УДК 514

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОБОБЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ НА ЭКСТРЕМАЛЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Аннотация: В работе рассматриваются свойства функций Гамильтона и Лагранжа в координатно - импульсном пространстве. Основным полученным результатом является свойство сохранения обобщенной энергии ранга n на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка n.Это свойство является достаточным, но не необходимым условием сохранения обобщенной энергии ранга n.

Ключевые слова: Функция Гамильтона, вариационная задача, расслоённое пространство скоростей, уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, тензор обобщенного импульса, невырожденный гессиан.

Введение.

Гамильтон в 1835 году получил новую форму уравнений движения механических систем канонические уравнения Гамильтона.. Полученная система канонических уравнений содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем у Лагранжа, но зато все они первого порядка, (у Лагранжа - второго).. Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряд задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.

Подход Гамильтона оказался высоко эффективным во многих математических моделях физики. Первоначально вариационный принцип Гамильтона был сформулирован для задач механики, но при некоторых естественных предположениях из него выводятся уравнения Максвелла электромагнитного поля. С появлением теории относительности оказалось, что этот принцип строго выполняется и в релятивистской динамике. Его эвристическая сила существенно помогла разработке квантовой механики, а при создании общей теории относительности Давид Гильберт успешно применил гамильтонов принцип для вывода уравнений гравитационного поля (1915 год).Из сказанного следует, что принцип наименьшего действия Гамильтона(и естественным образом связанная с ним система канонических уравнений) занимает место среди коренных, базовых законов природы — наряду с законом сохранения энергии и законами термодинамики. Представленная работа является продолжением работ авторов [9, 10,13,16,17,18,19,20,21,22,23].

Основные определения.

Пусть $L: T^p X_m \to \Re$, $L(x,\dots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = \overline{0,n}$, $i = \overline{1,m}$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},\dots,x^{(b(n,p,k)}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) \quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$, где $L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функция $p_{k,n}^i$ называются $k-ой$ компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k -импульсами) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Определение 2. Пусть $L: T^p X_m \to \Re$, $L(x,\dots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Функция

$$H = H(x,\dot{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x}) = H_n = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i \overset{(k)i}{x} = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i D_t^k x^i =$$

$$= -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right) D_t^k x^i \quad, \overset{(k)i}{x} = D_t^k x^i, \tag{1}$$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m} \tag{2}$$

где D_t^k – оператор k- кратного полного дифференцирования по времени *t*, называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) ранга *n* этого преобразования двойственной к функции Лагранжа $L: T^p X_m \to \Re$, а также обобщенной энергией системы, состояние которой описывается функцией $L: T^p X_m \to \Re$ в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Имеет место следующая

Лемма Максимальные порядки производной по t $b(n,p,k), a(n,p)$ в выражениях(1),(2) для $p_k^i(n), H$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$

$$H = H(x,\dot{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x}) = H_n = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i \overset{(k)i}{x} = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) D_t^k x^i = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right) D_t^k x^i, \quad \overset{(k)i}{x} = D_t^k x^i,$$ имеют вид:

$$b(n,p,k) = \max(2\min(p,n)-k,p) = \begin{cases} 1)(p\le n)\begin{cases} 2p-k, & k\le p\le n \\ p \quad, & p\le k\le n \end{cases} \\ 2)(p\ge n),\ \max(2n-k,p), \quad p\ge n \end{cases} = \begin{cases} 2p-k, & k\le p\le n \\ p \quad, & p\le k\le n \\ \max(2n-k,p), & p\ge n \end{cases} \tag{3}$$

$$a(n,p) = \max_{1\le k\le n}(b(n,p,k),k) = \begin{cases} \max\left(\max\limits_{1\le k\le \min(n,p)=p}(2p-k,k), \max\limits_{p\le k\le n} p\right) = \max\left(\max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=p}(2p-k), p\right), \text{при } p\le n \\ \max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=n}(\max(2n-k,p),k) = \max(2n-1,p,n)\ , \text{при } p\ge n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \max(2p-1,p) = 2p-1 \ , \text{при } p\le n \\ \max(2n-1,p)\ , \text{при } p\ge n \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Максимальный порядок производной по *t* порядка l в $p_k^i(n)$ равен $l+l+k = 2\cdot l+k$ *при* $l+k\le p$. Если $l+k>p$, то $\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и, значит, коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, следовательно, при определении максимального порядка производной по *t* можно считать $l+k\le p$ (в частности, $k\le p$,но $k\le n \Rightarrow k\le \min(n,p)$). Кроме того, $l\le n-k \Leftrightarrow l+k\le n \Rightarrow l+k\le\min(n,p) \Rightarrow l\le\min(n,p)-k \Rightarrow 2\cdot l+k\le 2\cdot(\min(n,p)-k)+k=$ $= 2\cdot\min(n,p)-2\cdot k+k = 2\cdot\min(n,p)-k$, $p_{k,n}^i$ зависит от производных порядка

$$b(n,p,k) = \max(2\min(p,n)-k,p) = \begin{cases} 1)(p\le n)\begin{cases} 2p-k, & k\le p\le n \\ p \quad, & p\le k\le n \end{cases} \\ 2)(p\ge n),\ \max(2n-k,p), \quad p\ge n \end{cases} \quad \begin{cases} 2p-k, & k\le p\le n \\ p \quad, & p\le k\le n \\ \max(2n-k,p), & p\ge n \end{cases} \tag{5}$$

Учитывая определение $b(n,p,k) = \max(2\min(p,n)-k,p)$ при $p=n$ получим

$$b(n,n,k)=b(n,p=n,k)=\max(2\min(n,n)-k,p)=\max(2n-k,n)=2n-k\ ,\text{так как при } 1\le k\le \min(p,n)\Rightarrow k\le n \qquad (6)$$

Этот же результат получается из (3) как граничный случай, так как из $p=n\Rightarrow(p\le n)\wedge(p\ge n)$ и ,значит,

$2(p=n)-k=2n-k=\max(2n-k,p=n)=\max(2n-k,n)=2n-k,$ *так как при* $1\le k\le \min(p,n)\le n$

Для каждого слагаемого вида $p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}=p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}$ – произведения импульса порядка k на производную того же порядка по *i*-й координате – справедливо $\max(\max(2\min(p,n)-k,p),k)=\max(2\min(p,n)-k,p,k)$. Энергия системы

$$H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}=-L(x,...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x})\overset{(k)i}{x}$$

будет зависеть от максимального порядка производной- имеем прямую задача на $\max\min$:

$$a(n,p)=(\max_{1\le k\le n}(2\min(p,n)-k,p)\ ,k,p)=\max_{1\le k\le n}(2\min(p,n)-k,p,k)=\max_{1\le k\le n}(\max(2\min(p,n)-k,p),k)=\max_{1\le k\le n}(b(n,p,k),k) \qquad (7)$$

Подставляя в (4) равенства, полученные в (3), получим:

$$a(n,p)=\max_{1\le k\le n}(b(n,p,k),k)=\begin{cases}\max(\max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=p}(2p-k,k),\ \max\limits_{p\le k\le n} p\ )=\max(\max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=p}(2p-k),\ p),\ \text{при } p\le n\\ \max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=n}(\max(2n-k,p),k)=\max(2n-1,p,n)\ ,\ \text{при } p\ge n\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\max(2p-1,p)=2p-1\ ,\ \text{при } p\le n\\ \max(2n-1,p)\ ,\ \text{при } p\ge n\end{cases} \qquad (8)$$

Учитывая равенство $a(n,p)=\max\limits_{1\le k\le n}(b(n,p,k),k)$ при $p=n$ получим

$$a(n,p)=a(n,p=n)=\max_{1\le k\le n}(b(n,p=n,k),k)=\max_{1\le k\le n}(2n-k,k)=2n-1\ ,\text{так как при } 1\le k\le\min(p,n)\Rightarrow k\le n$$

Этот же результат получается из (5) как граничный случай ,так как из $p=n\Rightarrow(p\le n)\wedge(p\ge n)$ и ,значит,

$2(p=n)-1=2n-1=\max(2n-1,p=n)=\max(2n-1,n)=2n-1,$ *так как* $n\ge 1$

На основании этого можно записать

$$H(x,\dot{x}...,\overset{(a(n,p))}{x})=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dot{x}...,\overset{(b(n,p,k)}{x})\overset{(k)i}{x}=-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dot{x}...,\overset{(b(n,p,k)}{x})D_t^k x^i==-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})D_t^k x^i\ . \qquad (9)$$

Доказательство Леммы завершено.

Замечание 1 Тем не менее , можно всегда считать, что $p\ge n$, так как при $p<n$ можно определить

$L_1(x,...,\overset{(n)}{x})\equiv L(x,...,\overset{(p)}{x})\Rightarrow a(n,p)=\max(2n-1,p)$, $b(n,p,k)=\max(2n-k,p)$ В частности , при

$p=n\Rightarrow a(n,p=n)=\max(2n-1,p=n)=2n-1$, $b(n,p=n,k)=\max(2n-k,p=n)=$

$=\max(2n-k,n)=2n-k$ *так как* $2n-k\ge n$ *,так как при* $1\le k\le\min(p,n)\Rightarrow k\le n$

Итак, если некоторое утверждение, использующее взятие производных конечного порядка выполнено для некоторого p ,то

Функциональная часть системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка n может быть интерпретирована как импульсы $0-ого$ порядка ранга n:

$$p^i_{k=0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+0)i}{x}})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l)i}{x}})=0\ ,\ i=\overline{1,m} \qquad (10)$$

Постановка задачи.

Пусть $L:T^pX_m\to\Re$, $L(x,...,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения T^pX_m. Рассмотрим функцию Гамильтона, двойственную к $L:T^pX_m\to\Re$:

$$H(x,\dot{x}...,\overset{(a(n,p))}{x})=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dot{x}...,\overset{(b(n,p,k)}{x})\overset{(k)i}{x}=-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x,\dot{x}...,\overset{(b(n,p,k)}{x})D_t^k x^i == -L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)D_t^k x^i$$

Рассмотрим следующую задачу : при каких условиях имеет ли место сохранение функции Гамильтона на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа. Докажем, что при $p \le n$ имеет место сохранение функции Гамильтона на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа,. Ранее было доказано [16], что при $p \le n$ энергия системы является тензором нулевого ранга, то есть не зависит от выбора локальной системы координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$, а при $p > n$, вообще говоря, зависит от локальных координат и, таким образом, не сохраняется при замене локальной системы координат в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Имеет место следующая важная

Теорема 1 (о дифференциальной связи импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков ранга n). Пусть $L : T^p X_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа.

$p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(p+n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ $\quad k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$ -импульс k-ого порядка по i-ой координате. $p^i_{k,n} = \sum_{l_1=0}^{n-k}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+k)i}}\right)$ импульс k-ого порядка, а соответственно

$p^i_{k-1,n} = \sum_{l_1=0}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}}\right)$ импульс (k-1) –ого порядка .Тогда справедливо:

$$D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},...,\overset{(b(n,p,k))}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},...,\overset{(b(n,p,k-1))}{x}) \qquad (11)$$

Доказательство. Преобразуем выражение

$$D_t p^i_{k,n} = D_t\left(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)\right) = \sum_{l=0}^{n-k} D_t\left((-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)\right) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t\left(D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^{l+1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right) = (-1)\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1} D_t^{l+1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right) == (-1)\left(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1} D_t^{l+1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+1+k-1)i}}\right)\right)$$

Выполним замену $l_1 = l+1,$ так как $l = \overline{0, n-k}$ то $l_1 = \overline{1, n-k+1}$. Следовательно,

$$D_t p^i_{k,n} = (-1)\left(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1} D_t^{l+1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+1+k-1)i}}\right)\right) = (-1)\left(\sum_{l_1=1}^{n-k+1}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}}\right)\right)$$

$$= (-1)\left(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}}\right)\right) = (-1)\left(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}}\right)\right) =$$

$$= (-1)\left(\sum_{l_1=0}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}}\right) - (-1)^0 D_t^0\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(0+(k-1))i}}\right)\right) = (-1)\left(p^i_{k-1,n} - \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\right) = -p^i_{k-1,n} + \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}$$

Т**еорема 1** доказана.

Имеет место следующая простая

Теорема 2(о связи импульсов $k-ого$ порядка рангов n и $n+1$). Пусть $L : T^p X_m \to \Re$.

$L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции $L : T^p X_m \to \Re$ при выборе локальных координат в базе расслоения X_m, $p^i_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ $k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$ -импульс k-ого порядка ранга n

$p^i_{k,n+1} = \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ - импульс k-ого порядка ранга n +1. Тогда справедливо:

$$p^i_{k,n+1}(x,\dot{x},..., \overset{(b(n+1,p,k))}{x}) = p^k_i(x,\dot{x},..., \overset{(b(n,p,k))}{x}) + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right) ,\ i=\overline{1,m},\ k=\overline{0,n} \qquad (12)$$

Доказательство: $p^i_{k,n+1} = \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) + (-1)^{n+1-k} D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1-k+k)i}{x}}\right) =$

$= \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) + (-1)^{n+1-k} D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right) = p^i_{k,n} + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)$.

Так как $p^i_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3 Пусть $L: T^p X_m \to \Re$, $L(x,..., \overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.Тогда при $1 \le p \le n$ выполняется равенство

$$D_t(H(x,\dot{x}..., \overset{(a(n,p))}{x})) = -\sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n}(x,\dot{x}..., \overset{(b(n,p,k))}{x}) \bullet \overset{\bullet}{x}{}^i$$

где $p^i_{k=0,n} = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}\right) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) = 0$, $i = \overline{1,m}$ -импульсы $0-ого$ порядка(функциональная часть системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка n

$H(x,\dot{x}..., \overset{(a(n,p))}{x})$ обобщенная энергия системы ранга n :

$$H(x,\dot{x}..., \overset{(a(n,p))}{x}) = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x,\dot{x}..., \overset{(b(n,p,k)}{x}) \overset{(k)i}{x} = -L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x,\dot{x}..., \overset{(b(n,p,k)}{x}) D_t^k x^i = -L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right) D_t^k x^i \qquad (13)$$

Где $p^i_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ $k = \overline{0, \min(n,p)}, i = \overline{1,m}$ -импульс k -ого порядка ранга n

$$b(n,p,k) = \max(2\min(p,n) - k, p) = \begin{cases} 1)(p \le n) \begin{cases} 2p-k, & k \le p \le n \\ p, & p \le k \le n \end{cases} \\ 2)(p \ge n),\ \max(2n-k,p), \quad p \ge n \end{cases} = \begin{cases} 2p-k, & k \le p \le n \\ p, & p \le k \le n \\ \max(2n-k,p), & p \ge n \end{cases}$$

$$a(n,p) = \max_{1 \le k \le n}(b(n,p,k),k) = \begin{cases} \max(\max\limits_{1 \le k \le \min(n,p)=p}(2p-k,k),\ \underset{p \le k \le n}{p}) = \max(\max\limits_{1 \le k \le \min(n,p)=p}(2p-k),\ p),\ при\ p \le n \\ \max\limits_{1 \le k \le \min(n,p)=n}(\max(2n-k,p),k) = \max(2n-1,p,n)\ ,\ при\ p \ge n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \max(2p-1,p) = 2p-1\ ,\ при\ p \le n \\ \max(2n-1,p)\ ,\ при\ p \ge n \end{cases}$$

Доказательство. Без ограничения общности в силу **замечания 1** будем считать, что $p = n$

$p = n \Rightarrow a(n,p=n) = \max(2n-1,p=n) = 2(p=n)-1 = 2n-1$, $b(n,p=n,k) = \max(2n-k,p=n) = 2n-k$

$$H(x,\dot x...,\overset{(a(n,p))}{x}) = H(x,...,\overset{(2n-1))}{x}) = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot x,...,\overset{(p=n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x} = -L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x}) +$$

$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}$ Найдем полную производную по t: $D_t(-L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}) =$

$$= D_t(-L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})) + D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}) = D_t(-L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})) + (\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} D_t(p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x} + p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x}) D_t \overset{(k)i}{x}) \quad (13)$$

По теореме 1 $D_t p_i^k(x,\dot x,...,\overset{(p+n-k)}{x}) = \dfrac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x,\dot x,...,\overset{(p+n-(k-1))}{x})$ (14) При $p=n \Rightarrow D_t p_i^k(x,\dot x,...,\overset{(p+n-k)}{x}) =$

$$= D_t p_i^k(x,\dot x,...,\overset{(n+n-k)}{x}) = D_t p_i^k(x,\dot x,...,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x,\dot x,...,\overset{(n+n-(k-1))}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x,\dot x,...,\overset{(2n-k+1)}{x})$$

Подставим (14) в (13) $D_t(-L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})) + (\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} D_t(p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x} + p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x}) D_t \overset{(k)i}{x}) =$

$$= D_t(-L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}((\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot x,...,\overset{(n+n-(k-1))}{x}))\overset{(k)i}{x} + p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x}) D_t \overset{(k)i}{x}) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} - p^i_{k-1,n}(x,\dot x,...,\overset{(n+n-(k-1))}{x})\overset{(k)i}{x} + p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} p^i_{k-1,n}(x,\dot x,...,\overset{(n+n-(k-1))}{x})\overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x} \quad (15)$$

Сделаем замену $k-1=l \Rightarrow k=l+1 \quad 1\le k\le n \iff k-1\le l\le n-1$ С учетом этого запишем (15):

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} p^i_{k-1,n}(x,\dot x,...,\overset{(2n-(k-1))}{x})\overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\overset{(l+1)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-1} p^i_{l,n}(x,\dot x,...,\overset{(2n-l)}{x})\overset{(l+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x} \quad (16)$$

Так как $\sum_{i=i_0}^{i=i_1} a_i = \sum_{k=i_0}^{k=i_1} a_k$ не зависит от индекса суммирования , то (16) можно преобразовать (16):

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\overset{(l+1)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-1} p^i_{l,n}(x,\dot x,...,\overset{(2n-l)}{x})\overset{(l+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} p^i_{k,n}(x,\dot x,...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} p^i_{k,n}(x,\dot x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x} \quad (17)$$

Так как

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i + a_n \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{ik} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ik} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} a_{ik} + \sum_{i=1}^{m} a_{in} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ik} + \sum_{i=1}^{m} a_{i0} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} a_{ik} + \sum_{i=1}^{m} a_{i0} + \sum_{i=1}^{m} a_{in}$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}) - \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\overset{(n+1)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\overset{(0+1)i}{x} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}) - \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\overset{(n+1)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\dot x^{i} \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\overset{(0+1)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\dot x^{i} \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}p^{i}_{k,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k=0,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-0)}{x})\overset{(0+1)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n)}{x})\dot x^{i} \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}p^{i}_{k,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k=n,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x} \quad (21)$$

Подставляя (18),(19),(20),(21) в (17) и учитывая ,что $p^{i}_{k=n,n}=\sum_{l=0}^{n-n}(-1)^{l}D^{l}_{t}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+n)i}{x}})=\sum_{l=0}^{0}(-1)^{l}D^{l}_{t}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}})=\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}$ имеем:

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}p^{i}_{k,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}p^{i}_{k,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x})-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\overset{(n+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\dot x^{i}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\dot x^{i}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n)}{x})\dot x^{i}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k=n,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x})+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\dot x^{i}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\dot x^{i}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k=n,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k=n,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n)}{x})\dot x^{i}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{n,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n)}{x})\dot x^{i}=-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{n,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{n,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n)}{x})\dot x^{i}=-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot x\dots,\overset{(2n)}{x})\dot x^{i}$$ **Теорема 3** доказана.

Очевидным следствием **теоремы 3** является очевидная

Теорема 4 Пусть $L:T^{p}X_{m}\to\Re$, $L(x,\dots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^{p}X_{m}$. $1\le p\le n$ Тогда на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа

$$p^{i}_{k=0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^{l}D^{l}_{t}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}D^{l}_{t}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}})=0\ ,\ i=\overline{1,m}$$ -импульсы $0-ого$ порядка(функциональная часть системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка n

Двойственная к функции Лагранжа функция Гамильтона(обобщенная энергия) сохраняется:

$$D_{t}(H(x,\dot x\dots,\overset{(a(n,p))}{x}))=\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot x\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\dot x^{i}\equiv 0\ \Leftrightarrow H(x,\dot x\dots,\overset{(a(n,p))}{x})\equiv const \quad (22)$$

Доказательство. На экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа

$$p^{i}_{0,n}=p^{i}_{k=0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^{l}D^{l}_{t}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}D^{l}_{t}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}})=0\ ,\ i=\overline{1,m}$$

По теореме 3 для $1\le p\le n$ имеем $D_{t}(H(x,\dot x\dots,\overset{(a(n,p))}{x}))=\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot x\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\dot x^{i}=0$ **Теорема 4** доказана.

Замечание 2 $L: T^p X_m \to \Re$, $L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. $1 \le p \le n$. По **Лемме1** система уравнений Лагранжа $p^i_{k=0,n} = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right)$ имеет порядок производных

$$b(n,p,k) = \max(2\min(p,n)-k,p) = \begin{cases} 1)(p \le n) \begin{cases} 2p-k, & k \le p \le n \\ p, & p \le k \le n \end{cases} \\ 2)(p \ge n), \ \max(2n-k,p), & p \ge n \end{cases} = \begin{cases} 2p-k, & k \le p \le n \\ p, & p \le k \le n \\ \max(2n-k,p), & p \ge n \end{cases},$$

$$b(n,p,k=0) = 2p - 0 = 2p$$

а двойственная к функции Лагранжа функция Гамильтона

$$a(n,p) = \max_{1\le k \le n}(b(n,p,k),k) = \begin{cases} \max(\max\limits_{1\le k\le \min(n,p)=p}(2p-k,k), \ \max\limits_{p\le k\le n} p) = \max(\max\limits_{1\le k\le \min(n,p)=p}(2p-k),\ p), \ при \ p \le n \\ \max\limits_{1\le k\le \min(n,p)=n}(\max(2n-k,p),k) = \max(2n-1,p,n) \ , \ при \ p \ge n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \max(2p-1,p) = 2p-1 \ , \ при \ p \le n \\ \max(2n-1,p) \ , \ при \ p \ge n \end{cases}, a(n,p) = 2p-1$$

,то есть на 1 меньше, чем система уравнений Эйлера-Лагранжа и по **теореме 4** является интегралом этой системы. **Теорема 3** сформулирована для $p \le n$.Для обобщения **теоремы 3** докажем следующую

Теорема 5 Пусть **.** Пусть $L: T^p X_m \to \Re$, $L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Функция

- $$H_n(x,\dot{x},\ldots,\overset{(a(n,p))}{x}) = H_n = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x} = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n} D^k_t x^i =$$

$$= -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right) D^k_t x^i \quad , \overset{(k)i}{x} = D^k_t x^i,$$

- $$H_{n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x}) = H_{n+1} = H_{n+1}(L,x) = H(L,x,n+1) = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x} = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n+1} D^k_t x^i =$$

$$= -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right) D^k_t x^i \quad , \overset{(k)i}{x} = D^k_t x^i,$$

-двойственные функции Гамильтона(обобщенная энергия) рангов $n \ и \ n+1$ соответственно

$$p^i_k(n) = p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$$

$$p^i_k(n+1) = p^i_{k,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n+1,p,k))}{x}) = \sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{0,n+1}, i = \overline{1,m}$$

-импульсы $k-ого$ порядка рангов $n \ и \ n+1$ соответственно. Тогда

$$H_{n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x}) = H_{n+1} = H_n + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k} \cdot D^{n+1-k}_t \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right) \cdot \overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m} p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) \cdot \overset{(n+1)i}{x} \quad (23)$$

Доказательство.

- $$H_{n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x}) = H_{n+1} = H_{n+1}(L,x) = H(L,x,n+1) = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x} \quad (24)$$

Учитывая тождество $\sum_{k=1}^{n+1}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+a_{n+1}\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+1}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ik}+\sum_{i=1}^{m}a_{i,n+1}$, преобразуем(24):

$$H_{n+1}(x,\overset{\bullet}{x}\dots,\overset{(a(n+1,p))}{x})=H_{n+1}=H_{n+1}(L,x)=H(L,x,n+1)=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{k=n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x}=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x}\quad(25)$$

По теореме 2 $p^i_{k,n+1}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n+1,p,k))}{x})=p^k_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}\right)$, $i=\overline{1,m},\ k=\overline{0,n}$ (26)

Подставим (26) в (25):

$$H_{n+1}(x,\overset{\bullet}{x}\dots,\overset{(a(n+1,p))}{x})=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x}=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(p^k_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}\right)\right)\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x}=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^k_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\overset{(k)i}{x}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}\right)\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x}=H_n(x,\overset{\bullet}{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}\right)\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x}\quad(27)$$

В (27) было использовано: $H_n(x,\overset{\bullet}{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x})=H_n=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}=$ (28)

Теорема 5 доказана.
Теорема 3 сформулирована для $1\le p\le n$. Обобщением **теоремы 3** для любого $p\in\mathbb{N}$ является

Теорема 6 Пусть $L:T^pX_m\to\Re$, $L(x,\dots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения T^pX_m .Тогда при $p\in\mathbb{N}$ выполняется равенство

$$D_t(H_n(x,\overset{\bullet}{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x}))=-\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}(x,\overset{\bullet}{x}\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\bullet\overset{\bullet i}{x}\quad i=\overline{1,m}\quad(29)$$

$$\theta:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\quad \theta(n)=\begin{cases}1\ ,\ n>0\\ 0\ ,\ n\le 0\end{cases}-\textit{тета функция Хевисайда}$$

$p^i_{k=0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+0)i}{x}}\right)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l)i}{x}}\right)=0\ ,\ i=\overline{1,m}$ -импульсы $0-\textit{ого}$ порядка(функциональная часть системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка n

Доказательство. Проведем методом математической индукции по n .

База индукции $n=1$ $H_n(x,\overset{\bullet}{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x})=H_n=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}$

$$H_{n=1}(x,\overset{\bullet}{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x})=H_1=H_1(L,x)=H(L,x,n=1)=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n=1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n=1}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+\sum_{i=1}^{m}p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x}=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+\sum_{i=1}^{m}p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x}\quad(30)$$

$$p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\right)\Rightarrow p^i_{k=1,n=1}=p^i_{1,1}=\sum_{l=0}^{1-1}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\right)=\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(0+1)i}{x}}=\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{\bullet i}{x}}$$

$$p^i_{k=0,n=1} = p^i_{0,1} = \sum_{l=0}^{1-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(0+0)i}{x}} + (-1)^1 D_t^1 \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(0+1)i}{x}} = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}} - D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{\bullet i}{x}}\Big) \quad (31)$$

Поэтому $H_1 = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^m p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x} = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{\bullet i}{x}}\overset{(1)i}{x} = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{\bullet i}{x}}\overset{\bullet i}{x}$ (30)

$$D_t(H_1) = D_t(-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^m p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x}) = -D_t(L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})) + \sum_{i=1}^m (D_t(p^i_{1,1})\bullet\overset{\bullet i}{x} + p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x}) \quad (31)$$

По **теореме 1** $D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x}) \Rightarrow D_t(p^i_{k=1,n=1}) = D_t(p^i_{1,1}) =$

$$= \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(1-1)i}{x}} - p^i_{(k=1)-1,n=1}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n=1,p,(k=1)-1))}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}} - p^i_{0,1} = D_t p^i_{1,1}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n=1,p,k=1))}{x}) = D_t p^i_{1,1} \quad (32)$$

Учитывая, что $-D_t(L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})) = -\sum_{i=1}^m\sum_{k=0}^p \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}$, а также очевидные равенства

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=2}^n a_k + a_0 + a_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^m\sum_{k=0}^n a_{ik} = \sum_{k=0}^n\sum_{i=1}^m a_{ik} = \sum_{k=2}^n\sum_{i=1}^m a_{ik} + \sum_{i=1}^m a_{i0} + \sum_{i=1}^m a_{i1} = \sum_{i=1}^m\sum_{k=2}^n a_{ik} + \sum_{i=1}^m a_{i0} + \sum_{i=1}^m a_{i1},\ \sum_{k=n+1}^p a_k = \theta(p-n)\sum_{k=n+1}^p a_k$$

где $\theta:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ $\theta(n) = \begin{cases}1\ , & n>0\\ 0\ , & n\le 0\end{cases}$ $-$ *тета функция Хевисайда.*

подставляем левую часть (32) в (31) :

$$D_t(H_1) = D_t(-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^m p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x}) = -D_t(L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})) + \sum_{i=1}^m (D_t(p^i_{1,1})\cdot\overset{\bullet i}{x} + p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x}) =$$

$$= -D_t(L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})) + \sum_{i=1}^m\Big(\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}} - p^i_{0,1}\Big)\bullet\overset{\bullet i}{x} + p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x}\Big) = -\sum_{i=1}^m\sum_{k=0}^p \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}}\bullet\overset{\bullet i}{x} -$$

$$-\sum_{i=1}^m p^i_{0,1}\bullet\overset{\bullet i}{x} + \sum_{i=1}^m p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x} = -\sum_{i=1}^m\sum_{k=2}^p \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k=0)i}{x}}\overset{(k=1)i}{x} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k=1)i}{x}}\overset{(k=1+1)i}{x} +$$

$$+\sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}}\bullet\overset{\bullet i}{x} - \sum_{i=1}^m p^i_{0,1}\bullet\overset{\bullet i}{x} + \sum_{i=1}^m p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x} = -\sum_{i=1}^m p^i_{0,1}\bullet\overset{\bullet i}{x} - \sum_{i=1}^m\sum_{k=2}^p \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k=0)i}{x}}\overset{(k=1)i}{x} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}}\bullet\overset{\bullet i}{x} -$$

$$-\sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k=1)i}{x}}\overset{(k=1+1)i}{x} + \sum_{i=1}^m p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x} = -\sum_{i=1}^m p^i_{0,1}\bullet\overset{\bullet i}{x} - \sum_{i=1}^m\sum_{k=2}^p \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} = \sum_{i=1}^m p^i_{0,1}\bullet\overset{\bullet i}{x} - \theta(p-1)\sum_{i=1}^m\sum_{k=2}^p \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}$$

База индукции доказана. Индуктивный переход. Пусть утверждение справедливо для $n\in\mathbb{N}$:

$$D_t(H_n(x,\dot{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x})) = -\theta(p-n)\sum_{i=1}^m\sum_{k=n+1}^p \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} - \sum_{i=1}^m p^i_{0,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\bullet\overset{\bullet i}{x} \quad i=\overline{1,m} \quad (33)$$

Докажем, что $D_t(H_{n+1}(x,\dot{x}\dots,\overset{(a(n+1,p))}{x})) = -\theta(p-(n+1))\sum_{i=1}^m\sum_{k=n+2}^p \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} - \sum_{i=1}^m p^i_{0,n+1}(x,\dot{x}\dots,\overset{(b(n+1,p,k))}{x})\bullet\overset{\bullet i}{x} \quad i=\overline{1,m}$ (34)

По теореме 5 $H_{n+1}(x,\dot{x}\dots,\overset{(a(n+1,p))}{x}) = H_{n+1} = H_n + \sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^n(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\cdot\overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^m p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot\overset{(n+1)i}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow D_t(H_{n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x})) = D_t(H_n + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\cdot \overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m} p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot \overset{(n+1)i}{x}) =$$

$$= D_t(H_n) + D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\cdot \overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m} p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot \overset{(n+1)i}{x})) =$$

$$= D_t(H_n) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t(D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\cdot \overset{(k)i}{x}) + D_t(\sum_{i=1}^{m} p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot \overset{(n+1)i}{x}) =$$

$$= D_t(H_n) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot(D_t^{n+1+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\cdot \overset{(k)i}{x} + D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) D_t \overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m} D_t p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot \overset{(n+1)i}{x} + p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) D_t \overset{(n+1)i}{x}) = \quad (35)$$

$$p^i_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) \Rightarrow p^i_{k=n+1,n+1} = p^i_{n+1,n+1} = \sum_{l=0}^{n+1-(n+1)}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) = \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(0+n+1)i}{x}} = \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}} \quad (36)$$

По **теореме 1**

$$D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x}) \Rightarrow D_t(p^i_{k=n+1,n+1}) = D_t(p^i_{n+1,n+1}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} - p^i_{n,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x}) \quad (37)$$

Поэтому (35):

$$= D_t(H_n) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot(D_t^{n+1+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\cdot \overset{(k)i}{x} + D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) D_t \overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m} D_t p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot \overset{(n+1)i}{x} + p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) D_t \overset{(n+1)i}{x}) =$$

$$D_t(H_n) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot(D_t^{n+1+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\cdot \overset{(k)i}{x} + D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\overset{(k+1)i}{x}) + \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} - p^i_{n,n+1})\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x} =$$

$$D_t(H_n) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+2-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\cdot \overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\overset{(k+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} - p^i_{n,n+1})\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x} =$$

$$D_t(H_n) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+2-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\cdot \overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+2-(k+1)} D_t^{n+2-(k+1)}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\overset{(k+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} - p^i_{n,n+1})\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x} =$$

$$D_t(H_n) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+2-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\cdot \overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{n+2-k} D_t^{n+2-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} - p^i_{n,n+1})\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x} =$$

$$D_t(H_n) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+2-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\cdot \overset{(k)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{n+1-k} D_t^{n+2-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} - p^i_{n,n+1})\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x} =$$

$$D_t(H_n) + (-1)^{n+1-1}\cdot\sum_{i=1}^{m} D_t^{n+2-1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\cdot \overset{(k=1)i}{x} - \sum_{i=1}^{m} D_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} - p^i_{n,n+1})\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x} =$$

$$= -\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} - \sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{m}(-1)^n\cdot D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\cdot\dot{x}^i - \sum_{i=1}^{m} D_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\overset{(n+1)i}{x} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} - p^i_{n,n+1})\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x} \quad (38)$$

По **теореме 2** $p^i_{k,n+1}(x,\dot{x},\dots,\overset{(p+n+1-k)}{x}) = p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(p+n-k)}{x}) + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}\left(\dfrac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{0,n} \Rightarrow$

$$p^i_{0,n+1}(x,\dot{x},\dots,\overset{(p+n+1)}{x}) = p^i_{0,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(p+n-0)}{x}) + (-1)^{n+1-0} D_t^{n+1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right),\ i=\overline{1,m},\ k=\overline{0,n} \Rightarrow p^i_{0,n+1} = p^i_{0,n} + (-1)^{n+1} D_t^{n+1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^i_{0,n} = p^i_{0,n+1} - (-1)^{n+1} D_t^{n+1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right) = p^i_{0,n+1} + (-1)^{n+2} D_t^{n+1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right) \qquad (39)$$

$$p^i_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \Rightarrow p^i_{k=n+1,n+1} = p^i_{n+1,n+1} = \sum_{l=0}^{n+1-(n+1)} (-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(0+n+1)i}{x}} = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}} \quad (40)$$

По **теореме 1** $D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow D_t(p^i_{k=n+1,n+1}) = D_t(p^i_{n+1,n+1}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} - p^i_{n,n+1}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x}) = D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right) \qquad (41)$$

Подставляем (39),(41) в (38) :

$$-\theta(p-n)\sum_{i=1}^m\sum_{k=n+1}^p \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \overset{(k+1)i}{x} - \sum_{i=1}^m p^i_{0,n}\bullet\dot{x}^i + \sum_{i=1}^m (-1)^n \cdot D_t^{n+1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot \dot{x}^i - \sum_{i=1}^m D_t\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right) \overset{(n+1)i}{x} +$$

$$+\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} - p^i_{n,n+1}\right)\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x} = -\theta(p-n)\sum_{i=1}^m\sum_{k=n+1}^p \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} - \sum_{i=1}^m\left(p^i_{0,n} - (-1)^n\cdot D_t^{n+1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\right)\bullet\dot{x}^i +$$

$$+\sum_{i=1}^m\left(-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right) + \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} - p^i_{n,n+1}\right)\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x} =$$

$$= -\theta(p-n)\sum_{i=1}^m\sum_{k=n+2}^p \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} - \sum_{i=1}^m p^i_{0,n+1}\bullet\dot{x}^i = -\theta(p-(n+1))\sum_{i=1}^m\sum_{k=n+2}^p \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} - \sum_{i=1}^m p^i_{0,n+1}\bullet\dot{x}^i$$

Индуктивный переход доказан.**Теорема 6** доказана.
Следствием **теоремы 6** является

Теорема 7 **Теорема 4** Пусть $L: T^p X_m \to \Re$, $L(x,\dots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Тогда на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа

$$p^i_{k=0,n} = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}\right) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) = 0\ ,\ i=\overline{1,m}$$

Двойственная к функции Лагранжа функция Гамильтона(обобщенная энергия)
1) при $1\le p\le n$ сохраняется:

$$D_t(H(x,\dot{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x})) = \sum_{i=1}^m p^i_{0,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\bullet\dot{x}^i \equiv 0 \Leftrightarrow H(x,\dot{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x}) \equiv const \quad (22)$$

2) при $p \ge n$ $D_t(H(x,\dot{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x})) = \sum_{i=1}^m p^i_{0,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\bullet\dot{x}^i \ne 0 \Leftrightarrow H(x,\dot{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x}) \ne const$ (22)

ABOUT INTEGRALS OF GENERALIZED ENERGY AT THE EXTREMALS OF THE EULER-LAGRANGE EQUATION SYSTEM

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

The paper considers the properties of the Hamilton and Lagrange functions in the coordinate - momentum space. The main result obtained is the property of conservation of generalized energy of rank n on the extremals of the system of Euler-Lagrange equations of order n. This property is a sufficient but not necessary condition for the conservation of generalized energy of rank n.

Keywords: Hamilton function, variation problem, fiber space of velocities,, Euler-Lagrange equations, smooth manifolds, energy tensor, tensor of generalized momentum, non-degenerate function.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: УРСС, 1994.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
6. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
7. Козлов А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2006. – № 3. – С. 63–64.
8. Галеев Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
12. Трофимов В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов А.Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995.
13. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Вакуленко С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
15. Пастухов Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
16. Пастухов Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
17. Пастухов Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
18. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2018. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094. – Дата доступа: 15.06.2019.
19. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика,7:1(2001), 285-288
20. Пастухов, Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.
21. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии 2 [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/23288. – Дата доступа: 26.03.2019.

22. Пастухов, Ю.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 137-153.
23. Пастухов, Ю.Ф. Обратная теорема Гамильтона / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 86-100.
24. Пастухов Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона в параллелепипеде с шестым порядком погрешности/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–174.
25. Волосова Н.К. Векторный аналог метода прогонки для решения трех- и пятидиагональных матричных уравнений/ Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 101–115.
26. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии/ Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова //Мир транспорта. – 2019. Т.17. № 3(82). С. 16-39.