$

2)формулы прогонки (24),(25),(21),(20),(18),(15),(14),(13) – корректны.

Доказательство проведем по индукции. Левые части условий 2 Теоремы 2 обеспечивает также корректность формул(14),(19) и ненулевые диагональные элементы матрицы А(что эквивалентно ненулевым элементам крайних диагоналей матрицы Теплица А).

1)**База индукции**.

$$|\lambda_{1,1}|\overset{(14)}{=}\left|-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|=q_1\le\frac{4}{3}q_1, |\lambda_{2,1}|\overset{(14)}{=}\left|-\frac{a_{13}}{a_{11}}\right|=q_2\le\frac{21}{20}q_2, \lambda_{1,1}\overset{3)}{>}0, \lambda_{2,1}\overset{3)}{>}0(3))$$

Далее числитель и знаменатель формул(15) делим тождественно на число $a_{k,k}{}^2$

$$|\lambda_{1,2}|=\left|\frac{a_{13}a_{21}-a_{23}a_{11}}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}\right|\le\frac{|a_{11}||a_{23}|+|a_{13}||a_{21}|}{|a_{22}||a_{11}|-|a_{12}||a_{21}|}=\frac{q_1+q_1q_2}{1-q_1{}^2}\le\frac{4}{3}q_1\Leftrightarrow\frac{1+q_2}{1-q_1{}^2}\le\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{64}}\approx 1{,}269\le\frac{4}{3}=1,(3)$$
$$|\lambda_{2,2}|\overset{(15)}{=}\left|-\frac{a_{24}a_{11}}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}\right|\le\frac{|a_{24}||a_{11}|}{|a_{22}||a_{11}|-|a_{12}||a_{21}|}\overset{1)}{\le}\frac{q_2}{1-q_1{}^2}\le\frac{21}{20}q_2\Leftrightarrow\frac{21}{20}(1-q_1{}^2)\ge 1\Leftrightarrow 1-q_1{}^2\ge 1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}\ge\frac{20}{21},$$

Индуктивный переход. Пусть выполнены условия

$$\lambda_{1,i}\le\frac{4}{3}q_1, i=\overline{1,k-1}, \lambda_{2,i}\le\frac{21}{20}q_2, i=\overline{1,k-1}, \lambda_{1,i}>0, \lambda_{2,i}>0.\quad\text{Тогда}$$

$$|\lambda_{1,k}|\overset{(18)}{\le}\frac{q_1+q_1|\lambda_{2k-1}|+q_2|\lambda_{1k-2}\lambda_{2k-1}|}{1-q_2|\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1}|-q_2|\lambda_{2k-2}|-q_1|\lambda_{1k-1}|}\le\frac{q_1+q_1\frac{21}{20}q_2+q_2\frac{4\cdot 21}{3\cdot 20}q_1q_2}{1-\frac{16}{9}q_2q_1^2-\frac{21}{20}q_2{}^2-\frac{4}{3}q_1{}^2}\le q_1\left(\frac{1+\frac{21}{20}q_2+\frac{7}{5}q_2{}^2}{1-\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{4}q_1^2-\frac{21}{20}q_2{}^2-\frac{4}{3}q_1{}^2}\right)\le\frac{4}{3}q_1\le\frac{4}{3}q_1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1+\frac{21}{20}q_2+\frac{7}{5}q_2{}^2}{1-\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{4}q_1^2-\frac{21}{20}q_2{}^2-\frac{4}{3}q_1{}^2}\right)\le\frac{4}{3}\Leftrightarrow 1+\frac{21}{20}q_2+\frac{7}{5}q_2{}^2\le\frac{4}{3}-\frac{16}{27}q_1^2-\frac{16}{9}q_1{}^2-\frac{7}{5}q_2{}^2\Leftrightarrow$$
$$E:\frac{14}{5}\left(q_2+\frac{3}{16}\right)^2+\frac{64}{27}q_1{}^2\le\frac{829}{1920}\qquad(26)$$

Неравенство(26) определяет внутреннюю область эллипса E с центром(0,-3/16)

$$1)q_2=0,q_1\le\sqrt{\left(\frac{829}{1920}-\frac{14}{5}\frac{9}{256}\right)\frac{27}{64}}=0.375>\frac{1}{8},q_1\in[0,0.375]\supset\left[0,\frac{1}{8}\right]\forall k=\overline{3,n-2}$$

$$\frac{\left|\lambda_{1,k}\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)\right|}{q_1}\le\frac{1+\frac{21}{20}q_2+\frac{7}{5}q_2^{\ 2}}{1-\frac{16}{9}\cdot q_2q_1^2-\frac{21}{20}q_2^{\ 2}-\frac{4}{3}q_1^{\ 2}}=\frac{1+\frac{21}{20}\cdot\frac{1}{8}+\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{64}}{1-\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{8^3}-\frac{21}{20}\cdot\frac{1}{64}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{64}}\approx1.202\le\frac{4}{3}=1{,}3(3)$$

$$\frac{\left|\lambda_{1,k}\left(\frac{1}{20},\frac{1}{5}\right)\right|}{q_1}\le\frac{1+\frac{21}{20}q_2+\frac{7}{5}q_2^{\ 2}}{1-\frac{16}{9}\cdot q_2q_1^2-\frac{21}{20}q_2^{\ 2}-\frac{4}{3}q_1^{\ 2}}=\frac{1+\frac{21}{20}\cdot\frac{1}{5}+\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{25}}{1-\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{5\cdot400}-\frac{21}{20}\cdot\frac{1}{25}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{400}}\approx1.327353\le\frac{4}{3}=1{,}3(3)$$

Так как эллипс(26) представляет выпуклое множество, то весь отрезок прямой $q_1+q_2=\frac{1}{4}$ между точками $\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)z=1,\left(\frac{1}{20},\frac{1}{5}\right)z=4$ целиком расположен внутри эллипса[10,стр.33] $\forall z\equiv\left|\frac{a_{1,3}}{a_{1,2}}\right|\in[1,4]$. Если

$$\lambda_{1k-2},\lambda_{2k-1},\lambda_{1k-1},\lambda_{2k-2}>0\Rightarrow sign(\lambda_{1,k})=sign\left(\frac{q_1+q_1\lambda_{2k-1}+q_2\lambda_{1k-2}\lambda_{2k-1}}{1-q_2\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1}-q_2\lambda_{2k-2}-q_1\lambda_{1k-1}}\right)=+1,$$ то есть

$$0<\lambda_{1,i}\le\frac{4}{3}q_1,i=\overline{1,n-2}$$

$$|\lambda_{2,k}|\overset{(18)}{=}\left|\frac{-a_{k,k+2}}{a_{k,k}+a_{k,k-2}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1}+a_{k,k-2}\lambda_{2k-2}+a_{k,k-1}\lambda_{1k-1}}\right|\overset{1),2)}{\le}\frac{q_2}{1-q_2\frac{16}{9}q_1^{\ 2}-\frac{21}{20}q_2^{\ 2}-\frac{4}{3}q_1^{\ 2}}\le\frac{21}{20}q_2\Leftrightarrow\frac{1}{1-q_2\frac{16}{9}q_1^{\ 2}-\frac{21}{20}q_2^{\ 2}-\frac{4}{3}q_1^{\ 2}}\le\frac{21}{20}$$

$$1-\frac{1}{4}\frac{16}{9}q_1^{\ 2}-\frac{21}{20}q_2^{\ 2}-\frac{4}{3}q_1^{\ 2}\ge\frac{20}{21},E:\frac{16}{9}q_1^{\ 2}+\frac{21}{20}q_2^{\ 2}\le\frac{1}{21}\tag{27}$$

$$1)q_2=0,q_1^{\ 2}\le\frac{1}{21}\frac{9}{16},q_1\le\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{21}}\approx0.1637\ge\frac{1}{8}\Rightarrow q_1\in\left[0,\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{21}}\right]\supset\left[0,\frac{1}{8}\right]$$

$$\frac{\left|\lambda_{1,k}\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)\right|}{q_1}\le\frac{1}{1-\frac{16}{9}\cdot q_2q_1^2-\frac{21}{20}q_2^{\ 2}-\frac{4}{3}q_1^{\ 2}}=\frac{1}{1-\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{8^3}-\frac{21}{20}\cdot\frac{1}{64}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{64}}\approx1.042\le\frac{21}{20}=1{,}05(0)$$

$$\frac{\left|\lambda_{1,k}\left(\frac{1}{20},\frac{1}{5}\right)\right|}{q_1}\le\frac{1}{1-\frac{16}{9}\cdot q_2q_1^2-\frac{21}{20}q_2^{\ 2}-\frac{4}{3}q_1^{\ 2}}=\frac{1}{1-\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{5\cdot400}-\frac{21}{20}\cdot\frac{1}{25}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{400}}\approx1.048\le\frac{21}{20}=1{,}05(0)$$

Так как эллипс(27) представляет выпуклое множество[10,стр.33], то весь отрезок прямой $q_1+q_2=\frac{1}{4}$ между точками $\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)z=1,\left(\frac{1}{20},\frac{1}{5}\right)z=4$ целиком расположен внутри эллипса $\forall z\equiv\left|\frac{a_{1,3}}{a_{1,2}}\right|\in[1,4]$. Если

$$\lambda_{1k-2},\lambda_{2k-1},\lambda_{1k-1},\lambda_{2k-2}>0\Rightarrow sign(\lambda_{1,k})=sign\left(\frac{q_2}{1-q_2\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1}-q_2\lambda_{2k-2}-q_1\lambda_{1k-1}}\right)=+1,$$ то есть

$$0<\lambda_{1,i}\le\frac{21}{20}q_2,i=\overline{1,n-2}.$$

То есть, первая часть **теоремы 2** доказана $\forall z\equiv\left|\frac{a_{1,3}}{a_{1,2}}\right|\in[1,4]$.

2)**Доказательство второй части (**корректность формул прогонки).

Найдем условие, при котором знаменатель формул(21) сохраняет знак, что обеспечит корректность формул(21). С учетом условий Теоремы 2 получим

$$q_1 + q_2 \le \frac{1}{4}, \forall z \equiv \left|\frac{a_{1,3}}{a_{1,2}}\right| = \frac{q_2}{q_1} \in [1,4], \Rightarrow q_1 \le \frac{1}{8} \wedge q_2 \le \frac{1}{8}, q_1 \le \frac{1}{20} \wedge q_2 \le \frac{1}{5}.$$

$$\left|a_{n-1,n-3}\lambda_{2,n-3} + a_{n-1,n-1} - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n-2}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\right| \overset{1)}{=} \left|a_{n-1,n-3}\lambda_{2,n-3} + a_{n-1,n-1} - \frac{a_{n-1,n-2}}{a_{n-1,n-3}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\right| > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left|a_{n-1,n-3}{}^2\lambda_{2,n-3} + a_{n-1,n-1}a_{n-1,n-3} - a_{n-1,n-2}a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} - a_{n-1,n-2}{}^2\right| \overset{1)}{>} 0 \Leftrightarrow \left|q_2{}^2\lambda_{2,n-3} - q_2 - q_2q_1\lambda_{1,n-3} - q_1{}^2\right| > 0 \Leftrightarrow$$

$$q_2 + q_2q_1\lambda_{1,n-3} + q_1{}^2 - q_2{}^2\lambda_{2,n-3} \ge q_2 - \frac{21}{20}q_2{}^3 \ge q_2\left(1 - \frac{21}{20}\cdot\frac{1}{25}\right) = q_2\frac{479}{500} > 0, \forall q_2 \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{5}\right]$$

$$\left|\lambda_{1,n-1}\right| \overset{(21)}{=} \left|\frac{\left(-a_{n-1,n} + \frac{a_{n,n}}{a_{n,n-2}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\right)}{\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{2,n-3} + a_{n-1,n-1} - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n-2}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\right)}\right| \overset{1)}{=} \left|\frac{\left(-a_{n-1,n-2} + \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n-1,n-3}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\right)}{\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{2,n-3} + a_{n-1,n-1} - \frac{a_{n-1,n-2}}{a_{n-1,n-3}}\left(a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-2}\right)\right)}\right| =$$

$$= \left|\frac{\left(-a_{n-1,n-2}a_{n-1,n-3} + a_{n-1,n-1}a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} + a_{n-1,n-1}a_{n-1,n-2}\right)}{\left(a_{n-1,n-3}{}^2\lambda_{2,n-3} + a_{n-1,n-1}a_{n-1,n-3} - a_{n-1,n-2}a_{n-1,n-3}\lambda_{1,n-3} - a_{n-1,n-2}{}^2\right)}\right| \le \left|\frac{-q_2\lambda_{1,n-3} - q_1q_2 - q_1}{q_2{}^2\lambda_{2,n-3} - q_2 - q_1q_2\lambda_{1,n-3} - q_1^2}\right| \le$$

$$\le \frac{q_2q_1\frac{4}{3} + q_1q_2 + q_1}{q_2 + q_1q_2\lambda_{1,n-3} + q_1{}^2 - q_2{}^2\lambda_{2,n-3}} \le \frac{q_2q_1\frac{7}{3} + q_1}{q_2 + q_1q_2\lambda_{1,n-3} + q_1{}^2 - q_2{}^3\frac{21}{20}} \le \frac{q_1}{q_2}\frac{\left(1 + \frac{7}{3}q_2\right)}{\left(1 + \frac{q_1{}^2}{q_2} - q_2{}^2\frac{21}{20}\right)} \le$$

$$\le \frac{q_1}{q_2}\left(\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{3} + 1}{1 + \frac{1}{20^2(1/5)} - \frac{21}{20}\cdot\frac{1}{25}}\right) = \frac{q_1}{q_2}\frac{\frac{22}{15}}{1 + \frac{1}{80} - \frac{21}{500}} \approx 1.511\frac{q_1}{q_2} \le \frac{23}{15}\frac{q_1}{q_2} = 1.53(3)\frac{q_1}{q_2} \qquad (28)$$

Таким образом, формулы(21) корректны, то есть существуют конечное значение $\lambda_{1,n-1}$ и конечная норма вектора ν_{n-1}. Рассмотрим корректность формул(24),(25): $x_j{}^n = \dfrac{f_j{}^n - a_{n,n-2}\nu_{n-2,j} - \nu_{n-1,j}\left(a_{n,n-2}\lambda_{1,n-2} + a_{n,n-1}\right)}{\left(\left(a_{n,n-2}\lambda_{1,n-2} + a_{n,n-1}\right)\lambda_{1,n-1} + a_{n,n-2}\lambda_{2,n-2} + a_{n,n}\right)}$

В последней формуле разделим знаменатель на диагональный элемент $\left|a_{n,n}\right|$ и оценим дробь по модулю

$$\frac{\left|\left(a_{n,n-2}\lambda_{1,n-2} + a_{n,n-1}\right)\lambda_{1,n-1} + a_{n,n-2}\lambda_{2,n-2} + a_{n,n}\right|}{\left|a_{n,n}\right|} > 0 \Leftrightarrow \left|\left(-q_2\lambda_{1,n-2} - q_1\right)\lambda_{1,n-1} - q_2\lambda_{2,n-2} + 1\right| = 1 - \left(q_2\lambda_{1,n-2} + q_1\right)\lambda_{1,n-1} - q_2\lambda_{2,n-2} \overset{(28)}{\ge}$$

$$\overset{(28)}{\ge} 1 - \left(q_2q_1\frac{4}{3} + q_1\right)\frac{23}{15}\frac{q_1}{q_2} - q_2^2\frac{21}{20} = 1 - \frac{92}{45}q_1{}^2 - \frac{23}{15}\frac{q_1{}^2}{q_2} - \frac{21}{20}\cdot\frac{1}{25} \ge 1 - \frac{92}{45}\cdot\frac{1}{64} - \frac{23}{15}\cdot\frac{1}{64(1/8)} - \frac{21}{500} \approx 0{,}734 > 0$$

Таким образом, корректны формулы(24),(25), то есть ограничено значение $\left|x_j{}^n\right|, j = \overline{1,n}$. А также корректны формулы обратной прогонки, указанные ниже, так как конечность величин $\left\|x^n\right\|$, $\lambda_{1,n-1}, \left\|\nu_{n-1}\right\|, \lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \left\|\nu_k\right\|, k = \overline{1,n-2}$ была показана нами ранее. $\begin{cases} x^k = \lambda_{1,k}x^{k+1} + \lambda_{2,k}x^{k+2} + \nu_k, k = \overline{1,n-2} \\ x^{n-1} = \lambda_{1,n-1}x^n + \nu_{n-1} \\ x^n = \nu_n \end{cases}$

Теорема 2 доказана. Оказывается, что при больших порядках(n>50)матричного уравнения(1) коэффициенты прямой прогонки(18), имеют предельные значение(на что указывает распечатка коэффициентов), обозначим предельные значения

$\lambda_{1,k} \underset{k\to\infty}{\to} \bar{x}, \lambda_{2,k} \underset{k\to\infty}{\to} \bar{y}$, заменяя все коэффициенты в (18) их предельными значениями, имеем:

$$\lambda_{1,k} = -\left(\frac{a_{k,k+1} + a_{k,k-1}\lambda_{2k-1} + a_{k,k-2}\lambda_{1k-2}\lambda_{2k-1}}{a_{k,k} + a_{k,k-2}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} + a_{k,k-2}\lambda_{2k-2} + a_{k,k-1}\lambda_{1k-1}}\right), \lambda_{2,k} = \frac{-a_{k,k+2}}{a_{k,k} + a_{k,k-2}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} + a_{k,k-2}\lambda_{2k-2} + a_{k,k-1}\lambda_{1k-1}},$$

$$\bar{x} = -\left(\frac{a_{k,k+1} + a_{k,k-1}\bar{y} + a_{k,k-2}\bar{x}\bar{y}}{a_{k,k} + a_{k,k-2}\bar{x}^2 + a_{k,k-2}\bar{y} + a_{k,k-1}\bar{x}}\right), \bar{y} = \frac{-a_{k,k+2}}{a_{k,k} + a_{k,k-2}\bar{x}^2 + a_{k,k-2}\bar{y} + a_{k,k-1}\bar{x}},$$

Для симметрической матрицы Теплица имеем:

$$\bar{x} = -\left(\frac{q_1 + q_1\bar{y} + q_2\bar{x}\bar{y}}{1 + q_2\bar{x}^2 + q_2\bar{y} + q_1\bar{x}}\right), \bar{y} = \frac{-q_2}{1 + q_2\bar{x}^2 + q_2\bar{y} + q_1\bar{x}},\ q_1 = \frac{a_{k,k+1}}{a_{k,k}} = \frac{a_{k,k-1}}{a_{k,k}}, q_2 = \frac{a_{k,k+2}}{a_{k,k}} = \frac{a_{k,k-2}}{a_{k,k}} \tag{29}$$

Теорема 3. Нелинейная система уравнений(29) численно разрешима методом Ньютона – Зейделя по итерационным формулам с диагональными элементами матрицы Якоби, полученным в работе[15]:

$$\begin{cases} x^{s+1} = x^s - \dfrac{x^s + q_2\left(x^s\right)^3 + 2q_2x^sy^s + q_1\left(x^s\right)^2 + q_1 + q_1y^s}{1 + 3q_2\left(x^s\right)^2 + 2q_2y^s + 2q_1x^s}, \quad s = 0,1,2,\ldots \\ y^{s+1} = y^s - \dfrac{y^s + q_2y^s\left(x^{s+1}\right)^2 + q_2\left(y^s\right)^2 + q_1x^{s+1}y^s + q_2}{1 + q_2\left(x^{s+1}\right)^2 + 2q_2y^s + q_1x^{s+1}},\ s = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{30}$$

Доказательство. В работе[15,стр.14] показано, что для решения нелинейной системы уравнений (30) достаточно переписать нелинейные уравнения(30) в каноническом виде с нулевой правой частью, то есть получить функции 4 переменных (q_1, q_2 -параметры, $x^s y^s$ - независимые переменные). Имеем:

$$f_1\left(x^s, y^s, q_1, q_2\right) = x^s + q_2\left(x^s\right)^3 + 2q_2x^sy^s + q_1\left(x^s\right)^2 + q_1 + q_1y^s = 0$$

$f_2\left(x^s, y^s, q_1, q_2\right) = y^s + q_2y^s\left(x^s\right)^2 + q_2\left(y^s\right)^2 + q_1x^sy^s + q_2 = 0$, их частные производные – диагональные элементы матрицы Якоби согласно[15,стр.14] получим

$$f_{1x^s}^{/}\left(x^s, y^s, q_1, q_2\right) = 1 + 3q_2\left(x^s\right)^2 + 2q_2y^s + 2q_1x^s,\ f_{2y^s}^{/}\left(x^{s+1}, y^s, q_1, q_2\right) = 1 + q_2\left(x^{s+1}\right)^2 + 2q_2y^s + q_1x^{s+1}$$

Согласно[15,стр.14] имеем систему итерационных уравнений:

$$\begin{cases} x^{s+1} = x^s - \dfrac{f_1\left(x^s, y^s, q_1, q_2\right)}{f_{1x^s}^{/}\left(x^s, y^s, q_1, q_2\right)} = x^s - \dfrac{x^s + q_2\left(x^s\right)^3 + 2q_2x^sy^s + q_1\left(x^s\right)^2 + q_1 + q_1y^s}{1 + 3q_2\left(x^s\right)^2 + 2q_2y^s + 2q_1x^s}, \quad s = 0,1,2,\ldots \\ y^{s+1} = y^s - \dfrac{f_2\left(x^{s+1}, y^s, q_1, q_2\right)}{f_{2y^s}^{/}\left(x^{s+1}, y^s, q_1, q_2\right)} = y^s - \dfrac{y^s + q_2y^s\left(x^{s+1}\right)^2 + q_2\left(y^s\right)^2 + q_1x^{s+1}y^s + q_2}{1 + q_2\left(x^{s+1}\right)^2 + 2q_2y^s + q_1x^{s+1}},\ s = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{31}$$

Теорема 3 доказана, поскольку формула(31)совпадает с формулой(30).

Замечание 3. Для матричного уравнения (22) второго численного примера $q_1 = \frac{1/6}{-10/3} = -\frac{1}{20}, q_2 = \frac{2/3}{-10/3} = -\frac{1}{5}$ программа с начальным значением $x^0 = y^0 = 0.1, \quad n_1 = n_2 = 101$ по формулам (18) дает итерационные значения коэффициентов прогонки $\lambda_{1,26} = \overline{x} = 6{,}6324473666998 \cdot 10^{-2}, \lambda_{2,26} = \overline{y} = 0{,}2096722801763936$ уже на 26 шаге и далее коэффициенты прогонки имеют стационарные значения. Итерационные формулы(30) дают $\overline{x} = 6{,}6324473666998 \cdot 10^{-2}, \quad \overline{y} = 0{,}209672280176393, x^0 = y^0 = 0.1$, то есть разность между текущими значениями коэффициентов прогонки и их предельными значениями падает к нулю с двойной точностью по геометрической прогрессии за несколько десятков шагов. Кроме того

$$\left|\lambda_{1,\infty}\right| = \overline{x} = 6{,}6324473666998 \cdot 10^{-2} \le \frac{4}{3}\left|q_1\right| = \frac{4}{60} = 6{,}6(6) \cdot 10^{-2},$$

$$\left|\lambda_{2,\infty}\right| = \overline{y} = 0{,}209672280176393 \le \frac{21}{20}\left|q_2\right| = \frac{21}{100} = 0{,}21(0)$$

Что не противоречит **Теореме 2.** Рассмотрим другой параметрический случай

$q_1 = -\frac{1}{8}, q_2 = -\frac{1}{8}$. Итерационные формулы(29) дают

$\overline{x} = 0{,}1492864354 \;\; \overline{y} = 0{,}1298948902, \; x^0 = y^0 = 0.1$. Кроме того,

$$\left|\lambda_{1,\infty}\right| = \overline{x} = 0{,}1492864354 \le \frac{4}{3}\left|q_1\right| = \frac{4}{24} = 0{,}166(6), \left|\lambda_{2,\infty}\right| = \overline{y} = 0{,}1298948902, \frac{21}{20}\left|q_2\right| = \frac{21}{160} = 0{,}13125(0)$$

$$\left|\lambda_{1,n-1}\right| = 0{,}376148815 \overset{(28)}{\le} \frac{23}{15}\frac{q_1}{q_2} = 0{,}38(3), \left(q_1 = \frac{1}{20}, q_2 = \frac{1}{5}\right), \left|\lambda_{1,n-1}\right| = 1{,}05 \overset{(28)}{\le} \frac{23}{15}\frac{q_1}{q_2} = 1{,}5(3), \left(q_1 = \frac{1}{8}, q_2 = \frac{1}{8}\right),$$

что также не противоречит **Теореме 2.**

Ниже написана программа на FORTRAN с двойной точностью[7,8,15] для примера 2.

```
program matprogonka;integer(8),parameter::n1=7,n2=7;integer(8)::k,i,j

real(8)::a(n1,n2),f(n1,n2),nu(n1,n2),x(n1,n2),lamda(n1);real(8)::lamda1(n1+1),lamda2(n1+1),c1,c2,c3,c7,c4,c5,c6

a(1,1)=-1d1/3d0;a(1,2)=1d0/6d0;a(1,3)=2d0/3d0;a(1,4)=0d0;a(1,5)=0d0;a(1,6)=0d0;a(1,7)=0d0;

a(2,1)=1d0/6d0;a(2,2)=-1d1/3d0;a(2,3)=1d0/6d0;a(2,4)=2d0/3d0;a(2,5)=0d0;a(2,6)=0d0;a(2,7)=0d0

a(3,1)=2d0/3d0;a(3,2)=1d0/6d0;a(3,3)=-1d1/3d0;a(3,4)=1d0/6d0;a(3,5)=2d0/3d0;a(3,6)=0d0;a(3,7)=0d0

a(4,1)=0d0;a(4,2)=2d0/3d0;a(4,3)=1d0/6d0;a(4,4)=-1d1/3d0;a(4,5)=1d0/6d0;a(4,6)=2d0/3d0;a(4,7)=0d0

a(5,1)=0d0;a(5,2)=0d0;a(5,3)=2d0/3d0;a(5,4)=1d0/6d0;a(5,5)=-1d1/3d0;a(5,6)=1d0/6d0;a(5,7)=2d0/3d0

a(6,1)=0d0;a(6,2)=0d0;a(6,3)=0d0;a(6,4)=2d0/3d0;a(6,5)=1d0/6d0;a(6,6)=-1d1/3d0;a(6,7)=1d0/6d0;

a(7,1)=0d0;a(7,2)=0d0;a(7,3)=0d0;a(7,4)=0d0;a(7,5)=2d0/3d0;a(7,6)=1d0/6d0;a(7,7)=-1d1/3d0;

f(1,1)=-7d0;f(1,2)=-31d0/2d0;f(1,3)=-7d0;f(1,4)=-31d0/2d0;f(1,5)=-7d0;f(1,6)=-31d0/2d0;f(1,7)=-7d0

f(2,1)=-15d0;f(2,2)=-6d0;f(2,3)=-15d0;f(2,4)=-6d0;;f(2,5)=-15d0;f(2,6)=-6d0;f(2,7)=-15d0;

f(3,1)=-4d0;f(3,2)=-11d0;f(3,3)=-4d0;f(3,4)=-11d0;f(3,5)=-4d0;f(3,6)=-11d0;f(3,7)=-4d0;

f(4,1)=-11d0;f(4,2)=-4d0;f(4,3)=-11d0;f(4,4)=-4d0;f(4,5)=-11d0;f(4,6)=-4d0;f(4,7)=-11d0;

f(5,1)=-4d0;f(5,2)=-11d0;f(5,3)=-4d0;f(5,4)=-11d0;f(5,5)=-4d0;f(5,6)=-11d0;f(5,7)=-4d0;
```

```
f(6,1)=-15d0;f(6,2)=-6d0;f(6,3)=-15d0;f(6,4)=-6d0;;f(6,5)=-15d0;f(6,6)=-6d0;f(6,7)=-15d0;

f(7,2)=-31d0/2d0;f(7,1)=-7d0;f(7,4)=-31d0/2d0;f(7,3)=-7d0;f(7,6)=-31d0/2d0;f(7,5)=-7d0;f(7,7)=-7d0

lamda1(1)=-a(1,2)/a(1,1);lamda2(1)=-a(1,3)/a(1,1);lamda1(2)=(a(2,1)*a(1,3)-a(2,3)*a(1,1))/(a(2,2)*a(1,1)-
a(1,2)*a(2,1))

lamda2(2)=-a(2,4)*a(1,1)/(a(2,2)*a(1,1)-a(1,2)*a(2,1));do j=1,n2

nu(1,j)=f(1,j)/a(1,1);nu(2,j)=(a(1,1)*f(2,j)-a(2,1)*f(1,j))/(a(2,2)*a(1,1)-a(1,2)*a(2,1));enddo

do i=3,n1-2;do j=1,n2;c1=a(i,i+1)+a(i,i-1)*lamda2(i-1)+a(i,i-2)*lamda2(i-1)*lamda1(i-2)

c2=-a(i,i)-a(i,i-2)*lamda1(i-2)*lamda1(i-1)-a(i,i-2)*lamda2(i-2)-a(i,i-1)*lamda1(i-1)

c3=a(i,i-2)*lamda1(i-2)*nu(i-1,j)+a(i,i-2)*nu(i-2,j)+a(i,i-1)*nu(i-1,j)-f(i,j)

lamda1(i)=c1/c2;lamda2(i)=a(i,i+2)/c2;nu(i,j)=c3/c2;enddo;enddo

c4=(a(n1-1,n2-1)+a(n1-1,n2-3)*lamda2(n1-3)-(a(n1,n2-1)/a(n1,n2-2))*(lamda1(n1-3)*a(n1-1,n2-3)+a(n1-1,n2-2)))

c6=a(n1-1,n1-3)*lamda1(n1-3)+a(n1-1,n1-2)

c5=(a(n1,n1)/a(n1,n1-2))*(a(n1-1,n1-3)*lamda1(n1-3)+a(n1-1,n1-2))-a(n1-1,n1);lamda1(n1-1)=c5/c4

do j=1,n2;nu(n1-1,j)=(f(n1-1,j)-a(n1-1,n1-3)*nu(n1-3,j)-f(n1,j)*c6/a(n1,n1-2))/c4;enddo

do j=1,n2;c4=f(n1,j)-a(n1,n1-2)*nu(n1-2,j)-nu(n1-1,j)*(a(n1,n1-2)*lamda1(n1-2)+a(n1,n1-1))

c5=a(n1,n1-2)*lamda1(n1-2)*lamda1(n1-1)+a(n1,n1-1)*lamda1(n1-1)+a(n1,n1-2)*lamda2(n1-2)+a(n1,n1)

nu(n1,j)=c4/c5;x(n1,j)=nu(n1,j);enddo;do j=1,n2;x(n1-1,j)=lamda1(n1-1)*x(n1,j)+nu(n1-1,j)

enddo;do i=n1-2,1,-1;do j=1,n2;x(i,j)=lamda1(i)*x(i+1,j)+lamda2(i)*x(i+2,j)+nu(i,j);enddo;enddo

do i=1,n1;do j=1,n2;print*,i,j,x(i,j);enddo;enddo;

end program matprogonka
```

В работе Годунова С.К. [16,стр. 233]показано, что множество отношений Релея $\frac{(Au,u)}{(u,u)}$ является хаусдорфовым множеством для любой матрицы A и выпукло. Для примера стр.233 матрица $\begin{bmatrix} -1 & 2q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ из трех различных ненулевых элементов множество Релея имеет вид эллипса. Отметим, что пятидиагональная матрица Теплица примера(22) также имеет три различных элемента и ее множества корректности формул прямой прогонки(26),(27) представляют собой эллипсы.

Уравнения математической физики питают своими идеями не только традиционные разделы численной математики, такие как матричные вычисления (которым посвящена данная работа), но и новые ветви прикладной математики, такие как стеганография (впервые эту идею применила Волосова Наталья Константиновна [17-20]).

В работе получены результаты:

1) Предложен векторный аналог решения матричных уравнений с трехдиагональной матрицей формулы(8),(9),(10) .
2) В теореме 1 получены достаточные условия корректности алгоритма(8)-(10)
3) Рассмотрен алгоритм(14),(15),(18),(21)(20),(13), решения задачи(1) с пятидиагональной матрицей для параллельного вычисления 2 процессорами и алгоритм(14),(15),(18),(21),(24),(20),(13) решения этой же задачи одним процессором.
4) В теореме 2 получены достаточные условия корректности алгоритма(14),(15),(18),(21),(24),(20),(13)
5) Приведенные тестовые примеры и программа на FORTRAN показывают, что алгоритмы(8)-(10); (14),(15),(18),(21),(24),(20),(13)являются точными, так как дают программой значение неизвестной

матрицы за конечное число операций, совпадающей поэлементно с точной матрицей в 15 значащих цифрах.

6) В теореме 3 получен численный алгоритм для предельных значений коэффициентов прогонки вперед, показано, что для двух параметрических случаев предельные значения подчиняются Теореме 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов А.А. Преобразование подобия на множестве полукватернионов / А.А. Козлов, К.С. Суравнева, И.Л.Жалейко // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 115–123.
2. Козлов А.А. Множество полуоктав / А.А. Козлов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 75–85.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы/Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 7-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний,2011.- 636 с.: ил. – (Классический университетский учебник).
4. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: БИНОМ, 2010. – 240 с.
5. Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
6. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1976. – 543 с.
7. Бартеньев О.В. Современный Фортран / О.В. Бартеньев. – М. : ДИАЛОГ – МИФИ, 2000. – 450 с.
8. Бартеньев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL: Ч.1. – М.:ДИАЛОГ – МИФИ, 2001. – 437 с.
9. Александров П.С.,Пасынков Б.А. Введение в теорию размерностей.- М.:Наука,1973,577 С.
10. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – Изд-во Моск. ун-та,1989. - 204 с.
11. Пикулин В.П. Практический курс по уравнениям математической физики: учеб. пособие / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М.: Наука, 1995. – 224 с.
12. Пастухов Д.Ф. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 60–74.
13. Пастухов Д.Ф. К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи Дирихле для волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 167–186.
14. Пастухов Ю.Ф. Необходимые условия в обратной вариационной задаче / Ю.Ф. Пастухов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. 7:1. С. 285–288.
15. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Численные методы. Лекции. Численный практикум/Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов – Новополоцк. ПГУ.2019.227с. Режим доступа: http: /elib.psu.by:8080 /handle/ 123456789/21502. Дата доступа. 2019.
16. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры/ С.К. Годунов. – Новосибирск: Научная книга,1997.407 с.
17. Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR кода в стеганографии/ Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. //Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.
18. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR кода в стеганографии/ Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. //Мир транспорта. – 2019. Т.17. № 3(82). С. 16-39.
19. Волосова Н.К. Применение преобразования Радона в стеганографии//LXXI Международная конференция “Герценовские чтения”. Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена. – СПб, 2018. – 234-238.
20. Волосова Н.К. Преобразование Радона и уравнение Пуассона в компьютерной стеганографии//Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. – Суздаль. 2018. – С. 61.

VECTOR ANALOGUE OF THE METHOD PROGONKI FOR DECISION THREE AND FIVE DIAGONAL MATRIX EQUATIONS

N. VOLOSOVA, K. VOLOSOV, A. VOLOSOVA, D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV,

The Offered algorithm of the vector analogue of the racing for decision of the free matrix equations with square three and five diagonal matrixes for final number of the arithmetical calculations. It is proved sufficient

conditions to correctness vector molded racing for free three diagonal matrixes and sufficient conditions for five diagonal matrixes Toeplitz. The brought program and two examples show that given algorithms are exact.
***The Keywords**: vector analogue of the method of the racing, three and five diagonal matrixes, matrix Toeplitz, protuberant ensemble, parallel calculations.*