УДК 528.063

РАЗВИТИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО СПОСОБА УРАВНИВАНИЯ

П.В. СУББОТЕНКО
(Полоцкий государственный университет)

Метод многокритериальной оптимизации развивался последовательно: были разработаны универсальные алгоритмы уравнивания и оценки точности для способа L_p-оценок; многостепенные методы уравнивания с использованием не одной степени n, а нескольких степеней n_i, включая общий случай, когда для каждого измерения отыскивается своя степень; многокритериальная оптимизация, позволяющая отыскивать индивидуальные степени под условием дополнительных критериев. Благодаря новой методике, вопреки известной теореме Гаусса – Маркова, были получены результаты оценки точности планового положения пунктов в 1,3 раза меньше, чем классический метод наименьших квадратов. Одновременно с этим не только уменьшается обусловленность матрицы Гессе, но и в ряде случаев возрастает вероятность попадания в круг ошибок на определяемых пунктах в слабом месте геодезических сетей.

Введение. При изучении проблем экономики, планирования, управления, организации производства и других все более широкое применение находит новое научное направление, получившее название «исследование операций».

При решении тех или иных задач каждое операционное исследование последовательно проходит три основных этапа:

1) постановка задачи и построение математической модели изучаемого процесса или явления;
2) анализ полученной модели и нахождение метода решения;
3) реализация найденного решения и результатов исследований на практике.

Во многих случаях процесс формализации задачи осуществляется путем выбора соответствующего критерия эффективности решения, определяющегося целевой функцией и системой ограничений.

Одним из наиболее серьезных недостатков современных методов исследования операций является то, что все они предполагают оценку решений по одному скалярному критерию эффективности. Однако в некоторых задачах по выбору решения имеется несколько критериев, и все они должны учитываться для правильного выбора оптимального решения.

В статье дан обзор методики использования векторного критерия решения для уравнительных вычислений, которая приводит их к новым по качеству результатам.

Основная часть. В работе [1] рассматривается случай многокритериальной оптимизации, когда при минимизации используются функции:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i \left| L_i(X) \right|^{n_i}; \tag{1}$$

$$\Phi_2(X) = \min \sum_{j=1}^{k} q_j M_j , \tag{2}$$

где $q = 1 - p$ – уровень значимости, вычисляемый по значению p вероятности попадания в круг ошибок и определяемый в процессе минимизации численным способом из 1000 испытаний; M_j – значение ошибки планового положения пункта.

Приведены результаты оценки точности μ, M вероятности попадания в круг ошибок радиуса M.

Кроме этого были опробованы следующие целевые функции:

$$\Phi_2(X) = \min \ \min q \cdot \max M \ ; \tag{3}$$

$$\Phi_2(X) = \min \sum_{j=1}^{k} \frac{M_j}{P_j}; \tag{4}$$

$$\Phi_2(X) = \min \left(\max \frac{M_j}{P_j} \right). \tag{5}$$

Только функция (3) дала наилучшие результаты для тестовых примеров.

В статье [2] рассматривается случай многокритериальной оптимизации в пространственной системе координат, когда при минимизации используются две целевые функции:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i \left| L_i(X) \right|^{n_i}; \tag{6}$$

$$\Phi_2(X) = \min(\max M). \tag{7}$$

Минимизация функции (6) выполнялась методом релаксации с шагом λ путём его деления до тех пор, пока он не стал меньше $d\lambda$. Приведены формулы, позволяющие построить самонастраивающийся алгоритм, не зависящий от вида пространственной засечки и длин сторон.

Расчёты показали, что независимо от длин сторон вероятность попадания в шар ошибок $p_ш = 0{,}6\ldots0{,}7$, а в эллипсоид ошибок $p_э = 0{,}18\ldots0{,}38$.

В статье [3] осуществляется вывод формулы для вычисления весов при многокритериальной оптимизации. Для минимизации целевой функции (6) был применен метод Ньютона. В результате получили:

$$C = diag(C_i), \tag{8}$$

где

$$C_i = n_i(n_i - 1)P_i|L_i(X)|^{n_i-2}. \tag{9}$$

Для целевой функции получили:

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - (A^T CA)^{-1} A^T diag\left(\frac{1}{n_i - 1}\right) CL(X). \tag{10}$$

Матрица C является весовой матрицей при многостепенной оптимизации, а формула (10) позволяет выполнить эту оптимизацию аналитически.

В работе [4] обсуждается проблема определения такой точности измерений углов, длин линий, превышений при проектировании геодезических сетей, которая обеспечивала бы определение искомых параметров сети с заданной точностью. Предлагается новый алгоритм решения указанной выше задачи, основанный на многокритериальной оптимизации наряду с ранее известным – с применением расширенной псевдообратной матрицы.

Во всех приведённых примерах присутствовали ошибки измерений и выполнялась априорная оценка точности при $\mu = 1$. Такая ситуация может встретиться на практике: например, на местности развита геодезическая сеть и выполнены измерения. При полученном составе ошибок измерений можно получить данные, адекватные этим ошибкам и предельные ошибки положения, за рамки которых, варьируя весами, выйти невозможно.

Предложена программа OPTKSKR.exe, позволяющая решить эту задачу автоматически, проектируя требуемые веса измерений.

В статье [5] описываются особенности применения коррелатного и параметрического способов при многокритериальном уравнивании геодезических сетей. Приведены результаты обработки девяти примеров.

Методика выбора весов измерений при многокритериальном уравнивании рассматривается в [6]. Как известно, в этом способе вычисления производятся под условием минимума двух целевых функций:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^{N} P_{n_i} \left| L_i(X) \right|^{n_i}; \tag{11}$$

$$\Phi_2(X, n) = \sum_{j=1}^{K} M_j^2. \tag{12}$$

В этом случае значения функции Φ_2 будут зависеть от назначения весов измерений и достигнут своего наибольшего значения при $P_{n_i} = 1$ и $n_i = 2{,}0$. В результате получается неоднозначность в решении: для однородных измерений величина $M_i \approx M_{n=2,0}/10$ при $\sigma''_\beta = 0{,}1$ или $\sigma''_\beta = 10{,}0$. Поскольку мы стремимся к меньшим значениям M, необходимо однозначно назначать веса P_{n_i}, чтобы получить единственное решение. Исключение составляют линейно-угловые сети, так как при $P_в \approx 1$ $P_S > 100$, а при $P_S \approx 1$ $P_в < 0{,}01$

и метод многокритериальной оптимизации даёт реальное решение, если веса задавать по одной из следующих трёх формул [6]:

$$c = \left[\frac{n^{\frac{2}{n}} \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}; \tag{13}$$

$$P_{n_i} = \left(\frac{m_i}{\sigma_i}\right)^{n_i}, \tag{14}$$

где m_i – средняя квадратическая ошибка измерения, полученная при $n = 2{,}0$;

$$P_{n_i} = \left(\frac{1}{m_i}\right)^{n_i}. \tag{15}$$

В [6] приведены результаты по трём вариантам формул для девяти примеров. Было отдано предпочтение формуле (15).

В работе [7] изложен алгоритм метода многостепенной многокритериальной оптимизации, в котором минимизируются две целевые функции (11), (12). Минимизация этих функций осуществляется методом проб и ошибок с поиском степеней $n_j = 2{,}0 \pm 0{,}1$, принятых для всех измерений, числом итераций, не превосходящих 20. Применение изложенного алгоритма эффективно при определённых условиях:

$$K_1 \le \frac{N}{N-r} \le K_2, \tag{16}$$

где N – количество результатов измерений.

В исследовании [7] преследуется цель установить статистическим путём K_1 и K_2, в пределах которых целесообразно применение нового метода. Был рассмотрен пример космической линейной засечки, в которой первоначально использовались 36 станций слежения, расположенных вблизи экватора. Рассматривалось 16 вариантов сети наблюдений с очередным исключением одного северного и южного пунктов слежения так, чтобы схема расположения пунктов оставалась симметричной. В каждом варианте обрабатывались результаты измерений с разными ошибками наблюдений, сгенерированными по нормальному закону распределения из 30 испытаний. Таким образом, общее количество испытаний составило 480.

По данным сравнения выяснилось, что эффективность нового метода очевидна при $K_1 = 2$ и $K_2 = 7$. При малом количестве измерений $N < 6$ ($r < 3$) новый метод при $M < M_{МНК}$ может привести к случайному результату. При большом количестве результатов измерений m мало. К недостатку нового метода по сравнению с методом наименьших квадратов (МНК) следует отнести то, что μ' имеет произвольную при разных n_i размерность и не является средней квадратической ошибкой измерения, вес которой равен единице [7].

В исследовании [8] говорится о том, что методы обработки измерений, отличные от МНК, позволяют получать эффективные оценки даже при небольшом отличии закона распределения погрешностей измеренных величин от нормального. Эти методы более сложные и требуют большего объёма вычислений, но с развитием вычислительной техники становятся актуальными, особенно при обработке спутниковых наблюдений. Они позволяют полнее учитывать информацию об измерениях и получать достоверные показатели в виде несмещённых, состоятельных и эффективных оценок. Одним из таких алгоритмов является многостепенная оптимизация, предложенная для обработки геодезических сетей в [9].

Для уравнивания и оценки точности геодезических сетей многостепенным многокритериальным методом необходимо знать матрицу F. Предлагается получить её рекуррентным способом по приведённым в [8] формулам. Представлена таблица с результатами вычисления по МНК и новому методу на восьми примерах. Из таблицы видно, что новый метод даёт лучшие значения ошибок положения искомых пунктов, однако он требует больше вычислительного времени.

В статье [10] поставлена цель сравнить нелинейный и линеаризованный метод многокритериального уравнивания с применением целевых функций:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^{N} P_{n_i} \left| L_i(X) \right|^{n_i}; \tag{17}$$

$$\Phi_2(X,n) = \max M\ ; \tag{18}$$

$$\Phi_3(X,n) = \sum_{j=1}^{K} M_j^2\ . \tag{19}$$

Две разные целевые функции Φ_2 и Φ_3 необходимы для того, чтобы выяснить, какая из них лучшая. Результаты сравнения получены, используя 24 примера. Пришли к следующим выводам: нелинейный метод занимает намного больше машинного времени, чем линейный; нелинейный метод получения расширенной псевдообратной матрицы F может дать сбои (замечено в двух примерах); сочетание целевых функций Φ_1 и Φ_2 или Φ_1 и Φ_3 практически равноценны.

В статье [11] приведён алгоритм многокритериального уравнивания коррелатным способом. Линеаризованный вариант коррелатного многокритериального способа включает минимизацию целевых функций (17), (18), (19). Две разные целевые функции Φ_2 и Φ_3 необходимы для того, чтобы выяснить, какая из них лучшая. Получены результаты сравнения, используя 24 примера, на основании которых сделаны следующие выводы: 1) условия (18), (19) по сравнению с МНК всегда приводят к меньшим величинам M (исключение составил один пример); 2) наибольший эффект уменьшения M достигается для линейно-угловых сетей и построений трилатерации. Уменьшение M по сравнению с МНК составляет 2,5 раза; 3) применение условий (18) и (19) практически равноценно, но предпочтение отдано функции (18).

В работе [12] наряду с уже известными целевыми функциями (17), (18), (19) при многокритериальном уравнивании геодезических сетей коррелатным и параметрическим способами предлагается использование целевой функции:

$$\Phi_4(X,n) = \max M \cdot \mu\ , \tag{20}$$

чтобы дать ограничения на величины поправок в результаты измерений $V = L(X)$, поскольку было замечено, что при использовании многокритериальной оптимизации наибольшая поправка в измерения там, где индивидуальный показатель степени близок к единице. Поставлена цель – установить, как влияет функция (20) на величину поправок в измерения по сравнению с (18).

В статье [13] описывается расширенная псевдообратная матрица:

$$F = (A^T PA)^{-1} A^T P, \tag{21}$$

вместо которой при многокритериальной оптимизации используется матрица:

$$F_1 = (A^T CA)^{-1} A^T C, \tag{22}$$

где
$$C = P_n n(n-1)|V|^{n_i - 2}\ . \tag{23}$$

Опыт применения многокритериальной оптимизации показал, что

$$\gamma = \frac{M_{j_{МНК}}}{M_{j,n}} \tag{24}$$

может достигать значения 2, т.е. с применением многокритериальной оптимизации ошибка положения пункта по сравнению с МНК может уменьшиться в 2,0 раза.

В работе поставлена задача установить методом статистических испытаний величину γ при многокритериальной оптимизации, не меняя матрицу C, полученную по реальным измерениям. Эта величина будет характеризовать свойство F_1, которое заключается в том, что $1 \le \gamma \le 1{,}2$. Иначе говоря, матрица C, полученная по первому испытанию, приводит к уменьшению $M_{j,n}$ в 1,2 раза, найденных из 10 000 испытаний. Приведена таблица со значениями $M_{j,МНК}$ и $M_{j,n}$ для 24 примеров.

В [14] говорится о том, что метод многокритериальной оптимизации особенно эффективен при обработке линейно-угловых сетей с завышенным значением числа обусловленности матрицы R с использованием $Q = R^{-1}$. Приведён пример обработки полигонометрического хода. Поставлена цель – сравнить приведённые в [14] истинные координаты $X^{ист.}$ с $X_{МНК}$ и $X_{МК}$, полученными в результате уравнивания по указанным в статье формулам после задания в каждое измерение (по 10 различным вариантам) поправок, сгенерированных датчиком псевдослучайных чисел. Приведена таблица результатов вычислений. Сделаны следующие *выводы:*

1) положение определяемых пунктов в методе МК в девяти случаях из десяти ближе к истинным значениям примерно в 2 – 5 раз (в одном случае в 10 раз меньше);

2) во всех случаях $M_{МК} < M_{МНК}$ при плохой обусловленности системы $R = A^T PA$;
3) метод МК эффективнее МНК при обработке плохо обусловленных систем нормальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мицкевич, В.И. Многокритериальная оптимизация результатов геодезических измерений, приводящая к меньшей погрешности положения пунктов с одновременным возрастанием вероятности попадания в круг ошибок / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 2003. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 1.09.03, № 804. – ГД 03 деп.
2. Мицкевич, В.И. Двухкритериальная многоцелевая оптимизация пространственных засечек под условием минимума погрешности определения пункта с одновременным возрастанием вероятности попадания в шар или эллипсоид ошибок / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, П.В. Субботенко, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 2003. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 1.09.03, № 805. – ГД 03 деп.
3. Мицкевич, В.И. Вывод формулы для вычисления весов результатов измерений при многостепенной оптимизации / В.И. Мицкевич, А.А. Скрипленок, П.В. Субботенко, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 2003. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 1.09.03, № 806. – ГД 03 деп.
4. Мицкевич, В.И. Определение оптимального плана измерений при заданной точности искомых параметров сети многокритериальным методом / В.И. Мицкевич, А.А. Скриплёнок, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 2003. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 1.09.03, № 807. – ГД 03 деп.
5. Мицкевич, В.И. Применение коррелатного и параметрического способов при многокритериальном уравнивании геодезических сетей / В.И. Мицкевич, В.Е. Плюта, Д.В. Усов, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 2004. – 14 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 15.06.04, № 853. – ГД 04 деп.
6. Головань, Г.Е. Сравнение методик назначения весов результатов измерений при многокритериальном уравнивании / Г.Е. Головань, М.А. Залесский, В.И. Мицкевич, И.П. Шевелев; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 2004. – 8 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 15.06.04, № 854. – ГД 04 деп.
7. Подшивалов, В.П. Статистическое обоснование метода многостепенной многокритериальной оптимизации / В.П. Подшивалов, В.И. Мицкевич, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 2004. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 15.06.04, № 855. – ГД 04 деп.
8. Мицкевич, В.И. Многостепенное многокритериальное уравнивание и оценка точности геодезических сетей рекуррентным способом / В.И. Мицкевич, А.А. Скриплёнок, В.В. Ялтыхов // Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 2004. – 6 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 19.01.04, № 835. – ГД 04 деп.
9. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 5 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99, № 681. – ГД.
10. Мицкевич, В.И. Сравнение результатов нелинейного и линеаризованного параметрического многокритериального уравнивания геодезических сетей / В.И. Мицкевич, В.Е. Плюта, Д.В. Усов, Г.А. Шароглазова, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 2004. – 27 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 7.09.04, № 856. – ГД 04 деп.
11. Мицкевич, В.И. О выборе дополнительных целевых функций при многокритериальном коррелатном уравнивании геодезических сетей / В.И. Мицкевич, В.Е. Плюта, Д.В. Усов, Г.А. Шароглазова, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 2004. – 21 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 7.09.04, № 857. – ГД 04 деп.
12. Мицкевич, В.И. Линеаризованное параметрическое и коррелатное многокритериальное уравнивание геодезических сетей с помощью двух разных дополнительных функций / В.И. Мицкевич, В.Е. Плюта, Д.В. Усов, Г.А. Шароглазова, В.В. Ялтыхов; Полоцкий гос.ун-т. – Новополоцк. – 2004. – 25 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 7.05.04, № 858. – ГД 04 деп.
13. Мицкевич, В.И. О свойствах расширенной псевдообратной матрицы, вычисленной при многокритериальной оптимизации / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, Д.В. Усов, Г.А. Шароглазова, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 2004. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 7.09.04, № 859. – ГД 04 деп.
14. Маковский, С.В. О малости отклонений координат пунктов в методе многокритериальной оптимизации от их истинных значений / С.В. Маковский, В.И. Мицкевич, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 2005. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 22.09.05, № 880. – ГД 05 деп.

Поступила 06.04.2009