Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

«Полоцкий государственный университет»

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ,

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

(издание 3-е дополненное)

Новополоцк
ПГУ
2020

УДК 514

Рецензент:
А.А. Козлов, кандидат физико-математических наук, доцент,
Заведующий кафедрой Высшей математики
Полоцкого государственного университета

Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф.
Сборник статей по дифференциальной геометрии (3-е издание)
/Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, - 3 - е изд. дополненное, - Новополоцк:
ПГУ, 2020. - 158 с.

Материал сборника соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта по математике. Сборник содержит семь статей по дифференциальной геометрии, которые связаны с разделами математики, такими как методы оптимизации, уравнениями математической физики, дифференциальными уравнениями. Размещенные в сборнике работы связаны с лагранжевым и гамильтоновым формализмом, разработанным в механике несколько сот лет назад для производных первого порядка. Здесь получены новые результаты для производных старшего порядка.

Для студентов университетов, педагогических вузов, а также студентов технических вузов, преподавателей, инженеров, программистов использующих в своей научной деятельности геометрические методы и подходы.

Кафедра технологий программирования

Введение

Дифференциальная геометрия и топология представляют собой два смежных раздела математики, лежащих в основе ряда фундаментальных разделов современной теоретической физики: электродинамики, классической и квантовой теории калибровочных полей, физики конденсированного состояния, теории струн и суперструн, физике нелинейных процессов.

Возникновение дифференциальной геометрии принято относить к XVIII веку. Ее появление связано с именами выдающихся математиков того времени Эйлера и Монжа. Первое сводное сочинение по теории поверхностей была написано в 1795 году Монжем «Приложение анализа к геометрии».

В 1827 Гаусс опубликовал работу «Общее исследование о кривых поверхностях», в которой изложил основы теории поверхностей в её современном виде. С этого момента дифференциальная геометрия получила официальный статус самостоятельной отрасли математической науки.

Научно-исследовательские работы по дифференциальной геометрии К. Гаусса (1777-1855гг.), Г. Дарбу (1842-1917гг.), Л. Бианки (1856-1928гг.) и Л.Эйзенхарта (1876-1965гг.) были посвящены, главным образом, свойствам, проявляющимся локально, т.е. в малой окрестности точки многообразия.

Предмет этих исследований стал сутью, так называемой дифференциальной геометрии «в малом». Начиная с 1930-х годов, исследования математиков были направлены, прежде всего, на изучение взаимосвязей между дифференциальной геометрией малых окрестностей и «глобальными» свойствами всего многообразия. Эта теория получила название дифференциальной геометрией «в целом».

В1854 Б. Риман в лекции "О гипотезах, лежащих в основании геометрии" предложил новую, весьма плодотворную концепцию "многообразия" (см. *Риманово пространство*). Тем самым он положил начало *римановой геометрии,* являющейся важнейшей и наиболее разработанной частью дифференциальной геометрии.

Основная задача дифференциальной геометрии состоит в нахождении и описании дифференциальных инвариантов геометрических структур. Необходимым аппаратом здесь является исчисление струй. Это понятие интенсивно использовалось в теории геометрических структур высшего порядка в работах В.В. Вагнера, Г.Ф. Лаптева, Л.Е. Евтушика, М.О. Рахулы, а в последнее время в теории особенностей гладких отображений М. Голубицким, В. Гийеминым и в геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений А.М. Виноградовым, В.В. Лычагиным.

Понятие дифференциального инварианта псевдогруппы было введено Софусом Ли в конце прошлого века. В неявной форме это понятие использовалось в большинстве работ по дифференциальной геометрии и дифференциальным уравнениям. В настоящее время интерес к дифференциальным инвариантам возрос в связи с их использованием в квантовой теории поля, в проблемах геометрического квантования я в теории нелинейных дифференциальных уравнений (А.М.Виноградов, В.В.Лычагин, Л.В.Овсянников).

В предлагаемом сборнике рассматриваются геометрические свойства гамильтоновых и лагранжевых систем дифференциальных уравнений.

Статьи написаны Пастуховым Ю.Ф. Корректуру и проверку преобразований выполнил Пастухов Д.Ф.

ИНВАРИАНТЫ В РАССЛОЕНИЯХ СКОРОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА.

В работе инвариантно введено обобщение преобразования М.В. Остроградского из $\Re^{2n}$ *в расслоении скоростей произвольного нечетного порядка* $T^{2n-1}X_m$ $F_L(x): T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$, *индуцированного невырожденной функцией Лагранжа* $L: T^n X_m \to \Re$. *Исследован закон преобразования импульсов произвольного порядка при замене координат в базе* X_m *расслоения* $T^n X_m$ *- они преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы). Обобщено свойство, являющееся аналогом известного результата в классической механике - на экстремалях этого лагранжиана имеет место закон сохранения импульса первого порядка* $p_i^1(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad i = \overline{1, m}$

вдоль поля $X^i(x) = \frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0} \quad i = \overline{1, m}$

$$D_t(X^i \cdot p_i^1) = D_t\left(\sum_{i=1}^m X_i(x) \cdot \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)\right) = 0.$$

$S_\tau -$ *однопараметрическая группа преобразований*

$S: \Re \times X_m \to X_m \qquad S_\tau: X_m \to X_m, \forall \tau \in \Re$ *сохраняет лагранжиан* $L: T^n X_m \to \Re$.

Введение.

Все физические процессы протекают в пространстве и времени, поэтому изучение свойств геометрии пространства – времени играет важную роль для физики. Наиболее ярко связь геометрии с физикой проявляется при анализе таких вопросов, как определение естественной геометрии для того или иного физического поля, выяснение возможностей для получения законов сохранения в теории, классификация систем отсчета, неотличимых от некоторой заданной системы с точки зрения любого физического эксперимента. Решение всех этих вопросов существенно зависит от характера геометрии. Так как физические законы (и объекты дифференциальной геометрии) не должны зависеть от выбора системы координат, то они должны записываться посредством величин, не зависящих от преобразований координат. Такими величинами являются тензоры. Следовательно, физические величины должны выражаться в виде соотношений между тензорами.

В связи с вышесказанным в данной работе был исследован закон преобразования импульсов произвольного порядка k

$$p_i^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}$$

при замене координат в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Они преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы).

Во второй части работы на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа доказан закон сохранения компоненты импульса вдоль струи $j_x^{n-1} X^i(x) = (X^i(x), D_t^1 X^i(x), D_t^2 X^i(x), ..., D_t^{n-1} X^i(x))$ - порядка n-1, связанной, с группой преобразований $S_\tau : X_m \to X_m$, $X^i(x) = \frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ $i=\overline{1,m}$,сохраняющей лагранжиан $L: T^n X_m \to \Re$:

на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа $p^i_{0,n} = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}\right) = 0$

имеет место закон сохранения компоненты импульса вдоль струи $D_t \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D^{k-1}_t (X^i(x)) p^i_{k,n}\right) = 0$.

Основная часть работы.

Пусть на гладком многообразии X_m размерности m задана локальная однопараметрическая группа преобразований диффеоморфизмов S_τ $\quad -\infty < \tau < \infty$

$$S_{\tau_1+\tau_2}(x) = S_{\tau_1}(S_{\tau_2}(x) \quad S_{-\tau}(x) = S^{-1}_\tau(x) \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in \Re, x \in X_m$$

$$S: \Re \times X_m \to X_m \quad S(\tau, x) = S_\tau(x).$$

С каждой локальной однопараметрической группой преобразований связывается векторное поле, касающееся траекторий $S_\tau(x)$: $(X^i) = X(x) = \frac{d}{d\tau} S_\tau(x)|_{\tau=0}$ $i=\overline{1,m}$.

Определение 1. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$ называется невырожденной в точке $v^n_x \in T^n X_m$, если в некоторой системе координат (x), базы расслоения X_m $\quad T^n X_m$:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\, \partial \overset{(n)i}{x}}\right) \neq 0$$

$\varphi : U_{v^n_x} \to \Re^{(n+1)m}$

$\varphi(v^n_x) = (x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}) \in \Re^{(n+1)m}$-координатный гомеоморфизм, ▪ - локальная карта $v^n_x \in T^n X_m$

$L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})$-локальная запись функции $L: T^n X_m \to \Re$ в системе координат (x): $L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}) = L(\varphi^{-1}(v^n_x))$.

Замечание 1. По теореме о неявной функции гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$, невырожденная в точке $v^n_x \in T^n X_m$ является невырожденной в некоторой окрестности $U(v^n_x)$.

Определение 2. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$ называется невырожденной, если она не вырождена в каждой точке $v^n_x \in T^n X_m$.

Определение 3. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$, невырожденная в точке $v^n_x \in T^n X_m$,называется функцией Лагранжа (лагранжианом) в расслоении скоростей порядка n T^nX_m невырожденной в точке $v_x^n \in T^nX_m$ или локально невырожденной и невырожденной (глобально), если $L: T^nX_m \to \mathfrak{R}$, не выраждена в каждой точке $v_x^n \in T^nX_m$,

Лемма 1. Определение 1 невырожденности функции $L: T^nX_m \to \mathfrak{R}$ в точке $v_x^n \in T^nX_m$ корректно, то есть инвариантно относительно выбора локальной системы координат (x), базы X_m расслоения T^nX_m

Определение 4. Пусть $L: T^nX_m \to \mathfrak{R}-$ невырожденная функция Лагранжа в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения T^nX_m.
Преобразование

$$p_1^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - D_t(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i}) + ... + (-1)^{n-1} D_t^{n-1}(\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)i}{x}})$$

$$p_2^i = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i} - D_t(\frac{\partial L}{\partial \dddot{x}^i}) + ... + (-1)^{n-2} D_t^{n-2}(\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)i}{x}})$$

...

$$p_n^i = \frac{\partial L}{\partial \overset{(n)i}{x}}$$

$$p_i^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) \quad k = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}$$

называется ***преобразованием Остроградского***, а функции p_k^i называются ***импульсами k-ого порядка по i-ой координате.***

Теорема 1. Пусть $L: T^nX_m \to \mathfrak{R}-$ невырожденная функция Лагранжа, тогда преобразование Остроградского, индуцированное L, с $F_L(x): T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$ также является невырожденным.

Замечание 2. Слоевые координаты вектора $\overset{(k)i}{x} = D_t^k x_i, i = \overline{1,m}$ в $T^{2n-1}X_m$ могут быть названы по аналогии с физическими величинами координатами вектора скорости $k-$го порядка, $k = \overline{1,2n-1}$,(скорость в физике - скорость 1-ого порядка, ускорение в физике - скорость 2-ого порядка), а оператор $D_t^k -$ оператор $k-$ кратного полного дифференцирования по времени t.

Замечание 3. Функционал в уравнении Эйлера-Лагранжа может быть интерпретирован как импульс 0-го порядка:

$$p_i^0(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}) \quad i = \overline{1,m})$$

а вектор импульса n-ого порядка имеет вид:

$$p_i^n(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) = \frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}$$

Математическая постановка задачи.

Ставится следующая задача: исследовать закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе расслоения X_m и исследовать свойства

Преобразования Остроградского $F_L(x): T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$, индуцированного $L: T^n X_m \to \Re$.

Имеет место следующая

Теорема 2 (закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n-1}X_m$).

При замене $(\overline{x}) \to (x(\overline{x}))$: в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n-1}X_m$ $\overline{p_i^k}(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\overline{x}}), i = \overline{1,m}, k = 0, n$ (0-я и n-я – первая и последняя компоненты) преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы)

$$\overline{p_i^k}(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\overline{x}}) = \sum_{j=1}^{n} p_j^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\overline{x})}{\partial \overline{x}^i} = p_j^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\overline{x})}{\partial \overline{x}^i}$$

$k = 0, n, \ i, j = \overline{1,m}$

что позволяет называть функции $p_i^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}), i = \overline{1,m}, k = 0, n$ **тензором импульса** $k-$**го** $k = 0, n$ **порядка** в расслоении скоростей $T^{2n-1}X_m$.

Имеет место следующая

Лемма 2. Пусть $L: T^n X_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа, и пусть задано преобразование Остроградского , индуцированное функцией L, Тогда верно

$$D_t p_i^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k+1)}{x}).$$

Пусть $\overline{x}_\tau^i = S_\tau^i(x) \quad i = \overline{1,m}$, $S_\tau: (x) \to (\overline{x}) = S_\tau(x)$ -невырожденное преобразование координат (в окрестности каждой точки $x \in X_m, (U_1(x), \varphi_1), (U_2(x), \varphi_2), x \in U_1 \cap U_2, S = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1^{-1}: \Re^m \to \Re^m$ - $(U_1(x), \varphi_1), (U_2(x), \varphi_2)$-локальные карты многообразия X_m) в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка 2n-1 $T^{2n-1}X_m$,

то есть

$$\det(\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}) \neq 0 \qquad i, j = \overline{1,m} \ .$$

Тогда оно индуцирует невырожденное преобразование слоевых координат

$$\dot{\bar{x}}^i(x,\dot x) = D_t \bar{x}^i_\tau = \frac{\partial S^i_\tau}{\partial x^k}\cdot \dot x^k = D_t S^i_\tau(x) \ ,$$

$$\ddot{\bar{x}}^i(x,\dot x,\ddot x) = D_t^2 \bar{x}^i_\tau = \frac{\partial^2 S^i_\tau}{\partial x^k \partial x^l}\cdot \dot x^k\cdot \dot x^l + \frac{\partial S^i_\tau}{\partial x^k}\cdot \ddot x^k = D_t^2 S^i_\tau(x)$$

$$\dddot{\bar{x}}^i(x,\dot x,\ddot x,\dddot x) = D_t^3 \bar{x}^i_\tau = \frac{\partial^3 S^i_\tau}{\partial x^k \partial x^l \partial x^j}\cdot \dot x^k\cdot \dot x^l\cdot \dot x^j + 3\frac{\partial^2 S^i_\tau}{\partial x^k \partial x^l}\cdot \ddot x^k\cdot \dot x^l + \frac{\partial S^i_\tau}{\partial x^k}\cdot \dddot x^k = D_t^3 S^i_\tau(x)$$

$$\ddddot{\bar{x}}^i(x,\dot x,\ddot x,\dddot x,\ddddot x) = D_t^4 \bar{x}^i_\tau = \frac{\partial^4 S^i_\tau}{\partial x^k \partial x^l \partial x^j \partial x^n}\cdot \dot x^k\cdot \dot x^l\cdot \dot x^j\cdot \dot x^j + 6\frac{\partial^3 S^i_\tau}{\partial x^k \partial x^l \partial x^j}\cdot \ddot x^k\cdot \dot x^l\cdot \dot x^j +$$
$$+4\frac{\partial^2 S^i_\tau}{\partial x^k \partial x^l}\cdot \dddot x^k\cdot \dot x^l + \frac{\partial S^i_\tau}{\partial x^k}\cdot \ddddot x^k = D_t^4 S^i_\tau(x)$$

и т. д.

$x = \bar{x}(x), \dot x = \dot{\bar{x}}(x,\dot x), \ddot x = \ddot{\bar{x}}(x,\dot x,\ddot x)$ а также преобразование импульсов
$\overline{p_i^k}(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar x}) = p_i^k(x(\bar x),\dot x(\bar x,\dot{\bar x}),\dots,\overset{(2n-k)}{x}(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar x}))$

Определение 5. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1,x_2,\dots,x_m)$ $S:(x)\to(\bar x = S(x))$ - невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $2n-1$ $T^{2n-1}X_m$ $i=\overline{1,m}$, $L:T^nX_m\to\Re-$ невырожденная функция Лагранжа, $F_L(x):\Re^{2mn}\to\Re^{2mn}$ – преобразование Остроградского, индуцированное функцией Лагранжа $L:T^nX_m\to\Re$, тогда отображение

$$G(L,\bar x(x)):(x^i,\dot x^i,\ddot x^i,\dots,x^{(n-1)i},p_i^n,p_i^{n-1},\dots,p_i^1)\to(\bar x^i,\dot{\bar x}^i,\ddot{\bar x}^i,\dots,\overset{(n-1)i}{\bar x},\overline{p_i^n},\overline{p_i^{n-1}},\dots,\overline{p_i^1})$$

называется преобразованием координат-импульсов, индуцированным функцией Лагранжа $L:T^nX_m\to\Re$ и преобразованием координат $\bar x(x)$.

Теорема 4. Пусть $L:T^nX_m\to\Re-$ невырожденная функция Лагранжа, $S:(x)\to(\bar x = S(x))$, - невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $2n-1$ $T^{2n-1}X_m$ $i=\overline{1,m}$, тогда индуцированное преобразование координат-импульсов также не вырождено.

Лемма 3. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1,x_2,\dots,x_m)$ $S:(x)\to(\bar x)$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $2n-1$ $T^{2n-1}X_m$ $i=\overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\overline{x},\dot{\overline{x}},...,\overset{(l)}{x})}{\partial \underset{-}{\overset{(s)j}{x}}}=\begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\right), C_l^s=\dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l!=\prod\limits_{k=1}^{l} k, l\ge s \\ 0, l<s \end{cases}$$

Определение 6. Однопараметрическая группа преобразований $S:\Re\times X_m\to X_m$, $S_\tau : X_m \to X_m, \forall \tau\in\Re$ сохраняет лагранжиан $L:T^nX_m\to\Re$, если $\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x), D_tS_\tau(x), D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$, где

$D_t^kS_\tau(x)|_{\tau=0} : X_m\to T^kX_m$ - оператор $k-$кратного полного дифференцирования по переменной t. С каждой однопараметрической группой преобразований можно связать однопараметрическое семейство векторных полей $X^i(x,\tau))=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}$, $\forall\tau\in\Re$ $X^i(x)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ $i=\overline{1,m}$ (струй 0 -ого порядка) и однопараметрическое семейство струй порядка $n-1$: $j_x^{n-1}X^i(x,\tau)=(X^i(x,\tau),D_t^1X^i(x,\tau),D_t^2X^i(x,\tau),...,D_t^{n-1}X^i(x,\tau))$, которые будем называть связанными (индуцированные) с группой преобразований $S_\tau : X_m\to X_m$.

Векторное поле $X^i(x)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ и струю порядка $n-1$: $j_x^{n-1}X^i(x,\tau)=(X^i(x,\tau),D_t^1X^i(x,\tau),D_t^2X^i(x,\tau),...,D_t^{n-1}X^i(x,\tau))$ также будем называть связанными (индуцированные) с группой преобразований $S_\tau : X_m\to X_m$.

Имеет место следующая

Теорема 5. Пусть $L:T^nX_m\to\Re$ - гладкая функция, заданная в расслоенном пространстве скоростей T^nX_m. $L(x,...,\overset{(n)}{x})$, $p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$-локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m. $p_{k,n}^i=\sum\limits_{l=0}^{n-k}(-1)^lD_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$

$S:\Re\times X_m\to X_m$ $S_\tau : X_m\to X_m, \forall\tau\in\Re$ -однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L:T^nX_m\to\Re$:

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x), D_tS_\tau(x), D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$$

$j_x^{n-1}X^i(x)=(X^i(x),D_t^1X^i(x),D_t^2X^i(x),...,D_t^{n-1}X^i(x))$- струя порядка n-1, связанная, с группой преобразований $S_\tau : X_m\to X_m$, $X^i(x)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ $i=\overline{1,m}$.

Тогда на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа $p^i_{0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=0$ имеет место закон сохранения компоненты импульса вдоль струи $D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D^{k-1}_t(X^i(x))p^i_{k,n})=0$.

При n=1 отсюда как частный случай получаем [1, с. 294].

Теорема 6. Если однопараметрическая группа преобразований S_τ сохраняет лагранжиан L, то имеет место закон сохранения компоненты импульса вдоль поля

$\frac{d}{dt}(X^i\frac{\partial L}{\partial x^i})=\frac{d}{dt}(X^i p_i)=0$, где $X(x)$ - векторное поле, $X(x)=\frac{d}{d\tau}S_\tau(x)|_{\tau=0}$.

Заключение.

Таким образом, в статье:

1. Исследован закон преобразования импульсов произвольного порядка при замене координат в базе X_m расслоения T^nX_m - они преобразуются как тензоры типа (0,1) (конвекторы)

$$\overline{p^k_i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})=\sum_{j=1}^{n}p^k_j(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}=p^k_j(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}$$

$k=0,n$, $i,j=\overline{1,m}$ что позволяет называть функции $p^k_i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x}),i=\overline{1,m}$ тензором импульса $k-$го порядка $k=0,n$ в расслоении скоростей $T^{2n-1}X_m$.

2. $S:\Re\times X_m\to X_m$ $S_\tau:X_m\to X_m,\forall\tau\in\Re$ -однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L:T^nX_m\to\Re$:

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D^2_tS_\tau(x),\ldots,D^{(n)}_tS_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$$

$j^{n-1}_xX^i(x)=(X^i(x),D^1_tX^i(x),D^2_tX^i(x),\ldots,D^{n-1}_tX^i(x))$ - струя порядка n-1, связанная, с группой преобразований $S_\tau:X_m\to X_m$, $X^i(x)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ $i=\overline{1,m}$.

На экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа $p^i_{0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=0$

доказан закон сохранения компоненты импульса вдоль струи $D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D^{k-1}_t(X^i(x))p^i_{k,n})=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко Современная геометрия. Методы и приложения, М.,1994,УРСС.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.:Гостехиздат, 1956
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.:Наука,1974.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.:Наука,1974.
5. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика-М. Мир,1973.
6. Дирак П. Обобщенная гамильтонова динамика//Вариационные принципы механики. М.Физматгиз,1959.
7. Дирак П. Принципы квантовой механики-М.Мир, 1979.
8. Дирак П.Лекции по квантовой механики-М.Мир, 1968.
9. В.В.Трофимов, А.Т.Фоменко Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений. Издательство ”Факториал”, 1995.
10. Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии. Т.1,2-М.:Наука,1981.
11. Ю.Ф. Пастухов Исследование решения обратной вариационной задачи: автореф. дис. канд. физ. – мат. наук/ Ю.Ф. Пастухов. – М., 1997.

INVARIANTS IN STRATIFICATIONS OF SPEEDS OF ANY ORDER

Y. PASTUHOV, D. PASTUHOV

In work synthesis of transformation of M. V. Ostrogradsky in velocity stratification of any odd order induced by nondegenerate Lagrange function. The law of transformation of impulses of any order when replacing coordinates in base of stratification is investigated - they will be transformed as tensors of type (0,1) (covector). The property which is analog of known result in classical mechanics is generalized - on extremals of this lagranzhian law of conservation of momentum of the first order takes place.

$$X^i(x) = \frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0} \quad i=\overline{1,m}$$

$j_x^{n-1}X^i(x) = (X^i(x), D_t^1 X^i(x), D_t^2 X^i(x), ..., D_t^{n-1}X^i(x))$ - jet of n-1 order.

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x))p_{k,n}^i) = 0.$$

.

$S_\tau -$ *one parametric group of the transformations*

$$S:\Re\times X_m \to X_m \qquad S_\tau : X_m \to X_m, \forall\tau\in\Re \quad L:T^n X_m \to \Re$$

УДК 514

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАМИЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСКОГО В РАССЛОЕНИЯХ СКОРОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА.

Аннотация: *В работе исследуются свойства преобразования М.В. Остроградского, индуцированного невырожденной функцией Лагранжа* $L : T^n X_m \to \Re$. *Доказан явный вид производной импульсов k-ого порядка:*

$$D_t p_i^k(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x}). \quad \textit{где}$$

$$p_i^k(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) \quad k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$$

-импульс k-ого порядка по i-ой координате.

Доказано обобщение теоремы М.В.Остроградского на случай невырожденных системы уравнений Эйлера-Лагранжа $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\Big)=0$ *произвольного порядка: невырожденная система уравнений* $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\Big)=0$ *локально эквивалентна канонической системе уравнений Гамильтона:*

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = \dot{q}_k^i = \dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial p_k^i} \\ D_t(p_k^i) = \dot{p}_k^i = -\dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_k^i} \end{cases}$$

$i=\overline{1,m}$ $\quad k=\overline{1,n}$ *(система* $2mn$ *уравнений)*

где:

$$H(\bar{p},\bar{q}) = -L(x(\bar{p},\bar{q}),\dot{x}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{x}(\bar{p},\bar{q}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p},\bar{q}) =$$

$$-L(x(\bar{p},\bar{q}),\dot{x}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{x}(\bar{p},\bar{q}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p},\bar{q})$$

-энергия системы, состояние которой описывается системой уравнений Эйлера-Лагранжа $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\Big)=0$, D_t^l *-l-кратное полное дифференцирование по t*

Ключевые слова: *уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, энергия и импульс системы, преобразование Остроградского, невырожденная функция, теорема Остроградского, система уравнений Гамильтона.*

Введение

Гамильтон в 1835 году получил новую форму уравнений движения механических систем канонические уравнения Гамильтона.

В 1848 году М. В. Остроградский распространил принцип Гамильтона на случай систем с нестационарными голономными связями, после чего распространилось название принцип Гамильтона — Остроградского.

Полученная система канонических уравнений содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем у Лагранжа, но зато все они первого порядка, (у Лагранжа — второго). Высоко отозвался о работах Гамильтона по динамике член-корреспондент

АН СССР Л. Н. Сретенский, отметивший: «Эти работы легли в основу всего развития аналитической механики в XIX веке». Аналогичное мнение выразил академик РАН В. В. Румянцев: «Оптико-механическая аналогия Гамильтона определила на столетие прогресс аналитической механики». По мнению профессора Л. С. Полака, это была «теория, почти не имеющая аналогов в механике по общности и абстрактности», открывшая колоссальные возможности в механике и смежных науках.

Академик В. И. Арнольд следующим образом охарактеризовал возможности, открывшиеся после появления гамильтоновой механики[1-4]. Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряд задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.)[5-11].

Подход Гамильтона оказался высоко эффективным во многих математических моделях физики. На этом плодотворном подходе основан, например, многотомный учебный курс «Теоретическая физика» Ландау и Лифшица. Первоначально вариационный принцип Гамильтона был сформулирован для задач механики, но при некоторых естественных предположениях из него выводятся уравнения Максвелла электромагнитного поля. С появлением теории относительности оказалось, что этот принцип строго выполняется и в релятивистской динамике. Его эвристическая сила существенно помогла разработке квантовой механики, а при создании общей теории относительности Давид Гильберт успешно применил гамильтонов принцип для вывода уравнений гравитационного поля (1915 год).Из сказанного следует, что принцип наименьшего действия Гамильтона(и естественным образом связанная с ним система канонических уравнений) занимает место среди коренных, базовых законов природы — наряду с законом сохранения энергии и законами термодинамики.

Постановка задачи и основные определения

Пусть X_m - гладкое многообразие размерности m , $T^n X_m$ - гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m.

Определение 1. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$ называется (слабо) невырожденной в точке $v_x^n \in T^n X_m$, если в некоторой системе координат (x), базы расслоения X_m $T^n X_m$:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x} \partial \overset{(n)i}{x}}\right) \neq 0$$

$\varphi : U_{v_x^n} \to \Re^{(n+1)m}$

$\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) \in \Re^{(n+1)m}$ -координатный гомеоморфизм, ▪ - локальная карта $v_x^n \in T^n X_m$

$L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})$ -локальная запись функции $L: T^n X_m \to \Re$ в системе координат (x): $L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) = L(\varphi^{-1}(v_x^n))$.

Лемма 1. Определение невырожденности функции $L: T^n X_m \to \Re$ в точке $v_x^n \in T^n X_m$ корректно, то есть инвариантно относительно выбора локальной системы координат (x),базы X_m расслоения $T^n X_m$ [13].

Замечание. По теореме о неявной функции гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$, невырожденная в точке $v_x^n \in T^n X_m$ является невырожденной в некоторой окрестности $U(v_x^n)$.

Определение 2. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$ называется невырожденной, если она не вырождена в каждой точке $v_x^n \in T^n X_m$. Невырожденную функцию $L: T^n X_m \to \Re$ будем называть также слабо невырожденной функцией.

Определение 3. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$, невырожденная в точке $v_x^n \in T^n X_m$,называется функцией Лагранжа (лагранжианом) в расслоении скоростей порядка n $T^n X_m$ невырожденной в точке $v_x^n \in T^n X_m$ или локально невырожденной и невырожденной (глобально), если $L: T^n X_m \to \Re$, невырождена в каждой точке $v_x^n \in T^n X_m$

Определение 4. Пусть $L: T^n X_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$.
Преобразование

$$p_1^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i}\right) + \ldots + (-1)^{n-1} D_t^{n-1}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right)$$

$$p_2^i = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial \dddot{x}^i}\right) + \ldots + (-1)^{n-2} D_t^{n-2}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right)$$

...

$$p_n^i = \frac{\partial L}{\partial \overset{(n)i}{x}}$$

$$p_i^k(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}$$

называется ***преобразованием Остроградского***, а функции p_i^k называются ***импульсами k-ого порядка по i-ой координате.***

Математическая постановка задачи.

Рассмотрим следующую задачу:

Пусть $L: T^n X_m \to \Re -$ - невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$. Является ли система уравнений Эйлера-Лагранжа $\sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) = 0$ порядка n локально эквивалентна системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = \dot{q}_k^i = \dfrac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_k^i} \\ D_t(p_k^i) = \dot{p}_k^i = -\dfrac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_k^i} \end{cases}$$

$i = \overline{1,m} \quad k = \overline{1,n}$ (система $2mn$ уравнений)

$$p = \bar{p} = (p_1^{j1}, p_2^{j1}, \ldots, p_n^{j1}) = (p_1^1 p_1^2 \ldots p_1^m, p_2^1 p_2^2 \ldots p_2^m, \ldots, p_n^1, \ldots, p_n^m) = (p_{l1}^{j1}) \qquad j1 = \overline{1,m} \quad l1 = \overline{1,n}$$

где:

$$H(\bar{p}, \bar{q}) = -L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ldots, \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p}, \bar{q}) =$$

$$-L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ldots, \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p}, \bar{q}) -$$

- функция Гамильтона (энергия системы)

Теорема 2(о дифференциальной связи импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков). Пусть $L: T^n X_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа.

$p_i^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}$ -импульс k-ого порядка по i-ой координате.

Тогда справедливо:

$$D_t p_i^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k+1)}{x}).$$ Где

$$p_k^i = \sum_{l_1=0}^{n-k} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} (\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})$$

импульс k-ого порядка, а соответственно

$$p_{k-1}^i = \sum_{l_1=0}^{n-k-1} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} (\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})$$

импульс (k-1) –ого порядка

Доказательство проведем по индукции. Преобразуем выражение

$$D_t p_k^i = D_t (\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})) = \sum_{l=0}^{n-k} D_t ((-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^{l+1} (\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}) = (-1) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{l+1} D_t^{l+1} (\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}) =$$

$$= (-1)(\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{l+1} D_t^{l+1} (\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+1+k-1)i}}))$$

Выполним замену $l_1 = l + 1,$ так как $l = \overline{0, n-k}$ то $l_1 = \overline{1, n-k+1}$.

Следовательно,

$$D_t p_k^i = (-1)(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1} D_t^{l+1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+1+k-1)i}})) =$$

$$= (-1)(\sum_{l_1=1}^{n-k+1}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})) = (-1)(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})) =$$

$$= (-1)(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}})) =$$

$$= (-1)(\sum_{l_1=0}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}}) - (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+(k-1))i}})) =$$

$$= (-1)(p_{k-1}^i - \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}) = -p_{k-1}^i + \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}})$$

Так как, в общем случае по определению импульсов k-ого порядка,

$$p_k^i = \sum_{l_1=0}^{n-k}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})$$

и импульс (k-1) –ого порядка имеет вид:

$$p_{k-1}^i = \sum_{l_1=0}^{n-k-1}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})$$

То, **теорема 2** доказана.

Эта теорема применяется при доказательстве обобщенной теоремы Гамильтона-Остроградского.

Определение 5. Функция

$$H(\bar{p},\bar{q}) = -L(x(\bar{p},\bar{q}),\dot{x}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{x}(\bar{p},\bar{q}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p},\bar{q}) =$$

$$= -L(x(\bar{p},\bar{q}),\dot{x}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{x}(\bar{p},\bar{q}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p},\bar{q})$$

$\overset{(k)i}{x} = D_t^k x^i$, $D_t^k -$ оператор $k-$ кратного полного дифференцирования по времени t.

- называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) этого преобразования для функции Лагранжа $L: T^n X_m \to \Re$ и называется также энергией системы, состояние которой описывается системой уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}) = 0 .$$

Теорема 3. Пусть $L: T^n X_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа, тогда преобразование Остроградского, индуцированное L, также является невырожденным.

Замечание 1. Слоевые координаты вектора $\overset{(k)i}{x} = D_t^k x_i, i = \overline{1,m}$ в $T^{2n-1}X_m$ могут быть названы по аналогии с физическими величинами координатами вектора скорости $k-$го порядка, $k = \overline{1,2n-1}$,(скорость в физике - скорость 1-ого порядка, ускорение в физике - скорость 2-ого порядка), а оператор $D_t^k -$ оператор $k-$ кратного полного дифференцирования по времени t.

Замечание 2. Функционал в уравнении Эйлера-Лагранжа может быть интерпретирован как импульс 0-го порядка:

$$p_i^0(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) \quad i = \overline{1,m})$$

а вектор импульса n-ого порядка имеет вид:

$$p_i^n(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) = \frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}.$$

Определение 6. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$ называется сильно невырожденной в точке $v_x^n \in T^n X_m$, если в некоторой системе координат (x), базы расслоения X_m $T^n X_m$:

$\varphi: U_{v_x^n} \to \Re^{(n+1)m}$

$\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) \in \Re^{(n+1)m}$ -координатный гомеоморфизм, $(U_{v_x^n}, \varphi)$ - локальная карта точки $v_x^n \in T^n X_m$

$L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})$-локальная запись функции $L: T^n X_m \to \Re$ в системе координат (x):

$L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) = L(\varphi^{-1}(v_x^n))$

Уравнения

$$\begin{cases} q_k^i = \overset{(k-1)i}{x} \\ p_i^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \end{cases}$$

$k = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}$

могут быть однозначно разрешимы в виде $\overset{(l)i}{x} = \overset{(l)i}{x}(\bar{p}, \bar{q})$:

$$\begin{cases} x^i = x^i(\bar{p}, \bar{q}) \\ \dot{x}^i = \dot{x}^i(\bar{p}, \bar{q}) \\ ... \\ \overset{(2n-1)i}{x} = \overset{(2n-1)i}{x}(\bar{p}, \bar{q}) \end{cases}$$

$l = \overline{0,2n-1}, i = \overline{1,m}$

Лемма 2. Определение сильной не вырожденности функции $L: T^n X_m \to \Re$ в точке $v_x^n \in T^n X_m$ корректно, то есть инвариантно относительно выбора локальной системы координат (x), базы X_m расслоения $T^n X_m$ [12].

Лемма 3. (связь свойств невырожденности и сильной невырожденности)
1)Локально сильно невырожденная функции $L: T^n X_m \to \Re$ в точке $v_x^n \in T^n X_m$ сильно невырождена.
2)Сильно невырожденная функция $L: T^n X_m \to \Re$ в карте $(U_{v_x^n}, \varphi)$
$\varphi: U_{v_x^n} \to \Re^{(n+1)m}$
$\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) \in \Re^{(n+1)m}$ -координатный гомеоморфизм
$v_x^n \in T^n X_m$ является невырожденной в этой карте[12].

Определение 7. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$, невырожденная в точке $v_x^n \in T^n X_m$, называется функцией Лагранжа (лагранжианом) в расслоении скоростей порядка n $T^n X_m$ невырожденной в точке $v_x^n \in T^n X_m$ или локально невырожденной и невырожденной (глобально), если $L: T^n X_m \to \Re$ не вырождена в каждой точке $v_x^n \in T^n X_m$.

Теорема 4 (обобщение теоремы М.В. Остроградского)**.**
Для не вырожденных лагранжианов $L: T^n X_m \to \Re$ система уравнений Эйлера-Лагранжа $\sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}) = 0$ локально эквивалентна системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = \dot{q}_k^i = \dfrac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_k^i} \\ D_t(p_k^i) = \dot{p}_k^i = -\dfrac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_k^i} \end{cases}$$

$i = \overline{1, m}$ $\quad k = \overline{1, n}$ $\quad$ (система $2mn$ уравнений)

$$p = \bar{p} = (p_1^{j1}, p_2^{j1}, ..., p_n^{j1}) = (p_1^1 p_1^2 ... p_1^m, p_2^1 p_2^2 ... p_2^m, ..., p_n^1, ..., p_n^m) = (p_{l1}^{j1}) \qquad j1 = \overline{1, m} \quad l1 = \overline{1, n}$$

$$q = \bar{q} = (q_1^{j2}, q_2^{j2}, ..., q_n^{j2}) = (q_1^1 q_1^2 ... q_1^m, q_2^1 q_2^2 ... q_2^m, ..., q_n^1, ..., q_n^m) = (q_{l2}^{j2}) \qquad j2 = \overline{1, m} \quad l2 = \overline{1, n}$$

где:

$$H(\bar{p}, \bar{q}) = -L(x(\bar{p}, \bar{q}), \dot{x}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{x}(\bar{p}, \bar{q}), ..., \overset{(n)}{x}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p}, \bar{q}) =$$

$$= -L(x(\bar{p}, \bar{q}), \dot{x}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{x}(\bar{p}, \bar{q}), ..., \overset{(n)}{x}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p}, \bar{q})$$

- функция Гамильтона

$\overset{(k)i}{x} = D_t^k(x^i)$, D_t^k - оператор $k-$кратного полного дифференцирования по переменной t

$p_i^k(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$ - импульс порядка к по i-ой координате. $x=\bar{x}=(x^1,x^2,...,x^m)$

Доказательство.
В случае n=1- это известный факт - теорема М.В.Остроградского, поэтому будем считать, что $n \geq 2$

Замечание 3. Из явного вида выражений для импульсов k-ого порядка
$p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$ следует, что p_i^k есть функции от $x,\dot{x},\ddot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}$ $p_k^i = p_k^i(x,\dot{x},\ddot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$ $x=\bar{x}=(x^1,x^2,...,x^m)$ и не зависят от производных более высокого порядка. Кроме того из леммы 3 о локально сильной новорожденности слабо невырожденного лагранжиана (он назывался невырожденным) следует, что

$\overset{(l)j}{x} = D_t^l x^j(q_1,q_2,...,q_n,p_n,...,p_{2n-l}) = \overset{(l)j}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n,...,p_{2n-l})$ $l=\overline{n,2n-1}, j=\overline{1,m}$ то есть $\overset{(l)j}{x}$ являются функциями от $q_1,q_2,...,q_n,p_n,...,p_{2n-l}$ $q_\alpha=(q_\alpha^1,q_\alpha^2,...q_\alpha^m)=(q_\alpha^i)$
$\alpha=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$
$p_\beta=(p_\beta^1,p_\beta^2,...p_\beta^m)=(p_\beta^j)$ $\beta=\overline{n,2n-1}, j=\overline{1,m}$

Имеем(в обозначениях импульсов и координат верхняя черта-вектор):
$p=\bar{p}=(p_1^{j1},p_2^{j1},...,p_n^{j1})=(p_1^1p_1^2...p_1^m,p_2^1p_2^2...p_2^m,...,p_n^1,...,p_n^m)=(p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$ $l1=\overline{1,n}$
$q=\bar{q}=(q_1^{j2},q_2^{j2},...,q_n^{j2})=(q_1^1q_1^2...q_1^m,q_2^1q_2^2...q_2^m,...,q_n^1,...,q_n^m)=(q_{l2}^{j2})$ $j2=\overline{1,m}$ $l2=\overline{1,n}$

$$H(p,q)=-L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}),\dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),...,\overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_k^i\overset{(k)i}{x}(\bar{p},\bar{q})=$$

$$=-L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}),\dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),...,\overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_k^iD_t^kx^i(\bar{p},\bar{q})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}p_k^iq_{k+1}^i+\sum_{s=1}^{m}p_n^s\overset{(n)s}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n)-L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n))$$

$$\overset{(k_1)i}{x} = q^i_{k_1+1} \quad k_1 == \overline{0, n-1}$$, то есть:

$$\overset{(0)i}{x} = \overset{i}{x} = q^i_1 \quad i == \overline{1, m}$$

$$\overset{(k)i}{x} = q^i_{k+1} \quad k == \overline{1, n-1}$$

$$\overset{(n)i}{x} = \overset{(n)i}{x}(q_1, q_2, ..., q_n, p_n) \quad k == \overline{1, n-1}$$ Для $1 \le k \le n-1$:

Дифференцирование по p дает:

$$\frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p^i_k} = \frac{\partial}{\partial p^i_k}(\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} p^i_l q^i_{l+1} + \sum_{s=1}^{m} p^s_n \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2, ..., q_n, p_n) - L(q_1, ..., q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2, ..., q_n, p_n))) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial p^i_l}{\partial p^i_k} q^i_{l+1} + p^i_l \frac{\partial q^i_{l+1}}{\partial p^i_k}) + \frac{\partial}{\partial p^i_k}(\sum_{s=1}^{m} p^s_n \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2, ..., q_n, p_n) - L(q_1, ..., q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2, ..., q_n, p_n)) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial p^i_l}{\partial p^i_k} q^i_{l+1} + p^i_l \frac{\partial q^i_{l+1}}{\partial p^i_k}) + \frac{\partial}{\partial p^i_k}(\sum_{s=1}^{m} p^s_n \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2, ..., q_n, p_n) - L(q_1, ..., q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2, ..., q_n, p_n)) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial p^i_l}{\partial p^i_k} q^i_{l+1}) + \sum_{s=1}^{m} p^s_n \frac{\partial \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2, ..., q_n, p_n)}{\partial p^i_k} - \frac{\partial}{\partial p^i_k} L(q_1, ..., q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2, ..., q_n, p_n)) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}(\delta^l_k q^i_{l+1}) + \sum_{s=1}^{m} p^s_n \frac{\partial \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2, ..., q_n, p_n)}{\partial p^i_k} - \frac{\partial}{\partial p^i_k} L(q_1, ..., q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2, ..., q_n, p_n)) =$$

$$= q^i_{k+1} + \sum_{s=1}^{m} p^s_n \frac{\partial \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2, ..., q_n, p_n)}{\partial p^i_k} - \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(q_1, ..., q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, ..., q_n, p_n))}{\partial \overset{(n)s}{x}} \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p^i_k} =$$

$$= \overset{(k)i}{x} + \sum_{s=1}^{m} p^s_n \frac{\partial \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2, ..., q_n, p_n)}{\partial p^i_k} - \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(q_1, ..., q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, ..., q_n, p_n))}{\partial \overset{(n)s}{x}} \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p^i_k}.$$

$$(p^s_n - \frac{\partial L}{\partial \overset{(n)s}{x}}) \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p^i_n} + \overset{(k)i}{x} = \overset{(k)i}{x} = D_t \overset{(k-1)i}{x} = D_t q^i_k = \dot{q}^i_k$$

где $\delta^l_k = \begin{cases} 1, l = k \\ 0, l \ne k \end{cases} - \textit{символ Кронекера}$

Поскольку

$$\overset{(k)i}{x} = q^i_{k+1} \quad k == \overline{1, n-1}$$

$$\overset{(k-1)i}{x} = D_t q^i_k$$

$$p^s_n = \frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}}$$

$s=\overline{1,m}$

$\overset{(n)}{x}(q,p_n)=\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)$

Для $k=n$:

$$\frac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial p_n^i}=\overset{(n)i}{x}+\sum_{s=1}^{m}p_n^s\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p_n^i}(q_1,...,q_n,p_n)-\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial \overset{(n)s}{x}}\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p_n^i}=$$

$$=\overset{(n)i}{x}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p_n^i}(q_1,...,q_n,p_n)(p_n^s-\frac{\partial L q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial \overset{(n)s}{x}}).$$

$$\overset{(n)i}{x}=D_t\overset{(n-1)i}{x}=D_t q_n^i=\dot{q}_n^i$$

Дифференцирование по q дает:

для $n\geq k\geq 2$:

$$\frac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_k^i}=p_{k-1}^i+p_n^s\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_k^i}-\frac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial q_k^i}-\frac{\partial L q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial \overset{(n)s}{x}}\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_k^i}=$$

$$=p_{k-1}^i+\sum_{s=1}^{m}(p_n^s-\frac{\partial L q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial \overset{(n)s}{x}})\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_k^i}-\frac{\partial L}{\partial q_k^i}=$$

$$=p_{k-1}^i-\frac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial q_k^i})=-D_t p_k^i=-\dot{p}_k^i$$

$p_n^s=\dfrac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}}$ и, значит, $p_n^s-\dfrac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}}=0$

равенство $p_{k-1}^i-\dfrac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial q_k^i})=-D_t p_k^i=-\dot{p}_k^i$ следует из ранее доказанной теоремы о дифференциальной связи импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков:

$D_t p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})=\dfrac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}-p_i^{k-1}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x}$ для $n\geq k\geq 2$:

доказано.

В частности, для $k=1$ имеем:

$$\frac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_1^i}=\sum_{s=1}^{m}p_n^s\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_1^i}-\frac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial q_1^i}-\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}}\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_1^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}(p_n^s-\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)s}{x}})\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_1^i}-\frac{\partial L}{\partial q_1^i}=-\frac{\partial L}{\partial q_1^i}=-D_t p_1^i=-\dot{p}_1^i=p_0^i-\frac{\partial L}{\partial q_1^i}=0-\frac{\partial L}{\partial q_1^i}=-\frac{\partial L}{\partial q_1^i}$$

$$-D_t p_k^i=-\dot{p}_k^i=p_{k-1}^i-\frac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial q_k^i}$$

$$p_0^i=\sum_{L=0}^{N}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L}{\partial \overset{(l)i}{x}})$$

поскольку $p_n^s=\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}}$ и $p_n^s-\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}}=0$

равенство $-\dot{p}_k^i=p_{k-1}^i-\frac{\partial L}{\partial q_k^i}$ теоремы о дифференциальной связи импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков:

$$D_t p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})=\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}-p_i^{k-1}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x})=\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial q_k^i}-p_i^{k-1}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x})$$

$$q_k^i=\overset{(k-1)i}{x},k=\overline{1,n}$$

Доказательство завершено.

Следствие (теорема Остроградского).

Пусть $L(x,\dot{x})$ - сильно невырожденный

лагранжиан и $H(x,p)-$гамильтониан, $p=\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}$ $\dot{x}=\nu(x.p)$.Уравнение Эйлера-Лагранжа $\frac{\partial L}{\partial X}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})=0$ эквивалентны уравнениям Гамильтона

$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}$ $\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}$ в фазовом пространстве (x,p)

Выводы.

Таким образом, в статье:

1)Доказан явный вид производной по времени импульсов p_k^i :

$$D_t p_i^k(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k+1)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial q_k^i} - p_i^{k-1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k+1)}{x})$$

$k=\overline{1,n}$

2)Доказано обобщение теоремы М.В.Остроградского на случай невырожденных системы уравнений Эйлера-Лагранжа $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right)=0$ произвольного порядка: невырожденная система уравнений $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right)=0$

локально эквивалентна системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i)=\dot{q}_k^{\,i}=\dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial p_k^i} \\[2ex] D_t(p_k^i)=\dot{p}_k^{\,i}=-\dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_k^i} \end{cases}$$

$i=\overline{1,m}$ $\quad k=\overline{1,n}$ (система $2mn$ уравнений), где:

$$H(\bar{p},\bar{q})=-L(x(\bar{p},\bar{q}),\dot{x}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{x}(\bar{p},\bar{q}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{p},\bar{q}))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_k^i\overset{(k)i}{x}(\bar{p},\bar{q})=$$

$$=-L(x(\bar{p},\bar{q}),\dot{x}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{x}(\bar{p},\bar{q}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{p},\bar{q}))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_k^i D_t^k x^i(\bar{p},\bar{q})$$

- функция Гамильтона.

THE GENERALIZATION of the THEOREM HAMILTON-OSTROGRADSKOGO in STRATIFICATIONS of the VELOCITIES of the FREE ORDER.

The Abstract*: In work are researched characteristic of the Ostrogradski, generated unambiguous Lagrange function* $L: T^n X_m \to \Re$.

Evident type derived pulse k order is proved:

$$D_t p_i^k(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k+1)}{x}),\quad \textit{Where}$$

$$p_i^k(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)\quad k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}\text{ -}$$ *a pulse k order on i coordinate.*

The Proved generalization of Ostrogradsky-Hamilton theorem for unambiguous

Lagrange function of the free order. Is Proved generalization of Ostrogradsky theorem on event unambiguous systems of the Euler- Lagrange equations

$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right)=0$ *free order: unambiguous a system of the equations*

$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right)=0$ *the local equivalent canonical system of the equations Hamilton:*

$$\begin{cases} D_t(q_k^i)=\dot{q}_k^i=\dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial p_k^i} \\ D_t(p_k^i)=\dot{p}_k^i=-\dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_k^i} \end{cases}$$

$i=\overline{1,m}$ $k=\overline{1,n}$ $2mn$ *the system of the equations where:*

$$H(\bar{p},\bar{q})=-L(x(\bar{p},\bar{q}),\dot{x}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{x}(\bar{p},\bar{q}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{p},\bar{q}))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_k^i\overset{(k)i}{x}(\bar{p},\bar{q})=$$
$$=-L(x(\bar{p},\bar{q}),\dot{x}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{x}(\bar{p},\bar{q}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{p},\bar{q}))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_k^i D_t^k x^i(\bar{p},\bar{q})$$

- energy of the system condition which is described by system of the equations Eylera-Lagranzha

$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right)=0$, D_t^l *-l- multiple full differentiation on t*

The Keywords*: equations Euler-Lagrange, smooth of the variety, stratified space of the velocities ,energy and pulse of the system, of Ostrogradsky transformation, unambiguous function, Ostrogradsky theorem , system of the Hamilton equations.*

Литература

1. В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко Современная геометрия. Методы и приложения, М.,1994,УРСС.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.:Гостехиздат, 1956
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.:Наука,1974.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.:Наука,1974.
5. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика-М. Мир,1973.
6. Дирак П. Обобщенная гамильтонова динамика//Вариационные принципы механики. М.Физматгиз,1959.
7. Дирак П. Принципы квантовой механики-М.Мир, 1979.
8. Дирак П.Лекции по квантовой механики-М.Мир, 1968.

9. В.В.Трофимов, А.Т.Фоменко Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений. Издательство ”Факториал”, 1995.
10. Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии. Т.1,2- М.:Наука,1981.
11. Ю.Ф. Пастухов Исследование решения обратной вариационной задачи: автореф. дис. … канд. физ. – мат. наук/ Ю.Ф. Пастухов. – М., 1997.
12.Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Голубева О.В. Инварианты в расслоении скоростей произвольного порядка. Вестник Полоцкого государственного университета. Фундаментальные науки 2015№12

.

УДК 514

ЗАКОН ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННОГО ИМПУЛЬСА.

Аннотация .В работе введено понятие обобщенного импульса ранга n
$P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$,
$i = \overline{1,m},\ k = 0,n$ *, являющееся обобщением импульсов в преобразовании Остроградского* $F_L(x) : T^{2n} X_m \to T^{2n} X_m$*, индуцированного невырожденной функцией Лагранжа* $L : T^n X_m \to \Re$.

Исследован закон преобразования компонент импульсов порядка $k = 0,n$ *ранга* n *при замене координат в базе* X_m *расслоения* $T^n X_m$ *- они преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы).*

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_k^j(n)(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

$k = 0,n \quad, i = \overline{1,m}$

Ключевые слова: уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, преобразование Остроградского, невырожденная функция

Введение.

Между основным уравнением динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

Таким образом, законы сохранения проявляются как принципы запрета: любое явление, при котором не выполняется хотя бы один из законов сохранения, запрещено, и в природе такие явления никогда не наблюдаются. Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить.

Рассмотрим следующий пример. Может ли покоящееся тело за счет внутренней энергии начать двигаться? Этот процесс не противоречит закону сохранения энергии. Нужно лишь, чтобы возникающая кинетическая энергия точно равнялась убыли внутренней энергии.

На самом деле такой процесс никогда не происходит, ибо он противоречит закону сохранения импульса. Раз тело покоилось, то его импульс был равен нулю. А если оно станет двигаться, то его импульс сам собой увеличится, что невозможно. Поэтому внутренняя энергия тела не может превратиться в кинетическую, если тело не распадётся на части.

Если же допустить возможность распада этого тела на части, то запрет, налагаемый законом сохранения импульса, снимается. При этом возникшие осколки могут двигаться так, чтобы их центр масс оставался в покое, – а только этого и требует закон сохранения импульса. Поэтому, чтобы внутренняя энергия покоящегося тела могла превратиться в кинетическую, это тело должно распасться на части. Если же есть еще один какой-либо закон, запрещающий распад этого тела на части, то его внутренняя энергия и масса покоя будут постоянными величинами.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями. Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса-энергии в физической и математической постановке изложен в литературе [1-8,11]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координат – времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения Эйлера-Лагранжа)[6]. Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии либо импульса относительно данной координаты[7]. Задача Лагранжа содержит также уравнения связи (ограничения на краевые условия неизвестной функции). Переменные в уравнениях связи могут содержать производные выше второго порядка по времени от координат. Эти производные неявно входят в функцию Лагранжа, зависящую от ограничений. Поэтому рассмотренная задача актуальна в робототехнике, где перемещение механизмов могут иметь старшие производные по времени. Данная работа является продолжением работы[9].

Постановка задачи и основные определения.

Пусть X_m - гладкое многообразие размерности m , $T^n X_m$ - гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m.

$L : T^n X_m \to \Re$-невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$. [9].

Определение 1. Пусть D_t^k - оператор $k-$кратного полного дифференцирования по переменной t

$$p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m},$$ а в любой другой системе

локальных координат $x(\bar{x})$ в базе X_m,

$$\overline{p_k^i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_k^j(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$ (свертка)

$i, j = \overline{1,m}, 0 \le k \le n$

называется преобразованием Остроградского, в расслоении скоростей $T^{2n} X_m$, а функции $p_k^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$ (зависят от производных координат не более $(2n-k)$ порядка - (нижний индекс-номер порядка импульса, нижний - номер координаты) называются импульсами порядка k по $i-$ой координате.

Обобщением **определения 1** является

Определение 2. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2\min(n,p)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^p X_m \to \Re$, где $L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функция $p_{k,n}^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2\min(n,p)-k)}{x})$ называются $k-ой$ компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k-импульсами) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Замечание 1. Обобщенный импульс ранг n определен для функций $L: T^p X_m \to \Re$.

Из определения $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ следует, что

при $k > p, l \ge 0 \Rightarrow l + k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и все $p_k^i(n) \equiv 0$ (тривиальные импульсы), то есть для нетривиальных импульсов $k \le p$. Поскольку $k \le n, k \le p \Rightarrow k \le \min(n, p)$, то в **определении 2** можно считать, что $k = \overline{0, \min(n, p)}, i = \overline{1, m}$.

Максимальный порядок производной по t в $p_k^i(n)$ равен $l + k + k = 2 \cdot l + k$.

При $l + k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, значит, при определении максимального порядка производной по t можно считать $l + k \le p$, кроме того, проведем сравнения

$$l \le n - k \Leftrightarrow l + k \le n \Rightarrow l + k \le \min(n, p) \Rightarrow l \le \min(n, p) - k \Rightarrow 2 \cdot l + k \le 2 \cdot (\min(n, p) - k) + k =$$

$$= 2 \cdot \min(n, p) - 2 \cdot k + k = 2 \cdot \min(n, p) - k .$$

Хотя более грубая оценка порядка старшей производной по t в $p_k^i(n)$ дает

$$l \le n - k \Leftrightarrow l + k \le n \Rightarrow 2 \cdot l + k \le 2 \cdot (n - k) + k = 2 \cdot n - 2 \cdot k + k = 2 \cdot n - k .$$

При $p > n, l + k \le n - k + k = n$ и (максимальный порядок производной по t в $L(x,..., \overset{(p)}{x})$) больше максимального порядка производной по t переменной по которой производится частное дифференцирование

в $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$. При $p < n$, поскольку $l + k \le n - k + k = n$ при $l + k > p$

$\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и часть членов в сумме $\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ будет тождественно равна

0. Пограничным является случай $p=n$, именно тот случай будет рассмотрен в дальнейшем без ограничения общности рассмотрения.

При $p=n$ в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ получаем импульсы в преобразовании Остроградского:

$$p^i_{0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)=\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^i}-D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \dot{x}^i}\Big)+\dots+(-1)^n D_t^n\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\Big)$$

нуль-импульс (функционал в уравнении Эйлера-Лагранжа).

$$p^i_{1,n}=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}-D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \ddot{x}^i}\Big)+\dots+(-1)^{n-1} D_t^{n-1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\Big)$$

$$p^i_{2,n}=\sum_{l=0}^{n-2}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)=\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \ddot{x}^i}-D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \dddot{x}^i}\Big)+\dots+(-1)^{n-2} D_t^{n-2}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\Big)$$

...

$$p^i_{n,n}=\sum_{l=0}^{n-n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)=\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}.$$

Теорема 1. Пусть $\bar{x}^i=S^i(x_1,x_2,\dots,x_m)$, $S:(x)\to(\bar{x})$, - невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p=\max(s,l)$, $i=\overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}}=\begin{cases}C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_l^s=\dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l!=\prod\limits_{k=1}^{l}k, l\ge s\\ 0, l<s\end{cases}$$

Имеет место следующая

Теорема 2(о связи импульсов $k-ого$ порядка рангов n и $n+1$). Пусть $L:T^p X_m\to\Re$. $L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции $L:T^p X_m\to\Re$ при выборе локальных координат в базе расслоения X_m,

$$p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(P)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)\quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$ -импульс k-ого порядка ранга n

$$p^i_{k,n+1}=\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(P)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$$ - импульс k-ого порядка ранга n +1

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$p^i_{k,n+1}=p^i_{k,n}+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)$$

Доказательство:

$$p^i_{k,n+1}=\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)+(-1)^{n+1-k}D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1-k+k)i}{x}}\Big)=$$

$$=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)+(-1)^{n+1-k}D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)=p_{k,n}^i+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right).$$

Теорема доказана.

Математическая постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу:

Пусть $L:T^nX_m \to \Re$ - функция в точке $v_x^n \in T^nX_m$. Исследовать закон преобразования Компонент обобщенного импульса P_n ранга n при замене локальной системы координат $x = x(\bar{x})$ в базе X_m расслоения скоростей T^nX_m.

Теорема 3(закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n}X_m$).

При замене $(\bar{x}) \to (x(\bar{x}))$: в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n}X_m$.

$\overline{p_k^i(n)}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})$ преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})=\sum_{j=1}^{n}p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}=p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

$k=0,n \quad i,j=\overline{1,m}$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по рангу обобщенного импульса n.

Для базы индукции n=1имеем:

$x = (x^1, x^2,..., x^m),\ \bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2,..., \bar{x}^m)$

$L(x,\dot{x}) = L(x,D_t x)$

$\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) = \bar{L}(\bar{x},D_t\bar{x}) = L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})) = L(x(\bar{x}),D_t(x(\bar{x})))$

Для импульса 0-ого порядка(0-импульса) 1-ого ранга в локальных координатах имеем:

$$\bar{p}_{0,1}^{\,i}=\sum_{l=0}^{1-0}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+0)i}{\bar{x}}}\right)=-D\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right)+\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \dot{\bar{x}}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right)+\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right)+\sum_{s=1}^{m}-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right)+\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\right)=$$

$$=-\sum_{s=1}^{m}D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right)-\sum_{s=1}^{m}D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right)+\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\right)$$

поскольку $\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=0$ по ранее доказанной **теореме 1** $\frac{\partial x^s}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=\frac{\partial D_t^0 x^s}{\partial D_t^1 \bar{x}^i}=\frac{\partial \overset{(0)}{x}{}^s}{\partial \overset{(1)}{\bar{x}}{}^i}=0$ и

$0<1$ (это и понятно, так как x^s не зависит от $\dot{\bar{x}}^i$), продолжая преобразование:

$$-\sum_{s=1}^m D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right)-\sum_{s=1}^m D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right)+\sum_{s=1}^m\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^m -D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right)+\sum_{s=1}^m\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^m -D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right)+\sum_{s=1}^m\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}+\sum_{s=1}^m\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=$$

Так как

$$\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=\sum_{k=1}^m\frac{\partial}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\left(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\cdot\dot{\bar{x}}^k\right)=\sum_{k=1}^m\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\cdot\frac{\partial \dot{\bar{x}}^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=\sum_{k=1}^m\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\cdot\delta_i^k=\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i},$$

где

$$\delta_i^k=\begin{cases}1, i=k\\0, i\neq k\end{cases}-\textit{символ Кронеккера}$$ и

(этот результат следует также из **теоремы 1**:

$$\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=\frac{\partial \overset{(1)}{x}{}^s}{\partial \overset{(1)}{\bar{x}}{}^i}=C_1^1\cdot D_t^{1-1}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=1\cdot D_t^0\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i})$$

$$\frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \bar{x}^i}=\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}(D_t x^s(\bar{x}))=\sum_{k=1}^m\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\left(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\cdot D_t\bar{x}^k\right)=\sum_{k=1}^m\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\left(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\cdot\dot{\bar{x}}^k\right)=\sum_{k=1}^m\frac{\partial^2 x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i\,\bar{x}^k}\cdot\dot{\bar{x}}^k$$

$$D_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}(x^s(\bar{x}))\right)=\sum_{k=1}^m\frac{\partial^2 x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i\,\bar{x}^k}\cdot\dot{\bar{x}}^k=D_t\left(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right)=\frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \bar{x}^i}.$$

Этот результат следует и из **теоремы 1**:

$$\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=\frac{\partial \overset{(1)}{x}{}^s}{\partial \overset{(0)}{\bar{x}}{}^i}=C_1^0\cdot D_t^{1-0}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=1\cdot D_t^1\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=D_t\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

Далее

$$\sum_{s=1}^m -D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right)+\sum_{s=1}^m\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}+\sum_{s=1}^m\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\right)\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}-\sum_{s=1}^{m}D_t\left(\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}\right)\cdot\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\right)\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}-\sum_{s=1}^{m}D_t\left(\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}\right)\cdot\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}+$$

$$+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot D_t\left(\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}\right)+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\right)\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=\sum_{s=1}^{m}\left(-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\right)+\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\right)\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}p^s_{0,1}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=p^s_{0,1}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}$$

Так как $p^s_{0,1}=\sum_{l=0}^{1-0}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \overset{(l+s)i}{x}}\right)=-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\right)+\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}$, то

утверждение теоремы доказано для импульса 0-го порядка(0-импульса) 1-ого ранга.

Для импульса 1-ого порядка(1-импульса) 1-ого ранга в локальных координатах имеем:

$$\bar p^{\,i}_{1,1}=\sum_{l=0}^{1-1}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x})}{\partial \overset{(l+1)i}{\bar x}}\right)=\left(\frac{\partial \bar L}{\partial \dot{\bar x}^i}\right)=\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s}{\partial \dot{\bar x}^i}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}. \qquad (1)$$

Второе слагаемое в формуле (1) $\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}=0$, что следует из **теоремы 1**:

$$\frac{\partial x^s}{\partial \dot{\bar x}^i}=\frac{\partial D_t^0 x^s(\bar x)}{\partial D_t^1\bar x^i}=\frac{\partial \overset{(0)s}{x}(\bar x)}{\partial \bar x^{(1)i}}=\delta_1^0\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=0\ ,$$

так, как $l=0<1=s$ в **теореме 1**(иначе - x^s не зависит от $\dot{\bar x}^i$).

Для первого слагаемого в формуле (1)(по **теореме 1**):

$$\frac{\partial \dot x^s}{\partial \dot{\bar x}^i}=\frac{\partial \overset{(1)s}{x}}{\partial \overset{(1)i}{\bar x}}=C_1^1\cdot D_t^{1-1}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=1\cdot D_t^0\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}$$, то упрощая (1),получим:

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=\sum_{s=1}^{m}p_1^s\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=p_1^s\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}$$

Утверждение теоремы доказано для импульса 1-го порядка(1-импульса) 1-ого ранга. Таким образом, база индукции доказана.

Индуктивный переход.

Пусть утверждение верно для n и для любой $L:T^nX_m\to\Re$.

$$\bar p_0^{\,i}(n)=\bar p_{i,0}^{\,i}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(l+0)i}{\bar x}}\Big)=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+0)j}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^i}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}p_0^j(n)\cdot\frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^i}=p_0^j(n)\cdot\frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^i}=\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(l)i}{\bar x}}\Big),\quad 1\le i\le m \qquad (2)$$

Правая часть в (2) написана на основании теоремы о производной сложной функции:

$$\frac{\partial \bar L(\bar x,\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(l+0)i}{\bar x}}=\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(l)i}{\bar x}}\Big)$$

Нужно доказать, что:

$$\bar p_0^{\,i}(n+1)=\bar p_{0,n+1}^{\,i}=\sum_{l=0}^{n+1-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dots,\overset{(n)}{\bar x},\overset{(n+1)}{\bar x})}{\partial \overset{(l+0)i}{\bar x}}\Big)=\sum_{s=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n+1-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l+0)s}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}p_0^s(n+1)\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=p_0^s(n+1)\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}.$$

По теореме о производной сложной функции:

$$\frac{\partial \bar L(\bar x,\dots,\overset{(n)}{\bar x},\overset{(n+1)}{\bar x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar x}}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(l)i}{\bar x}},$$

$$\bar p_0^{\,i}(n+1)=\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dots,\overset{(n)}{\bar x},\overset{(n+1)}{\bar x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar x}}\Big)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(l)i}{\bar x}}\Big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(l)i}{\bar x}}\Big)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(l)i}{\bar x}}\Big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(l)i}{\bar x}}\Big)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n+1} D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n+1)i}{\bar x}}\Big)\overset{(3)}{=}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big) \qquad (4)$$

Последнее слагаемое в (3) равно 0 по **теореме 1:** $\dfrac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{\bar{x}}}=0\,при\;\;0\le s\le n<n+1$.

Учитывая равенство (2) , по предположению индукции последнее слагаемое в сумме (4) равно:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l)j}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \qquad (5)$$

По **теореме 1:** $\dfrac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}=C_{n+1}^{l}D_t^{n+1-l}\Big(\dfrac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)$. (6)

Учитывая (6) ,преобразуем первое слагаемое в сумме (4), используя формулу Лейбница производной порядка l произведения двух функций f,g :

$$D_t^l(fg)=\sum_{p=0}^{l}C_l^pD_t^p(f)D_t^{l-p}(g)\;\;,C_l^p=\frac{l!}{p!(l-p)!},l!=\prod_{k=1}^{l}k:$$

$$\sum_{l=0}^{n+1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{l=0}^{n+1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}C_{n+1}^{l}D_t^{n+1-l}\Big(\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^{l}\sum_{p=0}^{l}C_l^pD_t^p\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)D_t^{l-p}D_t^{n+1-l}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^{l}\sum_{p=0}^{l}C_l^pD_t^p\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)=$$

$$\overset{(7)}{=}\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1}D_t^p\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^lC_{n+1}^lC_l^p.$$

$$C_{n+1}^lC_l^p=\frac{(n+1)!}{l!(n+1-l)!}\frac{l!}{p!(l-p!)}=\frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}\frac{(n+1-p)!}{(l-p)!(n+1-p-(l-p))!}=C_{n+1}^pC_{n+1-p}^{l-p} \qquad (8)$$

Введем новую переменную $m=l-p$ и преобразуем последнюю сумму в (7) с учетом соотношения (8):

$$\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^lC_{n+1}^lC_l^p=\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^lC_{n+1}^pC_{n+1-p}^{l-p}=\sum_{m=0}^{n+1-p}(-1)^{m+p}C_{n+1}^pC_{n+1-p}^m=(-1)^pC_{n+1}^p\sum_{m=0}^{n+1-p}(-1)^mC_{n+1-p}^m \qquad (9)$$

При $p = n+1$ преобразуем (9):

$$(-1)^p C_{n+1}^p \sum_{m=0}^{n+1-p}(-1)^m C_{n+1-p}^m = (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1} \sum_{m=0}^{n+1-(n+1)}(-1)^m C_{n+1-(n+1)}^m = (-1)^{n+1}$$

При $p < n+1$ сумма в (9) равна:

$$(-1)^p C_{n+1}^p \sum_{m=0}^{n+1-p}(-1)^m C_{n+1-p}^m = (-1)^p C_{n+1}^p \sum_{m=0}^{n+1-p} C_{n+1-p}^m (-1)^m 1^{n+1-p-m} = (-1)^p C_{n+1}^p (1+(-1))^{n+1-p} = 0$$

То есть:

$$\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^l C_l^p = \begin{cases}(-1)^{n+1}, & p = n+1\\ 0, & p < n+1\end{cases} = (-1)^{n+1}\delta_{n+1}^p,\ \delta_{n+1}^p = \begin{cases}1, & p = n+1\\ 0, & p < n+1\end{cases} - \textit{символ Кронекера} \qquad (10)$$

Заменим в (6) последнюю сумму $\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^l C_l^p$ полученным выражением в (10):

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1} D_t^p\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^l C_l^p = \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1} D_t^p\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)(-1)^{n+1}\delta_{n+1}^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1} D_t^p\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)(-1)^{n+1}\delta_{n+1}^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-(n+1)}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)(-1)^{n+1}\delta_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

Таким образом, доказано равенство:

$$\sum_{l=0}^{n+1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big) = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \qquad (11)$$

Подставляя полученный в (11) результат в (4) и учитывая (5), получим:

$$\bar{p}_0^i(n+1) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} + \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l)j}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l)s}{x}}\Big) + (-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l)s}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \sum_{k=1}^{m} p_0^k(n+1)\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

Индуктивный переход для импульсов $0-\textit{ого}$ порядка ранга n доказан.

Для импульсов $\bar{p}_{n+1,n+1}^i$ порядка $(n+1)$ ранга $(n+1)$ имеем:

$$\bar{p}^{i}_{n+1,n+1} = \sum_{l=0}^{n+1-(n+1)} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+\overline{n+1})i}{\bar{x}}}\Big) = \sum_{l=0}^{0} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+\overline{n+1})i}{\bar{x}}}\Big) =$$

$$= (-1)^0 D_t^l \Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(0+\overline{n+1})i}{\bar{x}}}\Big) = \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(\overline{n+1})i}{\bar{x}}} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} \cdot \frac{\partial \overset{(p)j}{x}}{\partial \overset{(\overline{n+1})i}{\bar{x}}}\Big) = \tag{12}$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} \cdot \delta^p_{n+1} \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}\Big) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)j}{x}} \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}} = \sum_{j=1}^{m} p^j_{n+1,n+1} \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}} .$$

Так как в (12) $\dfrac{\partial \overset{(p)j}{x}}{\partial \overset{(\overline{n+1})i}{\bar{x}}} \equiv 0$ для $0 \le p \le n$, а для $p = n+1$ (по **теореме 1):**

$$\frac{\partial \overset{(n+1)j}{x}}{\partial \overset{(\overline{n+1})i}{\bar{x}}} = C^{n+1}_{n+1} \cdot D_t^{n+1-(n+1)} \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}} = D_t^0 \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}} = \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}} .$$

То есть $\dfrac{\partial \overset{(p)j}{x}}{\partial \overset{(\overline{n+1})i}{\bar{x}}} = \begin{cases} 0, 0 \le p \le n \\ \dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}, p = n+1 \end{cases} = \delta^p_{n+1} \cdot \dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}$, $\delta^k_i = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \ne k \end{cases}$ $-$ *символ Кронекера*

Индуктивный переход для импульсов $n-ого$ порядка ранга n доказан. **Теорема 3** доказана. Из замечания 1 в начале работы следует

Теорема 4. Если $(\bar{x}) \to (x(\bar{x}))$ - любая невырожденная замена координат в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n}X_m$ для функции $L: T^pX_m \to \Re$, тогда компоненты обобщенного импульса ранга $n \ge p$ порядка $k = 0,n$

$\overline{p^i_k(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2p-k)}{\bar{x}}}), i = \overline{1,m}$ преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы)

$$\overline{p^i_k}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2p-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{n} p^j_k(n)(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2p-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}} = p^j_k(n)(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2p-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}$$

$k = 0,n \quad ,i = \overline{1,m}$

Из **теоремы 4** следует корректность определения 2 .

Теорема 5(корректность Определения 2).

Обобщенный импульс ранга $n: P_n = \{p^i_k(n)\} = \{p^i_{k,n}\}$, где

$$p^i_k(n) = p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) \quad k = 0,n \quad ,i = \overline{1,m}$$

не зависит от выбора локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^pX_m $n \ge p$ (*обобщенный импульс порядка* $k = \overline{0,n}$ ранга n *является геометрическим инвариантом*).

Замечание 2. Пусть $L: T^pX_m \to \Re$. При $p > n$ импульсы порядка $k = \overline{0,n}$ ранга n , вообще говоря, тензорами не являются.

Для примера рассмотрим закон преобразования импульсов $0-ого\, и\, 1-ого$ порядков

ранга 1 : $\quad \overset{-}{p}{}^{i}_{k}(n)=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l}D_t^{l}\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}}\Big)$.

По **теореме 1:**

$$\frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \bar{x}^{i}}=C_k^0 D_t^k\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}\Big)\ ,\quad \frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \dot{\bar{x}}^{i}}=\begin{cases}C_k^1 D_t^{k-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}\Big),\, при\ k\geq 1\\ 0\ ,\ при\, k=0\end{cases}$$

$$\overset{-}{p}{}^{i}_{0}(1)=\sum_{l=0}^{1-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+0)i}{\bar{x}}}\Big)=-D_t\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{i}}\Big)+\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{i}}=-D_t\Big(\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \dot{\bar{x}}^{i}}\Big)+$$

$$+\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \bar{x}^{i}}=-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}D_t\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\Big)C_k^1 D_t^{k-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}\Big)-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}C_k^1 D_t\Big(D_t^{k-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}\Big)\Big)+\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}C_k^0 D_t^k\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}\Big)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}D_t\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\Big)C_k^1 D_t^{k-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}\Big)-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}C_k^1 D_t^k\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}\Big)+\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}C_k^0 D_t^k\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x}}{\partial \bar{x}^{i}}\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}D_t^k\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}\Big)(-C_k^1+C_k^0)-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}D_t\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\Big)C_k^1 D_t^{k-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}\Big) \tag{13}$$

Видно, что при $p=1$ выражение (13) является тензором:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}-\sum_{j=1}^{m}D_t\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{i}}\Big)\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}=\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^j}-D_t\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{i}}\Big)\Big)\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}$$

,а при $p>1$ выражение (13)) тензорным преобразованием не является: будут члены с ненулевой производной $D_t^{p-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}\Big)$ и $-C_k^1+C_k^0\neq 0\ при\ p>1$

$$\overset{-}{p}{}^{i}_{1}(1)=\sum_{l=0}^{1-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+1)i}{\bar{x}}}\Big)=\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{i}}=\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \dot{\bar{x}}^{i}}=$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} C_k^1 D_t^{k-1}\left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right) \tag{14}$$

И в этом случае при $p>1$ выражение (14) тензорным преобразованием не является: будут члены с ненулевой производной $D_t^{p-1}\left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right)$

Замечание 3. Пусть $L: T^n X_m \to \Re$. $(p=n)$ импульсы порядка $0<k<n$ ранга n, вообще говоря, тензорами не являются. Для примера рассмотрим закон преобразования импульсов $1-ого$ порядка ранга 2: $\bar{p}_k^{\,i}(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}}\right)$

$$\bar{p}_1^{\,i}(2) = \bar{p}_{1,2}^{\,i} = \sum_{l=0}^{2-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\ddot{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+1)i}{\bar{x}}}\right) = D_t^0\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right) - D_t^1\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^i}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i} + \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k}\frac{\partial \ddot{x}^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right) - \sum_{k=1}^{m} D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k}\frac{\partial \ddot{x}^k}{\partial \ddot{\bar{x}}^i}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} C_1^1 D_t^{1-1}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right) + \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} C_2^1 D_t^{2-1}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)\right) - \sum_{k=1}^{m} D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} C_2^2 D_t^{2-2}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} C_2^1 D_t^1\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)\right) - \sum_{k=1}^{m} D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} C_2^1 D_t^1\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)\right) - \sum_{k=1}^{m}\left(D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k}\right)\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} D_t\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} - D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k}\right)\right)\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \quad + \quad \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} D_t\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)(C_2^1 - 1) \tag{15}$$

Для первой суммы в (15) выполнен тензорный закон преобразования, а для второй - нет. Поэтому $\bar{p}_{1,2}^{\,i}$ - не является тензором.

Литература:

1. В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко Современная геометрия. Методы и приложения, М.,1994,УРСС.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.:Гостехиздат, 1956
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.:Наука,1974.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.:Наука,1974.
5 Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц Теория поля. -М.:Наука.1973.507с.
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц Механика. - М.:Наука.1973.507с.
7. Э. М. Галеев, В.М.Тихомиров Краткий курс теории экстремальных задач. - М.: Издательство МГУ 1989.203 с.
8. Дирак П.Лекции по квантовой механике - М. Мир, 1968.

9 Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков, Дифференциально-Геометрические структуры на многообразиях, Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом., 1979, том 9.
10. В.В.Трофимов, А.Т.Фоменко Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений. Издательство "Факториал", 1995.

The paper introduced the concept of the generalized pulse rank n $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$, $i = \overline{1,m}, 0 \le k \le n$

Studied the law of transformation of order $k = 0, n$ *component pulses rank* n *at change of coordinates in the base* X_m *of the bundle* $T^n X_m$ *- they transform as a tensor of type (0,1) (covectors).*

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2r-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_k^j(n)(x, \dot{x}, ..., \overset{(2r-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x, \dot{x}, ..., \overset{(2r-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

$r = \min(n, p), \quad k = 0, n \quad, i = \overline{1,m}$

Keywords: Euler-Lagrange equation, smooth manifolds, fiber space velocities, the momentum of the system, the transformation Ostrogradsky nondegenerate function.

УДК 514

ТЕНЗОР ОБОБЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ

Аннотация: В работе доказана инвариантность энергии ранга n системы, состояние которой описывается гладкой функцией, определенной в расслоенном пространстве скоростей $L : T^p X_m \to \Re \quad p \le n$.

$L(x,..., \overset{(n)}{x})$, $p^k_{i,n}$, $H_n(L,x)$ *-локальная запись функции* L*, импульсов* $k-$*ого порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат (x) в базе* X_m *расслоения* $T^p X_m$. $H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^k_{i,n} \overset{(k)i}{x}$

$\bar{L}(\bar{x},..., \overset{(n)}{\bar{x}})$, $\overline{p^j_{k,n}}$, $\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x})$ *-локальная запись функции* L*, импульсов* $k-$*ого порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат* $(\bar{x})$ *в базе* X_m *расслоения* $T^p X_m$.

$$\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x}) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{L}(\bar{x},..., \overset{(n)}{\bar{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{p^i_{k,n}} \overset{(k)i}{\bar{x}} \quad \text{Тогда} \quad H(L,x,n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$$

Ключевые слова: уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, тензор энергии, тензор обобщенного импульса, невырожденная функция.

Введение.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями.

Законы сохранения важны не только в механике, но и во всей физике. Научное и методологическое значение законов сохранения определяет их исключительная общность и универсальность. Благодаря той особой роли, которую играют законы сохранения в физике, они являются важнейшим элементом современной научной картины мира.

Между основным уравнением динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

В начале 20 века Эмми Нетер доказала важную теорему, которая утверждает, что всякому непрерывному преобразованию координат с заданным законом преобразования соответствует некоторая сохраняющаяся величина (или, как говорят, инвариант преобразования). Поскольку преобразования координат тесно связаны со свойствами симметрии пространства и времени (однородностью, изотропностью пространства и однородностью времени), то каждому свойству симметрии пространства и времени должен соответствовать определенный закон сохранения. С однородностью пространства, то есть с симметрией законов физики по отношению к пространственным сдвигам начала координат, связан закон сохранения импульса. С изотропностью пространства, то есть с симметрией относительно поворота системы координат в пространстве, связан закон сохранения момента импульса. Аналогично представление об однородности времени (симметрии по отношению к сдвигам времени) приводит к закону сохранения энергии.

Значение теоремы Нетер не ограничивается только тем, что она устанавливает связь классических законов сохранения с видами симметрии, имеющими геометрическую природу. При наличии в физической системе симметрий другого рода, не связанных со свойствами пространства и времени, теорема Нетер позволяет установить другие законы сохранения. И наоборот, всякий закон сохранения связан с некоторой определенной симметрией системы.

Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса-энергии в физической и математической постановке изложен в литературе [1-10]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координат – времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения Эйлера-Лагранжа)[6]. Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии либо импульса относительно данной координаты[7]. Задача Лагранжа содержит также уравнения связи (ограничения на краевые условия неизвестной функции). Переменные в уравнениях связи могут содержать производные выше второго порядка по времени от координат. Эти производные неявно входят в функцию Лагранжа, зависящую от ограничений. Поэтому рассмотренная задача актуальна в робототехнике, где перемещение механизмов могут иметь старшие производные по времени. Данная работа является продолжением предыдущих работ.

Постановка задачи и основные определения.

Пусть X_m - гладкое многообразие размерности m , $T^n X_m$ - гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m.

$L:T^nX_m\to\Re$-невырожденная функция в точке $v_x^n\in T^nX_m$ [9].

Постановка задачи.

Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе: X_m – гладкое многообразие размерности *m*; T^nX_m – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка *n* с базой расслоения X_m; $L:T^nX_m\to\Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n\in T^nX_m$ [9].

Лемма 1. Пусть $\bar{x}^i=S^i(x_1,x_2,...,x_m)$, здесь $S:(x)\to(\bar{x})$ - гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка T^pX_m, $p\ge\max(s,l)$, $i=\overline{1,m}$, тогда

$$D_t^k x^i(\bar{x})=x^{(k)i}(\bar{x})=\sum_{j=1}^m\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\overset{(k)j}{\bar{x}}+f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{\bar{x}})\quad k\ge1,$$

где $f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{\bar{x}})$ - некоторая гладкая функция координат

$$\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{\bar{x}},\ \overset{(s)}{\bar{x}}=(\overset{(s)1}{\bar{x}},...,\overset{(s)m}{\bar{x}}),\ \overset{(s)j}{\bar{x}}=D_t^s\bar{x}^j\quad s=\overline{0,k-1}.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k=1$.

$D_t^1x^i(\bar{x})=x^{(1)i}(\bar{x})=\sum_{j=1}^m\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}=\sum_{j=1}^m\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^j$ проверено. Проверим для k=2

$$D_t^2x^i(\bar{x})=x^{(2)i}(\bar{x})=D_t^1(\sum_{j=1}^m\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}})=\sum_{j=1}^m D_t^1(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j})\dot{\bar{x}}^j+\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}D_t^1\dot{\bar{x}}^j=\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^m\frac{\partial^2x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^l\partial\bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^l\dot{\bar{x}}^j+$$

$$+\sum_{j=1}^m\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\ddot{\bar{x}}^j=\sum_{j=1}^m\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\ddot{\bar{x}}^j+f(\bar{x},\dot{\bar{x}}),\quad f(\bar{x},\dot{\bar{x}})=\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^m\frac{\partial^2x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^l\partial\bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^l\dot{\bar{x}}^j.\ \textit{Проверено для } k=2.$$

Индуктивный переход. Пусть $D_t^kx^i(\bar{x})=x^{(k)i}(\bar{x})=\sum_{j=1}^m\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\overset{(k)j}{\bar{x}}+f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{\bar{x}})$. Тогда

$$D_t^{k+1}x^i(\bar{x})=D_t^1x^{(k)i}(\bar{x})=D_t(\sum_{j=1}^m\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\overset{(k)j}{\bar{x}}+f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{\bar{x}}))=\sum_{j=1}^m(\sum_{l=1}^m\frac{\partial^2x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^l\partial\bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^l)\overset{(k)j}{\bar{x}}+\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\overset{(k+1)j}{\bar{x}}+$$

$$+\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^m\frac{\partial f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(s)j}{\bar{x}}}\overset{(s+1)j}{\bar{x}}=\sum_{j=1}^m\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\overset{(k+1)j}{\bar{x}}+f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{\bar{x}}),\ 0+1\le s+1\le k-1+1=k\,,$$

$$f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{\bar{x}})=\sum_{j=1}^m(\sum_{l=1}^m\frac{\partial^2x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^l\partial\bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^l)\overset{(k)j}{\bar{x}}+\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^m\frac{\partial f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(s)j}{\bar{x}}}\overset{(s+1)j}{\bar{x}}\quad\text{. Лемма доказана.}$$

Теорема 1 [11, с. 193]. Пусть $x^i=S^i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_m)$ $S:(\bar{x})\to(x)$, - гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка T^pX_m, $p\ge\max(s,l)$ $i=\overline{1,m}$, тогда справедливо:

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(l)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{\underline{x}}} = \begin{cases} C_k^p \cdot D_t^{k-p}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_k^p = \dfrac{k!}{p!(k-p)!}, k! = \prod_{j=1}^{k} j, k \ge p \\ 0, k < p \end{cases}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы в более общем виде приведено в **[11].**

Ввиду важности утверждения теоремы 1 приведем независимое от ссылки доказательство теоремы 1 для двух параметров k и p.

При $p > k \ge 0$ **по лемме 1** имеем:

$$x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{()}{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{x} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{x}) \quad k \ge 1$$. Поэтому

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{\underline{x}}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{\underline{x}}}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{x} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{x})\right) = 0$$

При $k \ge p$ доказательство **теоремы 1**проведем методом математической индукции. База индукции $k = p$

Используя **лемму 1,** имеем $$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{\underline{x}}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(k)j}{\underline{x}}}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{x} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{x})\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial \overset{(k)l}{x}}{\partial \overset{(k)j}{\underline{x}}}\right) + \frac{\partial f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{\underline{x}}} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\delta_j^l = \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \qquad \delta_j^l = \begin{cases}1, j = l \\ 0, j \ne l\end{cases} - \textit{символ Кронекера}$$

База индукции доказана.

Индуктивный переход. Пусть утверждение теоремы справедливо при $k \ge p$.

Введем функции $F_k^i(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{x}) = x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{x})$, $\overset{(k+1)i}{x} = D_t(x^{(k)i}) = D_t F_k^i = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\underline{x}}}\overset{(s+1)l}{x}$.

$$\frac{\partial x^{(k+1)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(l)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{\underline{x}}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{\underline{x}}}\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\underline{x}}}\overset{(s+1)l}{x}\right) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{\underline{x}}\,\partial \overset{(s)l}{\underline{x}}}\overset{(s+1)l}{x} + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\underline{x}}}\frac{\partial x^{(s+1)l}}{\partial \overset{(p)j}{\underline{x}}}\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{\underline{x}}\,\partial \overset{(s)l}{\underline{x}}}\overset{(s+1)l}{x}\right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\underline{x}}}\delta_p^{s+1}\delta_j^l = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\underline{x}}\,\partial \overset{(p)j}{\underline{x}}}\overset{(s+1)l}{x}\right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p-1)j}{\underline{x}}}.$$

По предположению индукции $\dfrac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{\underline{x}}} = \dfrac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{\underline{x}}} = C_k^p D_t^{k-p}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)$. Значит,

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\underline{x}}\,\partial \overset{(p)j}{\underline{x}}}\overset{(s+1)l}{x}\right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p-1)j}{\underline{x}}} = C_k^p\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{\underline{x}}}\left(D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\right)D_t\overset{(s)l}{x}\right) + C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) =$$

$$= C_k^p\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-p}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{\underline{x}}}\left(D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-p)}{x})\right)D_t\overset{(s)l}{x}\right) + C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) =$$

$$=C_k^p D_t(D_t^{k-p}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}))+C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})=(C_k^p+C_k^{p-1})D_t^{k+1-p}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})=C_{k+1}^p D_t^{k+1-p}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}).$$

В последней строке было использовано свойство биномиальных коэффициентов

$$C_k^p+C_k^{p-1}=\frac{k!}{p!(k-p)!}+\frac{k!}{(p-1)!(k-(p-1))!}=\frac{k!}{p!(k-p)!}(1+\frac{p}{k-p+1})=\frac{(k+1)!}{p!(k-p+1)!}=C_{k+1}^p$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2[11]. Пусть $\bar{x}^i=S^i(x_1,x_2,...,x_m)$ $S:(x)\to(\bar{x})$, - невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка T^pX_m, $p\ge\max(s,l)$ $i=\overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)}{\bar{x}}{}^j}=\begin{cases}C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right),C_l^s=\dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!},l!=\prod\limits_{k=1}^{l}k,l\ge s\\0,l<s\end{cases}$$

Определение 1. Система функций $P_n=\{p_k^i(n)\}=\{p_{k,n}^i\}$

$$p_k^i(n)=p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(p+\min(n,p)-k)}{x})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}})\quad k=\overline{0,n},i=\overline{1,m}$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L:T^pX_m\to\Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения T^pX_m где

$L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^pX_m.

Функция $p_{k,n}^i$ называются $k-ой$ компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k-импульсами) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Теорема 3[10](закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n}X_m$). При замене $(\bar{x})\to(x(\bar{x}))$: в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n}X_m$ импульсы $\overline{p_k^i(n)}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})$ преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})=\sum_{j=1}^m p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}=p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}$$

$$p_k^i(n)=p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}})$$ - импульс порядка k

$k=0,n$ $i,j=\overline{1,m}$.

Определение 2. Пусть $L:T^pX_m \to \Re$, $L(x,..., \overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения T^pX_m.

Функция

$$H = H_n = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n} \overset{(k)i}{x} = -L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n} D^k_t x^i =$$

$$= -L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D^l_t (\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}) D^k_t x^i \quad \overset{(k)i}{x} = D^k_t x^i,$$

где D^k_t – оператор k- кратного полного дифференцирования по времени *t*, называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) ранга *n* этого преобразования для функции Лагранжа $L:T^pX_m \to \Re$, а также энергией системы, состояние которой описывается функцией $L:T^pX_m \to \Re$ в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения T^pX_m.

В дальнейшем будет доказано, что при $p \le n$ энергия системы является тензором нулевого ранга, то есть не зависит от выбора локальной системы координат (x) в базе X_m расслоения T^pX_m, а при $p > n$, вообще говоря, зависит от локальных координат и, таким образом, не сохраняется при замене локальной системы координат в базе X_m расслоения T^pX_m.

Замечание 1. Максимальный порядок производной по *t* порядка l в $p^i_k(n)$ равен $l + l + k = 2 \cdot l + k$.

Если $l + k > p$, то $\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и, значит, коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, следовательно, при определении максимального порядка производной по *t* можно считать $l + k \le p$ (в частности, $k \le p$). Кроме того,

$l \le n-k \Leftrightarrow l+k \le n \Rightarrow l+k \le \min(n,p) \Rightarrow l \le \min(n,p) - k \Rightarrow 2\cdot l + k \le 2\cdot(\min(n,p)-k)+k =$

$= 2\cdot\min(n,p) - 2\cdot k + k = 2\cdot\min(n,p) - k$, $p^i_{k,n}$ зависит от производных порядка

$\max(2\min(p,n)-k, p) = b(n,p,k)$, $b(n, n=n, k) = b(n, p=n, k) = \max(2\min(n,n)-k, p)$.

Для каждого слагаемого вида $p^i_{k,n} \overset{(k)i}{x} = p^i_{k,n} \overset{(k)i}{x}$ – произведения импульса порядка k на производную того же порядка по *i*-й координате – справедливо $\max(\max(2\min(p,n)-k, p), k) = \max(2\min(p,n)-k, p, k)$. Энергия системы

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n} \overset{(k)i}{x} = -L(x,..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n} \overset{(k)i}{x}$$

будет зависеть от максимального порядка производной

$$\max_{1\le k\le n}(2\min(p,n)-k, p, k) = a(n,p) = \max_{1\le k\le n}(b(n,p,k), k).$$

На основании этого можно записать

$$H(x,\dot{x}..., \overset{(a(n,p))}{x}) = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x,\dot{x}..., \overset{(b(n,p,k))}{x}) \overset{(k)i}{x} = -L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x,\dot{x}..., \overset{(b(n,p,k))}{x}) D^k_t x^i == -L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D^l_t (\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}) D^k_t x^i.$$

Теорема [9](дифференциальная связь импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков). Пусть $L:T^nX_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа, $L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})$, $p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})$, $p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k+1)}{x})$ -локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ и $(k-1)$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^PX_m. Тогда

$$D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k+1)}{x}).$$

Где $p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})$ - импульс k-ого порядка

$p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k+1)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-(k-1)}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k-1)i}})$ -импульс (k-1) –ого порядка

Теорема 4. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_m)$ $S:(\bar{x})\to(x)$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^pX_m, p\geq \max(s,l)$ $i=\overline{1,m}$, тогда справедливо тождество

$$D^k_t x^i(\bar{x}) = \overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C^{s-1}_{k-1} D^{k-s}_t (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\,\overset{(s)j}{\bar{x}}, C^s_l = \frac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l! = \prod_{k=1}^{l} k, l\geq s \qquad (1)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по порядку производной k.

База индукции k=1,имеем:

$x = (x^1, x^2,\ldots, x^m), \bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2,\ldots, \bar{x}^m)$

$$D^1_t x^i = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^j = \sum_{j=1}^{m} C^{1-1}_{1-1} D^{1-1}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \quad \text{по определению считаем } C^0_0 = 1 \qquad (2)$$

k=2: $D^2_t x^i = D^1_t \dot{x}^i = D^1_t(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^j) = \sum_{j=1}^{m} D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\dot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D^1_t \dot{\bar{x}}^j =$

$$= \sum_{j=1}^{m} D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\dot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\ddot{\bar{x}}^j = \sum_{j=1}^{m} C^{1-1}_{2-1} D^{2-1}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\,\overset{(1)j}{\bar{x}} + \sum_{j=1}^{m} C^{2-1}_{2-1} D^{2-2}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\,\overset{(2)j}{\bar{x}}. \qquad (3)$$

k=3:

$$D^3_t x^i = D^1_t \ddot{\bar{x}}^i = D^1_t(\sum_{j=1}^{m} D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\dot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\ddot{\bar{x}}^j) = \sum_{j=1}^{m} D^2_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\dot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^{m} D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\ddot{\bar{x}}^j +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\dot{\bar{x}}^j+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\dddot{\bar{x}}^j=\sum_{j=1}^{m} D_t^2\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\dot{\bar{x}}^j+2\sum_{j=1}^{m} D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\ddot{\bar{x}}^j+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\dddot{\bar{x}}^j=$$

$$=\sum_{j=1}^{m} C_{3-1}^{3-1}D_t^{3-1}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(1)j}{x}+\sum_{j=1}^{m} C_{3-1}^{3-2}D_t^{3-2}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(2)j}{x}+\sum_{j=1}^{m} C_{3-1}^{3-3}D_t^{3-3}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(3)j}{x}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(C_{3-1}^{3-1}D_t^{3-1}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(1)j}{x}+C_{3-1}^{3-2}D_t^{3-2}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(2)j}{x}+C_{3-1}^{3-3}D_t^{3-3}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(3)j}{x}\right) \qquad (4)$$

k=4:

$$D_t^4 x^i = D_t^1\dddot{\bar{x}}^i = D_t^1\left(\sum_{j=1}^{m} D_t^2\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\dot{\bar{x}}^j+2\sum_{j=1}^{m} D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\ddot{\bar{x}}^j+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\dddot{\bar{x}}^j\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(D_t^3\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\dot{\bar{x}}^j+D_t^2\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\ddot{\bar{x}}^j+2\left(D_t^2\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\ddot{\bar{x}}^j+D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\dddot{\bar{x}}^j\right)+D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\dddot{\bar{x}}^j+\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\ddddot{\bar{x}}^j\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(D_t^3\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\dot{\bar{x}}^j+3D_t^2\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\ddot{\bar{x}}^j+3D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\dddot{\bar{x}}^j+\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\ddddot{\bar{x}}^j\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(C_{4-1}^{4-1}D_t^{4-1}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(1)j}{x}+C_{4-1}^{4-2}D_t^{4-2}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(2)j}{x}+C_{4-1}^{4-3}D_t^{4-3}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(3)j}{x}+C_{4-1}^{4-4}D_t^{4-4}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(4)j}{x}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(C_3^3D_t^3\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(1)j}{x}+C_3^2D_t^2\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(2)j}{x}+C_3^1D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(3)j}{x}+C_3^0D_t^0\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(4)j}{x}\right)/ \qquad (5)$$

Формулы (2)-(5) являются частными случаями формулы (1) при k=1,2,3,4 соответственно.

Индуктивный переход: по предположению индукции считаем справедливость формулы

$$D_t^k x^i(\bar{x}) = \overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x}$$

Докажем, что $D_t^{k+1}x^i(\bar{x}) = \overset{(k+1)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k+1} C_{k+1-1}^{s-1}D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k+1} C_{k}^{s-1}D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x}$

$$D_t^{k+1}x^i(\bar{x}) = D_t\overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = D_t\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1}D_t\left(D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\right)\overset{(s)j}{x}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)D_t\overset{(s)j}{x} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1}D_t^{k+1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s+1)j}{x} \qquad (6)$$

В правой части формулы (6) сделаем замену:

$$s = g-1, g = s+1, s-1 = g-2\ , k-s = k+1-g$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{x}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=2}^{k+1}C_{k-1}^{g-2}D_t^{k+1-g}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(g)j}{x} \qquad (7)$$

В формуле (7) меняем индекс суммирования g на s:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=2}^{k+1}C_{k-1}^{g-2}D_t^{k+1-g}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(g)j}{x}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=2}^{k+1}C_{k-1}^{s-2}D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=2}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=2}^{k}C_{k-1}^{s-2}D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}+$$

$$+C_{k-1}^{1-1}D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(1)j}{x}+C_{k-1}^{k+1-2}D_t^{k+1-(k+1)}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(k+1)j}{x}=\sum_{s=2}^{k}(C_{k-1}^{s-1}+C_{k-1}^{s-2})D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}+$$

$$+C_{k-1}^{0}D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(1)j}{x}+C_{k-1}^{k-1}D_t^{0}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(k+1)j}{x} \qquad (8)$$

Так как

$$C_{k-1}^{s-1}+C_{k-1}^{s-2}=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-1-(s-1))!}+\frac{(k-1)!}{(s-2)!(k-1-(s-2))!}=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}+\frac{(k-1)!}{(s-2)!(k+1-s)!}=$$

$$=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}+\frac{(k-1)!}{\frac{(s-1)!}{(s-1)}(k-s)!(k+1-s)}=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}(1+\frac{s-1}{k+1-s})=$$

$$=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}(\frac{k+1-s+s-1}{k+1-s})=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}\frac{k}{k+1-s}=\frac{k!}{(s-1)!(k+1-s)!}$$

то $$C_{k-1}^{s-1}+C_{k-1}^{s-2}=C_{k}^{s-1}=\frac{k!}{(s-1)!(k+1-s)!} \qquad (9)$$

Учитывая (9) в правой части (8) $\sum_{s=2}^{k}(C_{k-1}^{s-1}+C_{k-1}^{s-2})D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}+C_{k-1}^{0}D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(1)j}{x}+$

$$+C_{k-1}^{k-1}D_t^{0}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(k+1)j}{x}=\sum_{s=2}^{k}C_{k}^{s-1}D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}+D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(1)j}{x}+D_t^{0}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(k+1)j}{x}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k+1}C_{k+1-1}^{s-1}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}.$$ **Теорема 4** доказана.

Замечание 2. Формула (1) заменой $s_1 = s-1,\quad s = s_1+1, k-s = k-1-s_{1,}\quad k-1\ge s_1\ge 0$

$$D_t^k x^i(\bar x) = \overset{(k)i}{x}(\bar x) = \sum_{j=1}^m\sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right)\overset{(s)j}{\bar x}\ ,C_l^s = \frac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l! = \prod_{k=1}^l k, l\ge s$$

может быть представлена в виде

$$D_t^k x^i(\bar x) = \overset{(k)i}{x}(\bar x) = \sum_{j=1}^m\sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right)\overset{(s)j}{\bar x} = \sum_{j=1}^m\sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^{s} D_t^{k-1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right)\overset{(s+1)j}{\bar x}\ .$$

Математическая постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу:

Пусть $L: T^n X_m \to \Re$. $L(x,\dots,\overset{(n)}{x})$, $p_i^k(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})$-локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$.

Исследовать закон преобразования энергии

$$H = H_n = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot x\dots,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x} = -L(x,\dots,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^m p_{k,n}^i D_t^k x^i$$

$\overset{(k)i}{x} = D_t^k x^i$ ранга n при замене локальной системы координат $x = x(\bar x)$ в базе X_m расслоения скоростей $T^n X_m$.

$x = (x^1, x^2,\dots,x^m)$, $\quad \bar x = (\bar x^1, \bar x^2,\dots,\bar x^m)$ $\qquad \bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x}) = L(x(\bar x), D_t x(\bar x),\dots,D_t^n x(\bar x))$, где

$p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)$ - импульс k-ого порядка.

По теореме о сложной функции $\quad \frac{\partial L(x(\bar x),\dot x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial x^{(l+k)i}} = \sum_{p=0}^n\sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(p)j}{\bar x}}\frac{\partial\, \overset{(p)j}{x(\bar x)}}{x^{(l+k)i}}$.

Функции Гамильтона в новых и старых координатах преобразуется как:

$$\bar H_n(\bar L,\bar x) = \bar H(\bar L,\bar x,n) = -\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x}) + \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^m \bar p_{k,n}^i\overset{(k)i}{\bar x} = -\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x}) + \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^m \bar p_{k,n}^i\overset{(k)i}{\bar x} =$$

$$= -\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x}) + \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^m\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \bar x^{(l+k)i}}\right)\overset{(k)i}{\bar x} \qquad (10)$$

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x(\bar x),\dot x(\bar x)\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x)) + \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^m p_{k,n}^i\overset{(k)i}{x} = -L(x(\bar x),\dot x(\bar x)\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x)) + \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^m p_{k,n}^i\overset{(k)i}{x} =$$

$$= -L(x(\bar{x}), D_t x(\bar{x}), ..., D_t^n x(\bar{x})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x(\bar{x}), \dot{x}(\bar{x}), ..., \overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial x^{(l+k)i}}) \overset{(k)i}{x} =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}} ..., \overset{(n)}{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l (\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}} ..., \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} \frac{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}{\partial x^{(l+k)i}}) \overset{(k)i}{x} \tag{11}$$

По **теореме 1** выполнено равенство

$$\frac{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}(x, \dot{x} ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}} = \begin{cases} C_p^{l+k} \cdot D_t^{p-(l+k)} (\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i}), C_p^{l+k} = \frac{p!}{(l+k)! \cdot (p-(l+k))!}, g! = \prod_{k=1}^{g} k, p \geq l+k \\ 0, p < l+k \end{cases} \tag{12}$$

По **теореме 4** $\overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^g}) \overset{(s)g}{\bar{x}}, C_l^s = \frac{l!}{s! \cdot (l-s)!}, l! = \prod_{k=1}^{l} k, l \geq s$ (13)

Учитывая (12) и (13) в (11) получим

$$-\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}} ..., \overset{(n)}{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l (\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}} ..., \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} \frac{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}{\partial x^{(l+k)i}}) \overset{(k)i}{x} = -\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}} ..., \overset{(n)}{\bar{x}}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l (\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}} ..., \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} C_p^{l+k} \cdot D_t^{p-(l+k)} (\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i})(\bar{x}))(\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^g}) \overset{(s)g}{\bar{x}}) \tag{14}$$

Применяя к (14) формулу Лейбница

$$D_t^a(fg) = \sum_{b=0}^{a} C_a^b D_t^b(f) D_t^{a-b}(g), \ C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}, b! = \prod_{c=1}^{b} c, a \geq b$$

$$-\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}} ..., \overset{(n)}{\bar{x}}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l (\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}} ..., \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} C_p^{l+k} \cdot D_t^{p-(l+k)} (\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i})(\bar{x})) \cdot (\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^g}) \overset{(s)g}{\bar{x}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}\sum_{a=1}^{l}(-1)^l C_p^{l+k} C_{k-1}^{s-1} C_l^a D_t^a (\frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}} ..., \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}) D_t^{p-(l+k)+l-a}((\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i})(\bar{x})) D_t^{k-s} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^g}) \overset{(s)g}{\bar{x}} =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}\sum_{a=1}^{l}(-1)^{l}C_{p}^{l+k}C_{k-1}^{s-1}C_{l}^{a}D_{t}^{a}\left(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(p)j}{\bar{x}}}\right)D_{t}^{p-k-a}\left(\left(\frac{\partial\bar{x}^{j}(x)}{\partial x^{i}}\right)(\bar{x})\right)D_{t}^{k-s}\left(\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{g}}\overset{(s)g}{\bar{x}}\right)\quad(15)$$

Установить связь между соотношениями (10) и (14) или эквивалентным (14) выражению (15) является целью данной работы.

Теорема 5 (о дифференциальной связи энергии ранга n с импульсами 0-ого порядка ранга n) . Пусть $L:T^{n}X_{m}\to\Re$ $L(x,...,\overset{(n)}{x})$, $p_{i,n}^{k}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$ -локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_{m} расслоения $T^{n}X_{m}$. $k=\overline{1,n}$ $i=\overline{1,m}$,

$$H=H_{n}=H_{n}(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}\overset{(k)i}{x}=-L(x,...,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}D_{t}^{k}x^{i}$$

- энергия системы, состояние которой описывается функцией $L:T^{n}X_{m}\to\Re$ в локальной системе координат (x) в базе X_{m} расслоения $T^{n}X_{m}$. Тогда

$$D_{t}(H_{n}(L,x,n)+L(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}))=D_{t}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}\overset{(k)i}{x}\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p_{0,n}^{i}\overset{,i}{x}\qquad(16)$$

Где: $p_{0,n}^{i}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^{l}D_{t}^{l}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+k)i}}\right)$ - импульс 0-ого порядка $\overset{,i}{x}=\overset{(1)i}{x}=D_{t}x^{i}$.

Доказательство.

$$D_{t}(H_{n}(L,x,n)+L(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}))=D_{t}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}\overset{(k)i}{x}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}D_{t}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}D_{t}\overset{(k)i}{x}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}\overset{(k+1)i}{x}\qquad(17)$$

Во второй части (15) сделаем замену $l=k+1,\quad k=l-1,\quad n+1\geq l\geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i})\overset{(k)i}{x}+\sum_{l=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p_{l-1,n}^{i}\overset{(l)i}{x}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p_{k-1,n}^{i}\overset{(k)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{1,n}^{i})\overset{(1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p_{k-1,n}^{i}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{1,n}^{i})\overset{(1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p_{n,n}^{i}\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k-1,n}^{i}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{1,n}^{i})\overset{(1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p_{n,n}^{i}\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}(D_{t}(p_{k,n}^{i})+p_{k-1,n}^{i})\overset{(k)i}{x}\qquad(18)$$

По теореме 3 $D_{t}(p_{k,n}^{i})=\dfrac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}-p_{k-1,n}^{i}$, поэтому $D_t(p^i_{k,n}) + p^i_{k-1,n} = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}$ (19)

При $k=1$: $D_t(p^i_{1,n}) + p^i_{1-1,n} = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(1-1)i}{x}}$ $\qquad D_t(p^i_{1,n}) = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i} - p^i_{0,n}$ (20)

$$p^i_{n,n} = \sum_{l=0}^{n-n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+n)i}}\right) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}} \qquad (21)$$

Преобразуем (18), учитывая (19),(20),(21)

$$\sum_{i=1}^m D_t(p^i_{1,n})\overset{(1)i}{x} + \sum_{i=1}^m p^i_{n,n}\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{k=2}^n\sum_{i=1}^m \left(D_t(p^i_{k,n}) + p^i_{k-1,n}\right)\overset{(k)i}{x} = \sum_{i=1}^m D_t(p^i_{1,n})\overset{(1)i}{x} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\overset{(n+1)i}{x} +$$

$$+\sum_{k=2}^n\sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} = \sum_{i=1}^m D_t(p^i_{1,n})\overset{(1)i}{x} + \sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i} - p^i_{0,n}\right)\overset{(1)i}{x} +$$

$$+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i}\overset{(1)i}{x} - \sum_{i=1}^m p^i_{0,n}\overset{(1)i}{x} + \sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} - \sum_{i=1}^m p^i_{0,n}\overset{(1)i}{x} = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} - \sum_{i=1}^m p^i_{0,n}\dot{x}^i .$$

Теорема 5 доказана.

Замечание 3. Первая сумма в правой части (16) заменой $k_1 = k-1, k = k_1+1,\ \ n \ge k_1 \ge 0$ может быть представлена в виде

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} .$$

Тогда имеет место следующая простая **теорема 6**.

Теорема 6. Обозначим векторы старых и новых координат в базе расслоенного пространства скоростей $x = (x^1, x^2, \dots, x^m), \bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m)$. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ $S:(\bar{x}) \to (x)$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка T^pX_m $i,k = \overline{1,m}$, $S^{-1}:(x)\to(\bar{x})$-обратное отображение, тогда

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k} = \delta^i_k \qquad \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} = \delta^i_k \qquad \delta^k_i = \begin{cases}1, i=k\\ 0, i\ne k\end{cases} - символКронекера \qquad (22)$$

Доказательство. $x^i = x^i(\overline{x}^1(x), \overline{x}^2(x), ..., \overline{x}^m(x))$. По теореме о сложной функции

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta^i_k = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial \overline{x}^j(x)}{\partial x^k}$$ аналогично доказывается равенство

$$\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \overline{x}^k} = \delta^i_k = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \overline{x}^i(x)}{\partial x^j} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \overline{x}^k}$$

Теорема 6 доказана.

Докажем, что каждая из сумм в формуле (16) является геометрическим инвариантом, то есть не зависит от выбора локальной системы координат (x) в базе X_m расслоения скоростей $T^n X_m$. Имеет место следующая

Теорема 7 (об инвариантах G_1, G_2). Пусть $L: T^n X_m \to \Re$ $L(x, ..., \overset{(n)}{x})$, $p^k_{i,0}(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x})$ - локальная запись функции L и импульсов $0-ого$ порядка при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$. $i = \overline{1,m}$. Тогда функции

$$G_1(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} \overset{(k)i}{x} \text{ и } G_2(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) = \sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n}(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) \dot{x}^i \tag{23}$$

$$p^i_{0,n} = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}\right)$$ - импульс 0-ого порядка $\overset{,i}{x} = \overset{(1)i}{x} = D_t x^i$

при замене локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ преобразуется как тензоры 0-го ранга, то есть не зависят от выбора локальных координат (являются геометрическими инвариантами).

Доказательство. По теореме о сложной функции $\overset{,i}{x} = \overset{(1)i}{x} = D_t x^i(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \overline{x}^k} \dot{\bar{x}}^k$.

По теореме 2 импульсы 0-ого порядка ранга n преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы):

$$p^i_0(n)(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} \overline{p^j_0}(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) \cdot \frac{\partial \overline{x}^j(x)}{\partial x^i}$$. Подставим это равенство в

$$G_2(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) = \sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n} \dot{x}^i$$

$$G_2(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) = \sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n}(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) \dot{x}^i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \overline{p^j_0}(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) \cdot \frac{\partial \overline{x}^j(x)}{\partial x^i}\right) \dot{x}^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \overline{p^j_0}(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) \cdot \frac{\partial \overline{x}^j(x)}{\partial x^i} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \overline{x}^k} \dot{\bar{x}}^k = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} \overline{p^j_0}(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) \cdot \dot{\bar{x}}^k\right) \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \overline{x}^j(x)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \overline{x}^k} =$$

$$=\sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{m}\overline{p_0^j}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\dot{\bar{x}}^k)\delta_k^j=\sum_{j=1}^{m}\overline{p_0^j}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\dot{\bar{x}}^j=\bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) \qquad (24)$$

где $\delta_i^k=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases}-\textit{символ Кронекера}$

Для n=1 преобразуем сумму:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}\overset{(25)}{=}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}\dot{x}^i+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^i}\ddot{x}^i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}+\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial\dot{\bar{x}}^k}{\partial x^i})\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial\dot{\bar{x}}^k}{\partial\dot{x}^i}\ddot{x}^i\overset{(26)}{=}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}+\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}D_t(\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}))\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}(D_t(\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l})\dot{\bar{x}}^l+\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}D_t(\dot{\bar{x}}^l))\overset{(27)}{=}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l+\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\ddot{\bar{x}}^l)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^l(D_t(\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l})\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}+D_t(\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i})\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l})=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^k}\delta_l^k\dot{\bar{x}}^l+\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\delta_l^k\ddot{\bar{x}}^l)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^l(D_t(\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}))=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^k}\dot{\bar{x}}^k+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x}\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\ddot{\bar{x}}^k+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^l D_t(\delta_l^k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^k}\dot{\bar{x}}^k+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\ddot{\bar{x}}^k=\bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}}) \qquad (28)$$

$D_t(\delta_l^k)=0,\ \delta_i^k=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases}-\textit{символ Кронекера}$

Теорема 7 доказана для n=1. Отметим, что

в формулах (27),(28) была применена теорема 6

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}=\delta_i^k=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases}-\textit{символ Кронекера}$$

В формулах(25),(26) была также использована теорема 1:

$$\frac{\partial\dot{x}^k}{\partial\dot{\bar{x}}^i}=\frac{\partial\overset{(1)k}{x}}{\partial\overset{(1)i}{\bar{x}}}=C_1^1\cdot D_t^{1-1}\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}=1\cdot D_t^0\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}=\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}$$

$$\frac{\partial \dot{x}^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \overset{(1)k}{x}}{\partial \overset{(0)i}{\bar{x}}} = C_1^0 \cdot D_t^{1-0} \cdot \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = 1 \cdot D_t^1 \cdot \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = D_t \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \frac{\partial D_t^0 x^k(\bar{x})}{\partial D_t^1 \bar{x}^i} = \frac{\partial \overset{(0)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(1)i}{\bar{x}}} = \delta_1^0 \cdot \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = 0$$

Рассмотрим общий случай.

$$G_1(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}\ \overset{(n+1)}{x}) = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} \overset{(k)i}{x} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \overset{(k+1)i}{x}.$$

По теореме 4 $D_t^k x^i(\bar{x}) = \overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^{s} D_t^{k-1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}}$

$$D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) = \overset{(k+1)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k+1-1} C_{k+1-1}^{s} D_t^{k+1-1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}}$$

Поэтому $\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \overset{(k+1)i}{x} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}}\right)$ (29)

$\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, ..., \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} \frac{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}{\partial \overset{(k)i}{x}}$. По **теореме 1** выполнено равенство (30)

$$\frac{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} = \begin{cases} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right), C_p^k = \frac{p!}{k!\cdot(p-k)!}, k! = \prod_{g=1}^{k} g, p \ge k \\ 0, p < k \end{cases} \tag{31}$$

Подставим (31) в (30):

$$\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} = \sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, ..., \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right) \tag{32}$$

а полученный результат (32) подставим в (29)

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \overset{(k+1)i}{x} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}}\right) =$$

$$\overset{(33)}{=} \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, ..., \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right)\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}}\right) =$$

Так как $\overset{(s+1)j}{x} = D_t^s(\overset{(1)j}{x}) = D_t^s(\overset{.j}{x})$ $\quad C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{x} = C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) D_t^s(\overset{(1)j}{x})$ и

$D_t^a(fg) = \sum_{b=0}^{a} C_a^b D_t^b(f) D_t^{a-b}(g)$, $C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}$, $b! = \prod_{c=1}^{b} c$, $a \geq b$ (формула Лейбница), то

$$\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{x} = \sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) D_t^s(\overset{(1)j}{x}) = D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t^1(\bar{x}^j)) = D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) =$$

$$= D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{.j}{x}) \tag{34}$$

Далее подставляем (34) в (33):

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{x}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m} D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})) \tag{35}$$

Так как $\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n} a_{kp} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} a_{kp}$, то сумму в (35) запишем в эквивалентном виде:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m} D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=0}^{p}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m} D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{d=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m} D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}) D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) \tag{36}$$

По формуле Лейбница: $\sum_{k=0}^{p} C_p^k \cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}) D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) = D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})$.

Поэтому

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}) D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) =$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\sum_{j=1}^{m}D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\sum_{i=1}^{m}D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) \quad (37)$$

Преобразуем последнюю сумму в формуле (37):

$$\sum_{i=1}^{m}D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) = D_t^p(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) \qquad (38)$$

По теореме 6 $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = \delta_j^d \quad \delta_j^d = \begin{cases}1, d = j\\ 0, d \neq j\end{cases} - \textit{символ Кронекера}$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x} = \overset{(1)j}{x}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = \overset{(1)j}{x}\,\delta_j^d,$$ значит,

$$D_t^p(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) = D_t^p(\overset{(1)j}{x}\,\delta_j^d) \qquad (39)$$

Подставляем полученное выражение (39) в сумму (37):

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\sum_{i=1}^{m}D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}D_t^p(\overset{(1)j}{x}\,\delta_j^d) =$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}D_t^p(\overset{(1)j}{x}\,\delta_j^d) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}D_t^p(\overset{(1)j}{x}) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}D_t^{p+1}(\bar{x}^j) =$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\overset{(p+1)j}{x} = \bar{G}_1(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) \ .$$

Этот результат может быть получен и другим способом:

$$C_p^k C_k^s = \frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{k!}{s!(k-s)!} = \frac{p!}{k!(p-k)!s!(k-s)!} = \frac{p!}{s!(p-s)!}\frac{(p-s)!}{(k-s)!(p-s-(k-s))!} = C_p^k C_{p-s}^{p-k}$$

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!},\ p! = \prod_{c=1}^{p} c,\ p \geq k \ .$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{x}) =$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}C_p^s\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_{p-s}^{k-s}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{x}) \overset{(40)}{=}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n}C_p^s\cdot\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}(\sum_{s=0}^{n}\overset{(s+1)j}{x}\sum_{k=s}^{p}C_{p-s}^{k-s}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i})) \qquad (41)$$

При замене пределов суммирования в (41) было использовано, что $n \ge p \ge k \ge s$. В последней сумме в (41) сделаем замену
$u = k - s,\ 0 \le u \le k - s, p - k = p - s - (k - s) = p - s - u$, применим формулу Лейбница
$D_t^{p-s}(fg) = \sum_{u=0}^{p-s} C_{p-s}^u D_t^u(f) D_t^{p-s-u}(g)$, $C_{p-s}^u = \frac{(p-s)!}{u!(p-s-u)!}$, $u! = \prod_{c=1}^{u} c$, $p - s \ge u$

и теорему 6 $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i} = \delta_j^d$, $\quad \delta_j^d = \begin{cases} 1, d = j \\ 0, d \ne j \end{cases}$ $-$ *символ Кронекера*

$$\sum_{k=s}^{p} C_{p-s}^{k-s} D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}) = \sum_{u=0}^{p-s} C_{p-s}^u D_t^u(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) D_t^{p-s-u}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}) = D_t^{p-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}) =$$
$$= D_t^{p-s}(\delta_j^d) = \begin{cases} 1, d = j \ \text{и} \ \ p = s \\ 0, d \ne j \ \text{или} \ \ p \ne s \end{cases} = \delta_j^d \delta_p^s, \qquad \delta_p^s = \begin{cases} 1, p = s \\ 0, p \ne s \end{cases} - \textit{символ Кронекера} \tag{42}$$

Равенство (42) получено на основании того, что
$$\delta_j^d = \begin{cases} 1, d = j \\ 0, d \ne j \end{cases} = const \text{ и } D_t^{p-s}(const) = \begin{cases} const, p - s > 0 \\ 0, p - s = 0 \end{cases} \tag{43}$$
(производная от постоянной равна 0, если ее порядок больше 0 и равна постоянной, если порядок равен 0).

Подставляем полученный результат (42) в (41)
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^s \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} (\sum_{s=0}^{n} \overset{(s+1)j}{\bar{x}} \sum_{k=s}^{p} C_{p-s}^{k-s} D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i})) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^s \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} (\sum_{s=0}^{n} \overset{(s+1)j}{\bar{x}} \sum_{k=s}^{p} \delta_j^d \delta_p^s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^s \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} (\sum_{s=0}^{n} \overset{(s+1)j}{\bar{x}} \delta_j^d \sum_{k=s}^{p} \delta_p^s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^s \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} (\sum_{s=0}^{n} \overset{(s+1)j}{\bar{x}} \delta_j^d \sum_{k=s}^{p} \delta_p^{s=p}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^p \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} (\sum_{s=0}^{n} \overset{(p+1)j}{\bar{x}} \delta_j^d) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^p \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} (\sum_{s=0}^{n} \overset{(p+1)j}{\bar{x}} \delta_j^{d=j}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^p \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} \overset{(p+1)j}{\bar{x}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} \overset{(p+1)j}{\bar{x}} == \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}).$$ **Теорема 7** доказана.

Теорема 8 (инвариантность функции Гамильтона (энергии) относительно замены координат). Пусть функция Лагранжа $L: T^n X_m \to \Re$ - гладкая функция.

$L(x,...,\overset{(n)}{x})$, $p^k_{i,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$, $H_n(L,x)$-локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$.

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^k_{i,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}$$

$\bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})$, $\overline{p^j_{k,n}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2\bar{n}-k)}{x})$, $\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x})$-локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат $(\bar{x})$ в базе X_m расслоения $T^n X_m$.

$$\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x}) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overline{p^j_{k,n}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2\bar{n}-k)}{x})\overset{(\bar{k})i}{x}$$

Тогда $H(L,x,n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$ Энергия системы - тензор 0-ого ранга (не зависит от выбора локальных координат, то есть является инвариантным геометрическим объектом)

Доказательство. Рассмотрим

$L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})...,\overset{(n)}{x}(\bar{x})) = \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})$, где $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ - невырожденная замена координат в базе X_m расслоения $T^n X_m$.

$$D_t(H(L,x,n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = D_t(-L(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^k_{i,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x} + \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}}) -$$
$$-\sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_{k,n}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2\bar{n}-k)}{x})\overset{(\bar{k})i}{x}) = D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^k_{i,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x} - \sum_{j=1}^{m}\overline{p^i_{k,n}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2\bar{n}-k)}{x})\overset{(\bar{k})i}{x}) =$$
$$= D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^k_{i,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}) - D_t(\sum_{j=1}^{m}\overline{p^i_{k,n}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2\bar{n}-k)}{x})\overset{(\bar{k})i}{x}) \tag{44}$$

По **теореме 5** преобразуем:

$$D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}) = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} - \sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n}\overset{,i}{x} = G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) - G_2(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x})$$

$$D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\overline{p^j_{k,n}}\overset{(\bar{k})i}{x}) = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(\bar{k}-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}\overline{p^i_{0,n}}\,\dot{\bar{x}}^l = \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) - \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})$$

$$D_t(H(L,x,n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}) - D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\overline{p^j_{k,n}}\overset{(\bar{k})i}{x}) = G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) -$$
$$-G_2(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x}) - (\bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) - \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})) = G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) - \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) -$$

$-G_2(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x}) - \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = 0 - 0 = 0$ так как по **теореме 7** о G_1, G_2 *инвариантах*

$G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) = \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})$, $\quad G_2(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x}) = \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})$

$D_t(H(L,x,n) - \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = D_t(H(L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})...,\overset{(n)}{x}(\bar{x})),S(\bar{x}),n) - \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = 0$ для любой невырожденной замены координат $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ - в базе X_m расслоения T^nX_m.
Значит,

$H(L,x,n) - \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) \equiv C = const$ для всех невырожденных замен координат $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ - в базе X_m расслоения T^nX_m.

Рассмотрим тождественное преобразование $x(\bar{x}) = S(\bar{x}) = \bar{x}$***:***

$H(L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})...,\overset{(n)}{x}(\bar{x})),S(\bar{x}),n) - \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) - \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = C = 0$.
Следовательно,
$\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$. **Теорема 8** доказана.

Замечание 4. Утверждение теоремы 8 справедливо и для функций $L : T^pX_m \to \Re \quad p \le n$. Так как при $p < n$ можно определить функцию $L_1 : T^nX_m \to \Re$, которая в любой локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m
$L_1(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}) \equiv L(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x})$ для любых $x^{(p+1)},...,\overset{(n)}{x}$. Для функции $L_1(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x})$ утверждение **теоремы 8** справедливо. Таким образом, доказана **Теорема 8**.

Теорема 9. (Инвариантность энергии относительно замены координат). Пусть $L : T^pX_m \to \Re$ - гладкая функция.

$L(x,...,\overset{(n)}{x})$, $p^k_{i,n}$, $H_n(L,x)$-локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^pX_m. $\quad H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^k_{i,n}\overset{(k)i}{x}$

$\bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})$, $\overline{p^j_{k,n}}$, $\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x})$-локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат $(\bar{x})$ в базе X_m расслоения T^pX_m.

$\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x}) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}}) + \sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_{k,n}}\overset{(k)i}{\bar{x}}$. Тогда $H(L,x,n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$.

Замечание 5. Для $n=1$ имеем $p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum\limits_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$,

$$p_1^i(1) = p_{1,1}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2\cdot1-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{1-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}\Big) = \frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x})}{\partial \overset{(1)i}{x}} = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i},$$

$$L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})) = \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}),$$

где $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ – невырожденная замена координат.

Для функции энергии произвольного ранга *n* можно написать

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}\dots,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\,\overset{(k)i}{x}$$

Тогда, в частности, для $n = 1$, получим

$$H_1(L,x) = H(L,x,1) = -L(x,\dot{x}) + \sum_{k=1}^{1}\sum_{i=1}^{m} p_{1,1}^i\,\overset{(1)i}{x} = -L(x,\dot{x}) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k(x)}{\partial \dot{x}^i} + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \dot{\bar{x}}^k(x)}{\partial \dot{x}^i}\Big)\dot{x}^i = -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l = -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\delta_l^k\dot{\bar{x}}^l = -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^k =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\overline{p_{1,1}^k}\,\dot{\bar{x}}^k = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},1) = \bar{H}_1(\bar{L},\bar{x}), \qquad (42)$$

где $\delta_k^l = \begin{cases}1, k=l\\ 0, k\neq l\end{cases}$ – символ Кронекера,

то есть энергия порядка $n = 1$ является инвариантом относительно невырожденной замены координат.

В выражении (42) была использована **теорема 1**:

$$\frac{\partial x^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \frac{\partial D_t^0 x^k(\bar{x})}{\partial D_t^1\bar{x}^i} = \frac{\partial \overset{(0)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(1)i}{\bar{x}}} = 0 \text{ (так как } 0<1), \quad \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \frac{\partial \overset{(1)k}{x}}{\partial \overset{(1)i}{\bar{x}}} = C_1^1\cdot D_t^{1-1}\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = 1\cdot D_t^0\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

Таким образом, основная **теорема 9** проверена для $n=1$.

Для $n=2$ с невырожденной заменой координат $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ имеем

$$L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x}),\ddot{x}(\bar{x})) = \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}}),$$

$$p_1^i(2) = p_{1,2}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2\cdot2-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{2-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x},\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}\Big) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} - D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}\Big),$$

$$p_2^i(2) = p_{2,2}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2\cdot2-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{2-2}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x},\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+2)i}{x}}\Big) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}.$$

$$H_2(L,x)+L(x,\dot x,\ddot x)=H(L,x,2)+L(x,\dot x,\ddot x)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,2}(x,\dots,\overset{(2\cdot 2-k)}{x})\overset{(k)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}((\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}-D_t(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \ddot x^i}))\dot x^i+$$

$$+\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \ddot x^i}\ddot x^i)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}C_2^1D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i})-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}))\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\dot{\bar x}^j+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}(D_t(\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j})\dot{\bar x}^j+\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\ddot{\bar x}^j)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i})-$$

$$-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k})\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i})\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\dot{\bar x}^j+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}(D_t(\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j})\dot{\bar x}^j+\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\ddot{\bar x}^j)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\dot{\bar x}^j+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\ddot{\bar x}^j)\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k})\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\dot{\bar x}^j+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\dot{\bar x}^j(D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i})\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}+\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}D_t(\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}))=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(((\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}))\dot{\bar x}^j+$$

$$+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\ddot{\bar x}^j)\delta^k_j+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\ddot{\bar x}^j D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}))=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}))\dot{\bar x}^k+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\ddot{\bar x}^k=$$

$$=\bar H(\bar L,\bar x,2)+\bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x}),$$

где $D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j})=D_t(\delta^k_j)=0$, $\delta^k_j=\begin{cases}1, k=j\\ 0, k\neq j\end{cases}$ − символ Кронекера.

Таким образом, утверждение **теоремы 9** проверено для случая $n=2$.

Замечание 6. При $p>n$ энергия системы при замене локальных координат, вообще говоря, не сохраняется.

Рассмотрим случай $p=2,\ n=1$ (старший порядок производной выше ранга энергии).

$L(x(\bar x),\dot x(\bar x),\ddot x(\bar x))=\bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})$ с невырожденной заменой $x=x(\bar x)=S(\bar x)$.

$$H_1(L,x)=H(L,x,1)=-L(x,\dot x,\ddot x)+\sum_{k=1}^{1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x}=-L(x,\dot x,\ddot x)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}\dot x^i=$$

$$=-\bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \bar x^k}\frac{\partial \bar x^k(x)}{\partial \dot x^i}+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \dot{\bar x}^k(x)}{\partial \dot x^i}+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\frac{\partial \ddot{\bar x}^k(x)}{\partial \dot x^i}))\dot x^i=$$

$$=-\bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^l}\dot{\bar x}^l+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}C_2^1D_t^{2-1}(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i})\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^l}\dot{\bar x}^l=$$

$$= -\bar L(\bar x, \dot{\bar x}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \bar L(\bar x, \dot{\bar x}, \ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^l}\dot{\bar x}^l + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \bar L(\bar x, \dot{\bar x}, \ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k} C_2^1 D_t^{2-1}\left(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^l}\dot{\bar x}^l =$$

$$= -\bar L(\bar x, \dot{\bar x}, \ddot{\bar x}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \bar L(\bar x, \dot{\bar x}, \ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\delta_l^k \dot{\bar x}^l + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \bar L(\bar x, \dot{\bar x}, \ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k} C_2^1 D_t^{2-1}\left(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^l}\dot{\bar x}^l =$$

$$= -\bar L(\bar x, \dot{\bar x}, \ddot{\bar x}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \bar L(\bar x, \dot{\bar x}, \ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\dot{\bar x}^k \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \bar L(\bar x, \dot{\bar x}, \ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k} C_2^1 D_t^{2-1}\left(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^l}\dot{\bar x}^l =$$

$$= \bar H(\bar L, \bar x, 1) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \bar L(\bar x, \dot{\bar x}, \ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k} 2D_t\left(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^l}. \tag{43}$$

Таким образом, второе слагаемое в формуле (43), вообще говоря, не равно 0, препятствует сохранению энергии при невырожденной замене локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$. То есть при $p > n$ энергия системы при замене локальных координат не сохраняется.

Рассмотренные связи фундаментальных в физике и природе величин импульса и энергии подтверждают законы сохранения импульса, и энергии в зависимости от порядка старшей производной по времени от аргументов функции Лагранжа. Работа имеет непосредственное отношение к дифференциальной геометрии в векторных полях и их расслоениях, а также к таким приложениям, как теоретическая механика, теоретическая физика, квантовая механика, физика элементарных частиц. Доказана инвариантность энергии системы ранга *n*, состояние которой описывается гладкой функцией, определенной в расслоенном пространстве скоростей.

Литература:

1. В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко Современная геометрия. Методы и приложения, М.,1994,УРСС.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.:Гостехиздат, 1956
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.:Наука,1974.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.:Наука,1974.

5 Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц Теория поля. -М.:Наука.1973.507с.

6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц Механика. - М.:Наука.1973.507с.
7. Э. М. Галеев, В.М.Тихомиров Краткий курс теории экстремальных задач. - М.: Издательство МГУ 1989.203 с.
8. Дирак П.Лекции по квантовой механики - М. Мир, 1968.

9 Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков, Дифференциально-Геометрические структуры на многообразиях, Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом., 1979, том 9.

10. В.В.Трофимов, А.Т.Фоменко Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений. Издательство ”Факториал”, 1995.

TENSOR OF GENERAL ENERGY

Y. PASTUHOV , D. PASTUHOV, S. CHERNOV

Abstract We prove the invariance of energy of rank n of a system whose state is described by a smooth function defined in a stratified velocity space. $L : T^p X_m \to \Re \quad p \le n$.

$L(x,..., \overset{(n)}{x})$, $p^k_{i,n}$, $H_n(L,x)$ - a local function, momentum, and energy of rank n, respectively, when local coordinates (x) are chosen in the base X_m of the bundle $T^p X_m$.

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x, \dot{x}..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p^k_{i,n} \overset{(k)i}{x}$$

$\bar{L}(\bar{x},..., \bar{\overset{(n)}{x}})$, $\overline{p^j_{k,n}}$, $\bar{H}_n(\bar{L}, \bar{x})$ -a local function, impulse of order and energy of rank n, respectively, when choosing local coordinates (x) in the base X_m of the bundle $T^p X_m$.

Then $H(L,x,n) = \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n)$

УДК 514

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СОХРАНЯЮЩИЕ ВАРИАЦИОННУЮ ЗАДАЧУ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ,
канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ

В работе введено определение компоненты импульса вдоль струи и сохранение компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка n-1 на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа для групп преобразований, сохраняющих вариационную задачу, является прямым и естественным обобщением определения компоненты импульса первого ранга вдоль векторного поля (струи нулевого порядка), связанного с однопараметрической группой преобразований, сохраняющих функцию Лагранжа, зависящую от производных нулевого и первого порядков. Для экстремалей уравнения Эйлера-Лагранжа доказано свойство сохранения компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка n-1, связанной с группой преобразований, сохраняющей вариационную задачу со старшими производными:

$$D_t\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x))p_{k,n}^i\right)=0,$$

где $S:\Re\times X_m \to X_m$ $S_\tau : X_m \to X_m, \forall \tau \in \Re$ *- однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию* $L: T^n X_m \to \Re$*:*

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x),..., D_t^{(n)} S_\tau(x))\,|_{\tau=0} = 0 \;\; \forall x \in X_m$$

$j_x^{n-1}X^i(x) = (X^i(x), D_t^1 X^i(x), D_t^2 X^i(x),..., D_t^{n-1}X^i(x))$ *- струя порядка n-1, связанная, с группой преобразований* $S_\tau : X_m \to X_m,\;\; X^i(x) = \dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}\,|_{\tau=0} \quad i=\overline{1,m}$.

Ключевые слова: *уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, тензор энергии, тензор обобщенного импульса, невырожденная функция.*

Введение. Э. Галуа предложил классифицировать алгебраические уравнения по их группам симметрии. Ф. Клейн предложил взять идею симметрии в качестве единого принципа при построении различных геометрий. Выйдя за пределы геометрии, эта идея, развиваясь, сделала очевидным тот факт, что принцип симметрии служит той единственной основой, которая может объединить все разрозненные части огромного здания современной математики. Клейн развил свою концепцию в физике и механике. Программа Клейна как задача поиска различных форм симметрии выходит за рамки не только геометрии, но и всей математики в целом, превращается в проблему поиска единого принципа для всего естествознания. В 1872 году Феликс Клейн представил сенату Эрлангенского университета и философскому факультету этого университета своё «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», получившее название «Эрлангенской программы». Клейн рассматривает иерархию многообразий - пространств любого числа измерений и соответственных геометрий, положив в основу их определения понятия инварианта, введённое в математику за двадцать лет да этого. В элементарной геометрии преобразованиями, переходами от одних переменных к другим служат прежде всего движения, переносы и вращения геометрических фигур, когда сами фигуры, расстояния между образующими их точками не меняются. Пространство, в котором происходят подобные переносы, называется метрическим, его инвариант - расстояние, определённое, например, теоремой Пифагора: вводятся прямоугольные координаты, разности между старыми и новыми координатами переносимой точки рассматриваются как катеты прямоугольного треугольника, расстоянием между новым и старым положением точек становится гипотенуза этого треугольника, её квадрат равен сумме квадратов разностей координат. Это - инвариант Эвклидовой геометрии. Есть более сложные геометрии, где инвариантами служат иные выражения: в проективной геометрии инварианты - уже не расстояния между точками, не величина и форма геометрической фигуры, а только форма, - соотношения между расстояниями, треугольник при проективном преобразовании может стать меньше, по остается подобным себе. Содержание истории философии – преобразование самых общих понятий, самые радикальные изменения, охватывающие основные представления о мире и методы его познания».

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями.

Законы сохранения имеют важное значение не только в механике, но и в физике вообще. Научное и методологическое значение законов сохранения определяет их исключительная общность и универсальность. Благодаря той особой роли, которую играют законы сохранения в физике, они являются важнейшим элементом современной научной картины мира.

Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса и энергии в физической и математической постановке изложено в литературе [1–10, 12-16]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координат - времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения Эйлера – Лагранжа) [6]. Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии, либо импульса относительно данной координаты [7]. Представленная работа является продолжением работ [9, 10,13,16].

Постановка задачи и основные определения.

Пусть X_m - гладкое многообразие размерности m, $T^n X_m$ - гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m.

$L : T^n X_m \to \Re$ -невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$ [9].

Теорема 1[11]. Пусть $\overline{x}^i = S^i(x_1, x_2, ..., x_m)$ $S:(x) \to (\overline{x})$, - невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m, p \geq \max(s, l)$, $i = \overline{1, m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{x}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_l^s = \frac{l!}{s!(l-s)!}, l! = \prod_{k=1}^{l} k, l \geq s \\ 0, l < s \end{cases} \qquad (1)$$

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$

$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2\min(n,p)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ $\qquad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$ называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^pX_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения T^pX_m, где $L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^pX_m.

Функция $p_{k,n}^i$ называются $k-ой$ компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k-импульсами) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Функция $p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2\min(n,p)-k)}{x})$ называются $k-ой$ компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k-импульсами) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Замечание 1. Обобщенный импульс ранг n определен для функций $L: T^pX_m \to \Re$

Из определения $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ следует, что при $k > p, l \geq 0 \Rightarrow l+k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и все $p_k^i(n) \equiv 0$ (тривиальные импульсы), то есть для нетривиальных импульсов $k \leq p$. Поскольку $k \leq n, k \leq p \Rightarrow k \leq \min(n,p)$, то в определении2 можно считать, что $k = \overline{0,\min(n,p)}, i = \overline{1,m}$

Максимальный порядок производной по t в $p_k^i(n)$ равен $l+k+k = 2\cdot l + k$.

При $l+k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$, т.е. коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, значит, при определении максимального порядка производной по t можно считать $l+k \leq p$, кроме того:

$$l \leq n-k \Leftrightarrow l+k \leq n \Rightarrow l+k \leq \min(n,p) \Rightarrow l \leq \min(n,p)-k \Rightarrow 2\cdot l + k \leq 2\cdot(\min(n,p)-k)+k =$$

$$= 2\cdot\min(n,p) - 2\cdot k + k = 2\cdot\min(n,p) - k$$

Хотя более грубая оценка порядка старшей производной по t в $p_k^i(n)$ дает $l \leq n-k \Leftrightarrow l+k \leq n \Rightarrow 2\cdot l + k \leq 2\cdot(n-k)+k = 2\cdot n - 2\cdot k + k = 2\cdot n - k$.

При $p > n, l+k \le n-k+k=n$ максимальный порядок производной по t в $L(x,...,\overset{(p)}{x}))$ больше максимального порядка производной по t переменной, по которой производится частное дифференцирование в $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$.

При $p < n$, поскольку $l+k \le n-k+k=n$ при $l+k > p$ $\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и часть членов в сумме $\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ будет тождественно равна 0. Пограничным является случай $p=n$, именно тот случай будет рассмотрен в дальнейшем без ограничения общности рассмотрения.

При $p=n$ в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ получаем импульсы в преобразовании Остроградского:

$$p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) = \frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^i} - D_t(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \dot{x}^i}) + ... + (-1)^n D_t^n(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}})$$

нуль-импульс (функционал в уравнении Эйлера-Лагранжа).

Теорема2 [9] (дифференциальная связь импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков).

$L: T^n X_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа,. $L(x,...,\overset{(n)}{x})$, $p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$, $p_{k-1,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x})$ -локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ $и$ $(k-1)$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$.

Тогда $$D_t p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_{k-1,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x}), \qquad (2)$$

где $p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})$ - импульс k-ого порядка,

где $p_{k-1,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-(k-1)}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k-1)i}})$ - импульс (k-1) –ого порядка

Имеет место следующая:

Теорема 3 (о связи импульсов $k-ого$ порядка рангов n и $n+1$). Пусть $L: T^p X_m \to \Re$.

$L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})$- локальная запись функции $L: T^p X_m \to \Re$ при выборе локальных координат в базе расслоения X_m,

$$p_{k,n}^i=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)\quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$ -импульс k-ого порядка ранга n,

$$p_{k,n+1}^i=\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$$ - импульс k-ого порядка ранга n +1

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$p_{k,n+1}^i=p_{k,n}^i+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right) \tag{3}$$

Доказательство:

$$p_{k,n+1}^i=\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)+(-1)^{n+1-k}D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1-k+k)i}{x}}\right)=$$

$$=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)+(-1)^{n+1-k}D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)=p_{k,n}^i+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right).$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Обозначим координатные векторы $x=(x^1,x^2,...,x^m),\bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,...,\bar{x}^m)$. Пусть $x^i=S^i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_m)$ $S:(\bar{x})\to(x)$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка T^pX_m $i,k=\overline{1,m}$, $S^{-1}:(x)\to(\bar{x})$ -обратное отображение, тогда

$$\sum_{j=1}^m\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k}=\delta_k^i\qquad \sum_{j=1}^m\frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}=\delta_k^i\qquad \delta_i^k=\begin{cases}1,i=k\\0,i\neq k\end{cases}-символКронеккера \tag{4}$$

Доказательство. $x^i=x^i(\bar{x}^1(x),\bar{x}^2(x),...,\bar{x}^m(x))$. По теореме о сложной функции

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k}=\delta_k^i=\sum_{j=1}^m\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k}$$

Аналогично доказывается равенство: $\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^k}=\delta_k^i=\sum_{j=1}^m\dfrac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}$.

Теорема 4 доказана.

Определение 2. Однопараметрическая группа преобразований $S:\Re\times X_m\to X_m$, $S_\tau:X_m\to X_m,\forall\tau\in\Re$ сохраняет лагранжиан $L:T^nX_m\to\Re$, если $\dfrac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))\,|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$, где

$D_t^kS_\tau(x)\,|_{\tau=0}:X_m\to T^kX_m$ - оператор $k-$кратного полного дифференцирования по переменной t. С каждой однопараметрической группой преобразований можно связать однопараметрическое семейство векторных полей $X^i(x,\tau))=\dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}$, $\forall\tau\in\Re$ $X^i(x)=\dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}\,|_{\tau=0}$ $i=\overline{1,m}$ (струй 0 -ого порядка) и однопараметрическое семейство струй порядка $n-1$: $j_x^{n-1}X^i(x,\tau)=(X^i(x,\tau),D_t^1X^i(x,\tau),D_t^2X^i(x,\tau),...,D_t^{n-1}X^i(x,\tau))$, которые будем называть связанными (индуцированные) с группой преобразований $S_\tau : X_m \to X_m$.

Векторное поле $X^i(x)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ и струю порядка $n-1$: $j_x^{n-1}X^i(x,\tau)=(X^i(x,\tau),D_t^1X^i(x,\tau),D_t^2X^i(x,\tau),...,D_t^{n-1}X^i(x,\tau))$ также будем называть связанными (индуцированные) с группой преобразований $S_\tau : X_m \to X_m$.

Математическая постановка задачи. Ставится следующая задача:

Пусть $L:T^nX_m \to \Re$ - гладкая функция, заданная в расслоенном пространстве скоростей T^nX_m многообразия X_m $L(x,...,\overset{(n)}{x})$, $p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$ - локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m. $p_{k,n}^i=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$-

$S:\Re\times X_m \to X_m$ $S_\tau : X_m \to X_m, \forall \tau\in\Re$ -однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L:T^nX_m \to \Re$:

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$$

Задача данной работы - установить закон сохранения компоненты импульса $p_{k,n}^i=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$- (импульсы k-ого порядка ранга n) вдоль струи: $j_x^{n-1}X^i(x)=(X^i(x),D_t^1X^i(x),D_t^2X^i(x),...,D_t^{n-1}X^i(x))$, связанной с группой преобразований $S_\tau : X_m \to X_m$, $X^i(x)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ $i=\overline{1,m}$, на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа $p_{0,n}^i=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=0$, то есть показать, что $D_t(\sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^n D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i)=0$ при условиях $p_{0,n}^i=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=0$ и $\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$.

Имеет место следующая:

Теорема 5. Пусть $S:\Re\times X_m \to X_m, S_\tau : X_m \to X_m, \forall \tau\in\Re$ однопараметрическая группа преобразований $L:T^nX_m \to \Re$- гладкая функция в расслоенном пространстве скоростей T^nX_m на гладком многообразии X_m.

$p_{0,n}^i=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})$ - импульс 0-ого порядка (функционал в уравнении Эйлера-Лагранжа) $X^i(x,\tau)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}$**,** тогда

$$\frac{dL(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))}{d\tau}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau)) \quad (5)$$

Доказательство.

$$\frac{dL(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))}{d\tau}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i}\frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \dot{x}^i}\frac{d(D_t^1S_\tau^i(x))}{d\tau}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \ddot{x}^i}\frac{d(D_t^2S_\tau^i(x))}{d\tau}+\ ...\ +\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\frac{d(D_t^nS_\tau^i(x))}{d\tau}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\frac{d(D_t^kS_\tau^i(x))}{d\tau}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(\frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau})\ =\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau)) \quad .$$

В частности при n=1 получим

$$\frac{dL(S_\tau(x),D_tS_\tau(x))}{d\tau}=\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i}X^i(x,\tau)+\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial \ddot{x}^i}D_t(X^i(x,\tau)))=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i}X^i(x,\tau)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial \ddot{x}^i}D_t(X^i(x,\tau))=\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i}X^i(x,\tau)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial \ddot{x}^i}D_t(X^i(x,\tau))=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i}X^i(x,\tau)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial \ddot{x}^i}\frac{\partial X^i(x,\tau)}{\partial x^k}\ddot{x}^k$$

.**Теорема 5** доказана.

Имеет место следующая

Теорема 6. Пусть $S:\Re\times X_m\to X_m \quad S_\tau:X_m\to X_m,\forall\tau\in\Re$ - группа преобразований в X_m. $L:T^nX_m\to\Re$ - гладкая вещественнозначная функция в расслоении скоростей T^nX_m. $p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^lD_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $i=\overline{1,m}$ **-**импульсы k-ого порядка ранга n $X^i(x,\tau))=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}$ **-**однопараметрическое семейство векторных полей, индуцированное группой $S_\tau:X_m\to X_m$. Тогда имеет место равенство:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i \quad (6)$$

Доказательство.

По теореме 2 имеем $D_tp_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})=\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}-p_{k-1,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x})$.

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t(D_t^{k-1}(X^i(x,\tau)))p_{k,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))D_tp_{k,n}^i=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^k(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}-p_{k-1,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x}))=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^k(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\right)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k-1,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k+1)}{x}) \qquad (7)$$

Вводим новую переменную $k1=k-1\Rightarrow k=k1+1$ $\quad 1\le k\le n \Rightarrow 0\le k1\le n-1$, подставим в (7):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^k(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\right)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k-1,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k+1)}{x})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^k(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\right)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k-1,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-(k-1))}{x})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^k(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k1=0}^{n-1}D_t^{k1}(X^i(x,\tau))\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k1)i}{x}}\right)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k1=0}^{n-1}D_t^{k1}(X^i(x,\tau))p_{k1,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k1)}{x})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}D_t^k(X^i(x,\tau))\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\right)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}D_t^k(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^k(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}D_t^k(X^i(x,\tau))(p_{k,n}^i-p_{k,n}^i)-\sum_{i=1}^{m}D_t^0X^i(x,\tau)p_{0,n}^i+\sum_{i=1}^{m}D_t^nX^i(x,\tau)p_{n,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}D_t^k(X^i(x,\tau))\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\right)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}D_t^0X^i(x,\tau)p_{0,n}^i+\sum_{i=1}^{m}D_t^nX^i(x,\tau)\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}D_t^k(X^i(x,\tau))\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\right)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}D_t^k(X^i(x,\tau))\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\right).$$

Этот результат может быть получен и по-другому. Проведем доказательство индукцией по n. При $n=1$ в формуле (6) получим:

$$p_{k,n}^i=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^lD_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)\quad k=\overline{0,n},i=\overline{1,m}\text{-импульс k-ого порядка ранга n}$$

$$p_{1,1}^i=\sum_{l=0}^{1-1}(-1)^lD_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}\right)=(-1)^0D_t^0\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \overset{(0+1)i}{x}}\right)=\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \overset{(1)i}{x}}=\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}$$

$$p_{0,1}^i=\sum_{l=0}^{1-0}(-1)^lD_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}\right)=(-1)^0D_t^0\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \overset{(0+0)i}{x}}\right)+(-1)^1D_t^1\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \overset{(1+0)i}{x}}\right)=\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\right)$$

По формуле (6) нужно проверить выполнение равенства:

$$D_t\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i\ .$$

При n=1 (6) имеет вид:

$$D_t\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n=1}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n=1}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n=1}^i \qquad (8)$$

Преобразуем левую часть (8):

$$D_t(\sum_{i=1}^{m} D_t^{1-1}(X^i(x,\tau))p_{1,1}^i) = D_t(\sum_{i=1}^{m} D_t^{0}(X^i(x,\tau))p_{1,1}^i) = D_t(\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{1,1}^i) = D_t(\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{1,1}^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))p_{1,1}^i + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(p_{1,1}^i) = \sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))p_{1,1}^i + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(p_{1,1}^i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i} + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) = D_t(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i} X^i(x,\tau)) \quad (9)$$

Преобразуем правую часть (8):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n=1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)}{x}{}^i} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n=1}^i = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} D_t^0(X^i(x,\tau)) + \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i} D_t^1(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n=1}^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} X^i(x,\tau)) + \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i} D_t^1(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} - D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} X^i(x,\tau) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i} D_t^1(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i} D_t^1(X^i(x,\tau)) + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) = D_t(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i} X^i(x,\tau)) \quad (10)$$

Формулы (9), (10) совпадают, база индукции при n=1 проверена.

При $n = 2$ в формуле (6) получим:

$$p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+k)}{x}{}^i}) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$$ -импульс k-ого порядка ранга n

$$p_{1,2}^i = \sum_{l=0}^{2-1}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+1)}{x}{}^i}) = (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(0+1)}{x}{}^i}) + (-1)^1 D_t^1(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(1+1)}{x}{}^i}) =$$

$$= \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} - D_t^1(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}).$$

$$p_{2,2}^i = \sum_{l=0}^{2-2}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(0+2)}{x}{}^i}) = (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(0+2)}{x}{}^i}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}.$$

$$p_{0,2}^i = \sum_{l=0}^{2-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+0)}{x}{}^i}) = (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(0+0)}{x}{}^i}) + (-1)^1 D_t^1(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(0+1)}{x}{}^i}) + (-1)^2 D_t^2(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(0+2)}{x}{}^i}) =$$

$$= \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^i} - D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} + D_t^2(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}).$$

По формуле (6) нужно проверить выполнение равенства:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)}{x}{}^i} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n}^i.$$

При n=2 (6) имеет вид:

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n=2} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n=2}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)\,p^i_{0,n=2}\,.$$

Преобразуем левую часть последнего выражения:

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m} D_t^{1-1}(X^i(x,\tau))p^i_{1,2}+D_t^{2-1}(X^i(x,\tau))p^i_{2,2}\Big)=D_t\Big(\sum_{i=1}^{m} D_t^{0}(X^i(x,\tau))p^i_{1,2}+D_t(X^i(x,\tau))p^i_{2,2}\Big)=$$

$$=D_t\Big(\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{1,2}+D_t(X^i(x,\tau))p^i_{2,2}\Big)=\sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))p^i_{1,2}+X^i(x,\tau)D_t(p^i_{1,2})+D_t^2(X^i(x,\tau))p^i_{2,2}+D_t(X^i(x,\tau))D_t(p^i_{2,2})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))p^i_{1,2}+\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(p^i_{1,2})+\sum_{i=1}^{m} D_t^2(X^i(x,\tau))p^i_{2,2}+\sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))D_t(p^i_{2,2}) \qquad (12)$$

По **теореме 2** имеем:

$$D_t\, p^i_{k,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})=\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}-p^i_{k-1,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k+1)}{x}).$$

$$D_t p^i_{1,2}(x,\dot x,\ddot x)=\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \overset{(1-1)i}{x}}-p^i_{1-1,2}(x,\dot x,\ddot x)=\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial x^i}-p^i_{1-1,2}(x,\dot x,\ddot x,\overset{(3)}{x},\overset{(4)}{x})=\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial x^i}-p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x})$$

$$D_t p^i_{2,2}(x,\dot x,\ddot x)=\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \overset{(2-1)i}{x}}-p^i_{2-1,2}(x,\dot x,\ddot x)=\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}-p^i_{2-1,2}(x,\dot x,\ddot x,\overset{(3)}{x},\overset{(4)}{x})=\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}-p^i_{1,2}(x,\dots,\overset{(3)}{x})$$

На основании последний результат можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))p^i_{1,2}+\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(p^i_{1,2})+\sum_{i=1}^{m} D_t^2(X^i(x,\tau))p^i_{2,2}+\sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))D_t(p^i_{2,2})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))p^i_{1,2}+X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial x^i}-p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x})\Big)+D_t^2(X^i(x,\tau))p^i_{2,2}+D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}-p^i_{1,2}\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))p^i_{1,2}+X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial x^i}-p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x})\Big)+D_t^2(X^i(x,\tau))p^i_{2,2}+D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}-p^i_{1,2}\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial x^i}-p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x})\Big)+D_t^2(X^i(x,\tau))p^i_{2,2}+D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial x^i}-p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x})\Big)+D_t^2(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \ddot x^i}+D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial x^i}+D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}+D_t^2(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \ddot x^i}-X^i(x,\tau)p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial x^i}+D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}+D_t^2(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \ddot x^i}-\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{2}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i .$$

Утверждение теоремы проверено для n=2

Пусть утверждение **теоремы 6** верно для n:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i$$

Докажем, что утверждение **теоремы 6** верно для n+1:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+1}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n+1}^i \qquad (11)$$

По теореме 3 (формула 3) имеем $p_{k,n+1}^i=p_{k,n}^i+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})$

$$p_{k,n+1}^i=\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})\Rightarrow p_{n+1,n+1}^i=\sum_{l=0}^{n+1-(n+1)}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})=\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}.$$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+1}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i)=D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i+D_t^{n+1-1}(X^i(x,\tau))p_{n+1,n+1}^i)=$$

$$=D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i)+D_t^n(X^i(x,\tau))p_{n+1,n+1}^i)=D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i)+D_t(\sum_{i=1}^{m}(D_t^n(X^i(x,\tau))p_{n+1,n+1}^i)=$$

$$=D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i)+D_t^n(X^i(x,\tau))p_{n+1,n+1}^i)=D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i)+\sum_{i=1}^{m}D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))p_{n+1,n+1}^i) \qquad (12)$$

Подставим $p_{k,n+1}^i=p_{k,n}^i+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})$ при $p=n+1$ в первой сумме в (12):

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i)+\sum_{i=1}^{m}D_t(D_t^n(X^i(x,\tau)p_{n+1,n+1}^i)=$$

$$=D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(p_{k,n}^i+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})))+\sum_{i=1}^{m}D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))p_{n+1,n+1}^i .$$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i)+D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))+\sum_{i=1}^{m}D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))p_{n+1,n+1}^i)=$$

$$=D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})+\sum_{i=1}^{m}D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) \qquad (13)$$

По предположению индукции первое слагаемое в сумме (13) равно:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,n} \qquad (14)$$

По формуле (3):

$$p^i_{0,n+1} = p^i_{0,n} + (-1)^{n+1-0} D_t^{n+1-0}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) = p^i_{0,n} + (-1)^{n+1} D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) \qquad (15)$$

Преобразуем второе слагаемое в сумме (13):

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t(D_t^{k-1}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k} D_t(D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+2-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) \qquad (16)$$

Вводим новую переменную и, преобразуя второе слагаемое последней суммы(16) , перепишем (16):

$$k1 = k-1 \Rightarrow k = k1+1\ ,1 \le k \le n\ \Rightarrow 0 \le k1 \le n-1,\ n+1-k = n-k1, n+2-k = n+1-k1 \quad :$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k1=0}^{n-1} D_t^{k1}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n-k1} D_t^{n+1-k1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} D_t^{n}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-n} D_t^{n+1-n}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) + \sum_{i=1}^{m} D_t^{0}(X^i(x,\tau))(-1)^{n-0} D_t^{n+1-0}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}((-1)^{n-k} D_t^{k}(X^i(x,\tau))D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})(-1)^1+1)) + \sum_{i=1}^{m} D_t^{n}(X^i(x,\tau))(-1)^1 D_t^{n+1-n}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} D_t^{0}(X^i(x,\tau))(-1)^{n-0} D_t^{n+1-0}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) = (-1)\sum_{i=1}^{m} D_t^{n}(X^i(x,\tau))D_t^{1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} D_t^{0}(X^i(x,\tau))(-1)^{n} D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) = (-1)\sum_{i=1}^{m} D_t^{n}(X^i(x,\tau))D_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(-1)^{n} D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) \qquad (17)$$

Рассмотрим последнее слагаемое в сумме (13):

$$\sum_{i=1}^{m} D_t\Big(D_t^n(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\Big(D_t(D_t^n(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}+D_t^n(X^i(x,\tau))D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\Big(D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}+D_t^n(X^i(x,\tau))D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}+\sum_{i=1}^{m} D_t^n(X^i(x,\tau))D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big) \tag{18}$$

Преобразуем левую часть доказываемого тождества (11), равную (13) и состоящую из трех слагаемых, равных соответственно правым частям (14), (17), (18):

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n}\Big)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)+\sum_{i=1}^{m} D_t\Big(D_t^n(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,n}+(-1)\sum_{i=1}^{m} D_t^n(X^i(x,\tau))D_t^1\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(-1)^n D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)+\sum_{i=1}^{m} D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}+\sum_{i=1}^{m} D_t^n(X^i(x,\tau))D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,n}+\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(-1)^n D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}} \tag{19}$$

Учитывая (15), объединим первое и последнее слагаемое в сумме (19) ,получим, что левая часть (11) равна:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,n}+\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(-1)^n D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,n}-\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(p^i_{0,n}+(-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big) \tag{20}$$

Преобразуем (20), учитывая (15):

$$p^i_{0,n+1}=p^i_{0,n}+(-1)^{n+1-0}D_t^{n+1-0}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)=p^i_{0,n}+(-1)^{n+1}D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big).$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(p^i_{0,n}+(-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n+1}^i \qquad (21)$$

Полученный результат (21) представляет правую часть доказываемого равенства (11). **Теорема 6** доказана.

Имеет место следующая

Теорема 7. Пусть $L:T^nX_m\to\Re$ - гладкая функция, заданная в расслоенном пространстве скоростей T^nX_m. $L(x,...,\overset{(n)}{x})$, $p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$-локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m. $p_{k,n}^i=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^lD_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n},i=\overline{1,m}$-

$S:\Re\times X_m\to X_m$ $S_\tau:X_m\to X_m,\forall\tau\in\Re$ -однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L:T^nX_m\to\Re$:

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$$

$j_x^{n-1}X^i(x)=(X^i(x),D_t^1X^i(x),D_t^2X^i(x),...,D_t^{n-1}X^i(x))$- струя порядка n-1, связанная, с группой преобразований $S_\tau:X_m\to X_m$, $X^i(x)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ $i=\overline{1,m}$.

Тогда на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа $p_{0,n}^i=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^lD_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=0$ имеет место закон сохранения компоненты импульса вдоль струи $D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x))p_{k,n}^i)=0$.

Доказательство. По формуле (6) **теоремы 6** при любых $x\in X_m,\tau\in\Re$ выполнено соотношение:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i \qquad (22)$$

В частности при $\tau=0$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))|_{\tau=0}\,p_{k,n}^i)=D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x))p_{k,n}^i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))|_{\tau=0}-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)|_{\tau=0}\,p_{0,n}^i=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x)p_{0,n}^i \qquad (23)$$

По условию **теоремы 7** $S_\tau:X_m\to X_m,\forall\tau\in\Re$ -однопараметрическая группа преобразований, сохраняет функцию Лагранжа $L:T^nX_m\to\Re$:

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m \qquad (24)$$

По формуле (5) **теоремы 5** имеет место равенство**:**

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau)) \tag{25}$$

которое выполняется при любом τ, в частности при $\tau=0$. Учитывая равенства(24), (25) получаем:

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))\,|_{\tau=0}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))\,|_{\tau=0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x))=0,$$

поскольку $D_t^k(X^i(x,\tau))|_{\tau=0}=D_t^k(X^i(x,0)=D_t^k(X^i(x)$ (26)

Следовательно, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x))=0$ Поскольку $x:\Re\to X_m$ - экстремаль уравнения Эйлера-Лагранжа, то

$$p_{0,n}^i=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=0 \tag{27}$$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{m}X^i(x)p_{0,n}^i=\sum_{i=1}^{m}X^i(x)\cdot 0=0$ Подставляя (26), (27) в равенство (23) получим

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x))p_{k,n}^i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x)p_{0,n}^i=0-0=0$$

Теорема 7 доказана.

Замечание 2. Введенное в работе определение компоненты импульса вдоль струи и сохранение компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка n-1 на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа для групп преобразований, сохраняющих вариационную задачу, является прямым и естественным обобщением определения компоненты импульса первого порядка вдоль векторного поля (струи нулевого порядка), связанного с однопараметрической группой преобразований, сохраняющих функцию Лагранжа, зависящую от производных нулевого и первого порядков.[1,с. 297] В частности на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа справедлив закон сохранения компоненты импульса первого порядка первого ранга вдоль векторного поля, индуцированного группой, сохраняющих вариационную задачу первого порядка:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}X^i p_{1,1}^i)=D_t(\sum_{i=1}^{m}X^i\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \overset{(1)i}{x}})=D_t(\sum_{i=1}^{m}X^i\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i})=0$$

Литература

1. Дубровин, В. А. Современная геометрия. Методы и приложения / В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М.: УРСС, 1994.
2. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М.: Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. – М.: Наука, 1974.

4. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1974.
5. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – Т. 2: Теория поля. – 512 с.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – Т. 1: Механика. – 214 с.
7. Галеев, Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
8. Дирак, П. Лекции по квантовой механике / П. Дирак. – М.: Мир, 1968.
9. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»; ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
10. Трофимов, В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995.
11. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф.Пастухов, Д.Ф Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2015. - № 12. - С. 117-123.
12. государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2016. - № 4. - С. 119.
13. Задача построения поля линий тока по температурному//Ю.Ф.Пастухов, Д.Ф Пастухов// Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2015. - № 4. - С. 27-36.
14. Тензор обобщенной энергии//Ю.Ф.Пастухов, Д.Ф Пастухов//Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2017. - № 12. - С. 78-100.

GROUPS OF TRANSFORMATION CONSERVING VARIATIONAL PROBLEM WITH SENIOR DERIVATIVES

POLOTSK STATE UNIVERSITY
Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

Annotation. The definition of the momentum component is introduced along the jet and the conservation of components of momentum of rank n along the jet of order n-1 on the extremals of the Euler-Lagrange equation for groups of transformations preserving the variational problem is a direct and natural generalization of the determination of the momentum vector field (zero-order jet) connected with a one-parameter group of transformations preserving Lagrangian function that depends on the derivatives of zero and first orders. For the extremes of the Euler-Lagrange equation, the property of preserving the momentum component of rank n-1, connected with the transformation group preserving the variational problem with higher derivatives.

$$D_t\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x))p_{k,n}^i\right)=0$$

$S:\Re\times X_m\to X_m$ $\quad S_\tau : X_m \to X_m, \forall\tau\in\Re$ - is a one-parameter group of transformations that preserves the function: $L:T^nX_m\to\Re$:

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x), D_tS_\tau(x), D_t^2S_\tau(x),..., D_t^{(n)}S_\tau(x))\,|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$$

$j_x^{n-1} X^i(x) = (X^i(x), D_t^1 X^i(x), D_t^2 X^i(x), \ldots, D_t^{n-1} X^i(x))$ - a jet of order n-1 connected, with the transformation group $S_\tau : X_m \to X_m$, $X^i(x) = \dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}\Big|_{\tau=0}$ $i = \overline{1,m}$

УДК 514

ЛАГРАНЖЕВЫ СЕЧЕНИЯ

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ

(Полоцкий государственный университет)

В статье инвариантным образом определено понятие лагранжевых сечений в расслоённых пространствах скоростей произвольного порядка, сформулированы и доказаны их свойства, дан инвариантный критерий решения задачи, получено необходимое условие лагранжевых сечений и систем ОДУ произвольного чётного порядка.

***Ключевые слова**: обратная вариационная задача, расслоённое пространство скоростей, лагранжево сечение, уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, тензор энергии, тензор обобщенного импульса, невырожденная функция.*

Введение.

Вариационное исчисление является одним из старейших и богатых содержанием и приложениями разделов математического анализа. Вариационные задачи (например, изопериметрические) рассматривались и в древности, но исследовались геометрическими методами. Поэтому началом зарождения вариационного исчисления можно считать работу Ферма 1662 г., в которой аналитическими методами исследована задача о распространении света из одной оптической среды в другую и о преломлении света на границе двух сред. Далее аналогичные (но более общие) вариационные задачи исследовались Ньютоном (задача о наименьшей поверхности вращения - в 1685 г.), Д. Бернулли (задача о брахистохроне) и др.

В 1696 году И. Бернулли сформулировал и опубликовал математическую проблему с предложением для математиков своего времени заняться её решением. В задаче о брахистохроне требовалось найти форму гладкой кривой, соединяющей две точки, так чтобы материальная точка, двигаясь по ней без трения под действием силы тяжести, прошла участок между этими точками за минимальное время. Задача была решена крупнейшими учёными того времени – Я. Бернулли, Г. Лейбницем, франц. учёным Г. Лопиталем и И. Ньютоном.

Свои подходы к решению этой задачи предложили Эйлер, Лагранж, что привело к рождению вариационного исчисления. Эти решения наметили многие направления будущей общей теории. И. Бернулли исходил из оптико-механических аналогий, Я. Бернулли применил принцип Гюйгенса, Лейбниц решил задачу, заменяя кривую ломаными, заложив тем самым основу прямым методам в вариационном исчислении.

Настоящими творцами общей теории вариационного исчисления (которые дали название этой науке) являются Эйлер (уравнения Эйлера) и Лагранж (метод вариаций). Далее следует Лежандр (исследование второй вариации—необходимое условие Лежандра), Гамильтон и Якоби (понятие сопряженной точки, необходимое условие Якоби, теория Гамильтона — Якоби), Клебш и Майер (задачи с функционалами более общей природы, необходимое условие Клёбша, поля экстремалей Майера), Вейерштрасс (задачи в параметрической форме, достаточные условия сильного экстремума). Работы Майера конца XIX века послужили основой для углубленного исследования вариационных задач Лагранжа и Майера, доказательства правила множителей для них и др. В начале XX в. Гильберт ввел свой известный инвариантный интеграл для доказательства достаточных условий экстремума, Кнезер исследовал задачи с подвижными концами, получил геометрическое условие Якоби (при помощи огибающей семейства экстремалей).

Дифференциальная геометрия возникла и развивалась в тесной связи с математическим анализом, который сам в значительной степени вырос из задач геометрии. Многие геометрические понятия предшествовали соответствующим понятиям анализа. Так, например, понятие касательной предшествовало понятию производной, понятие площади и объема — понятию интеграла.

Возникновение дифференциальной геометрии относится к XVIII веку и связано с именами Эйлера и Монжа. Первое сводное сочинение по теории поверхностей написано Монжем («Приложение анализа к геометрии», 1795). В 1827 Гаусс опубликовал работу «Общее исследование о кривых поверхностях», в которой заложил основы теории поверхностей в её современном виде. С тех пор дифференциальная геометрия перестала быть только приложением анализа и заняла самостоятельное место в математике.

Огромную роль в развитии всей геометрии, в том числе и дифференциальной геометрии, сыграло открытие неевклидовой геометрии. Риман в своей лекции «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» (1854) заложил основы римановой геометрии, наиболее развитой части современной дифференциальной геометрии.

Теоретико-групповая точка зрения Клейна, изложенная в его «Эрлангенской программе» (1872), то есть: геометрия — учение об инвариантах групп преобразований, в применении к дифференциальной геометрии была развита Картаном, который построил теорию пространств проективной связности и аффинной связности.

Основная задача дифференциальной геометрии состоит в нахождении и описании дифференциальных инвариантов геометрических структур. Необходимым аппаратом здесь является исчисление струй. Это понятие интенсивно использовалось в теории геометрических структур высшего порядка в работах В.В.Вагнера, Г.Ф.Лаптева, Л.Е.Евтушика, М.О.Рахулы, а в последнее время в теории особенностей гладких отображений М.Голубицким, В.Гийеминым и геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений А.М.Виноградовым, В.В.Лычагиным. Представленная работа является продолжением предыдущих работ авторов [9, 11,14,15,16,17].

Постановка задачи и основные определения.

Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе: X_m – гладкое многообразие размерности m; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m; $L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$.

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(p+\min(n,p)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$ где

$L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функция $p_{k,n}^i$ читается как $k-ая$ компонента обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульс порядка k (k-импульс) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Замечание 1. Обобщенный импульс ранг n определен для функций $L: T^p X_m \to \Re$

Из определения $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ следует, что при $k > p, l \geq 0 \Rightarrow l+k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и все $p_k^i(n) \equiv 0$ (тривиальные импульсы), то есть для нетривиальных импульсов $k \leq p$. Поскольку $k \leq n, k \leq p \Rightarrow k \leq \min(n,p)$, то в определении 2 можно считать, что $k = \overline{0,\min(n,p)}, i = \overline{1,m}$.

Максимальный порядок производной по t в $p_k^i(n)$ равен $l+k+l = 2\cdot l + k$

При $l+k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, значит, при определении максимального порядка производной по t можно считать $l+k \leq p$, кроме того

$$l \leq n-k \Leftrightarrow l+k \leq n \Rightarrow l+k \leq \min(n,p) \Rightarrow l \leq \min(n,p)-k \Rightarrow 2\cdot l + k \leq 2\cdot(\min(n,p)-k)+k =$$

$$= 2\cdot\min(n,p) - 2\cdot k + k = 2\cdot\min(n,p) - k$$

Хотя более грубая оценка порядка старшей производной по t в $p_k^i(n)$ дает

$l \leq n-k \Leftrightarrow l+k \leq n \Rightarrow 2\cdot l + k \leq 2\cdot(n-k)+k = 2\cdot n - 2\cdot k + k = 2\cdot n - k$.

При $p > n, l+k \leq n$ и максимальный порядок производной по t в аргументах $L(x,...,\overset{(p)}{x})$ больше максимального порядка производной по переменной t в знаменателе частной производной.

Теорема 1[11]. Пусть $x^i = S^i(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_m})$ $S:(\overline{x}) \to x(\overline{x})$, - невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$ $i = \overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\overline{x},\overset{\bullet}{\overline{x}},...,\overset{(\underline{p})}{x})}{\partial \overset{(\underline{s})j}{x}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\right), C_l^s = \dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l! = \prod\limits_{k=1}^{l} k, l \geq s \\ 0, l < s \end{cases} \qquad (1)$$

Теорема 2[10](закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n}X_m$). При замене $(\overline{x}) \to (x(\overline{x}))$: в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n}X_m$ $\overline{p_k^i(n)}(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\overline{x}})$ преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_k^i}(n)(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\overline{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_k^j(n)(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} = p_k^j(n)(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\overline{x})}{\partial \overline{x}^i}$$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$$ - импульс порядка k, $k = \overline{0,n}$ $i, j = \overline{1,m}$.

Пусть: $T^k X_m$ — расслоённое пространство скоростей порядка k многообразия X_m, $\pi_k^l : T^l X_m \to T^k X_m, l > k \geq 0$ — каноническая проекция (при к = 0 — проекция на базу расслоения — многообразие X_m). Предполагается, что X_m — бесконечно гладкое многообразие. $U(v_{0_x}^{2n-1})$ — окрестность точки $v_{0_x}^{2n-1}$ в расслоении $T^{2n-1}X_m$.

Определение 2. Пусть $L: T^n X_m \to \Re$ - гладкая функция. $L(x, \dot{x}, ..., x^{(n)})$ - локальная запись в системе координат (x). (φ_x: $(V \subset T^n X_m) \to \Re^{(n+1)m}$- координатный диффеоморфизм локальной карте (V, φ_x)) Функция $L: T^n X_m \to \Re$ называется

невырожденной(вырожденной) в точке $v_x^n \in T^n X_m$, в системе координат (x) базе X_m расслоения, если соответственно $\det\left(\frac{\partial^2 L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}}\right) \neq 0 (= 0)$

Постановка задачи.

Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе: X_m – гладкое многообразие размерности *m*; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка *n* с базой расслоения X_m; $L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$

Поставим следующую задачу:

Пусть $T^{2n} X_m \supset V(v_0^{2n}) = V$ - окрестность точки $v_0^{2n} \in T^{2n} X_m$

$\pi_{2n-1}^{2n} : T^{2n} X_m \to T^{2n-1} X_m$-каноническая проекция:

$\pi_{2n-1}^{2n}(V) = U(u_0^{2n-1}) = U = \{\pi_{2n-1}^{2n}(v) \mid \forall v \in V(w_0^{2n})\}$, $\pi_{2n-1}^{2n}(v_0^{2n}) = u_0^{2n-1}$

$f: T^{2n-1} X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n} X_m$ - гладкое сечение

Существуют ли $\overline{V}(v_0^{2n}) \subset V(v_0^{2n})$ ($\pi_{2n-1}^{2n}(\overline{V}) = \overline{U}$)и такая невырожденная функция $L: T^n X_m \supset \pi_n^{2n} V \to \Re^m$,что

$\sigma_f(\overline{U}) = \varepsilon_L(\overline{V})$.

Теорема 3. Пусть $L: T^n X_m \to \Re$ гладкая функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$, $L\left(x, \dot{x}, ..., x^{(n)}\right)$ -

локальная запись в системе координат (x) в базе $X_m, L\left(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \overset{(n)}{\bar{x}}\right)$ - локальная запись в системе координат $(\bar{x})$.

Тогда
$$\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \tag{2}$$

Доказательство.
$$\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}} \frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right) = \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}} \frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} + \frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right) = \frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} \tag{3}$$

Преобразуем левую часть в сумме (3):
$$\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right) = \sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} \tag{4}$$

Подставим (4) в левую часть (3):
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\left(\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)\right)\cdot\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} \tag{5}$$

Подставляем полученное выражение (5) в (3):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\left(\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\right)\cdot\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right) =$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{\bar x}}\left(\frac{\partial L(x(\bar x),...,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(t)j}{\bar x}}\right)\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar x),...,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(t)j}{\bar x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar x),...,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s)d}{\bar x}\,\partial \overset{(t)j}{\bar x}}\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar x),...,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(t)j}{\bar x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}}\right) \qquad (6)$$

По **теореме 1** $\quad \dfrac{\partial x^{(l)i}(\bar x,\dot{\bar x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(s)j}{\bar x}}=\begin{cases} C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right), C_l^s=\dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l!=\prod\limits_{k=1}^{l}k, l\ge s \\ 0, l<s\end{cases} \qquad i,j=\overline{1,m}$

Так как $n\ge t\ge 0$, то

$$\frac{\partial x^{(t)j}(\bar x,\dot{\bar x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}}=\begin{cases} C_n^n\cdot D_t^{n-n=0}\left(\dfrac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l}\right)=D_t^{n-n=0}\left(\dfrac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l}\right)=\dfrac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l}, C_n^n=\dfrac{n!}{n!\cdot(n-n)!}=1, n!=\prod\limits_{k=1}^{n}k, t=n \\ 0, t<n\end{cases}=\delta_n^t\frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l}$$

Значит, при $\quad n\ge t\ge 0$, $\dfrac{\partial x^{(t)j}(\bar x,\dot{\bar x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{\bar x}}=\delta_n^t\dfrac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j} \qquad (7)$

где $\delta_n^t=\begin{cases}1, l=k\\ 0, l\ne k\end{cases}-\text{символ Кронекера}$

Подставим (7) в правую часть (6):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar x),...,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(t)j}{\bar x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}}\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar x),...,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(t)j}{\bar x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\delta_n^t\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar x),...,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(t)j}{\bar x}}\delta_n^t\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x(\bar x),...,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)j}{\bar x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right)$$

Так как $n\ge 1$, то $\dfrac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}$ зависит только от $\bar x$ и не зависит от производных не ниже первого порядка. Следовательно, $\dfrac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right)=0$ Значит(8) - правая часть в (6)

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x(\bar x),...,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)j}{\bar x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right)=0$$

Значит, выражение (3) равное выражению (6) с учетом (8) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \bar L(\bar x,\dot{\bar x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}\,\partial \overset{(n)l}{\bar x}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar x),...,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s)d}{\bar x}\,\partial \overset{(t)j}{\bar x}}\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar x),...,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(t)j}{\bar x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar x),...,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s)d}{\bar x}\,\partial \overset{(t)j}{\bar x}}\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}} \qquad (9)$$

На основании (7) имеют место равенства:

$$n \ge t \ge 0\ , \frac{\partial x^{(t)j}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} = \delta_n^t \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \quad \text{, где } \delta_n^t = \begin{cases} 1, t=n \\ 0, t<n \end{cases} - символ Кронеккера \quad (10)$$

$$n \ge s \ge 0\ , \frac{\partial x^{(s)d}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}} = \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \quad \text{,где } \delta_n^s = \begin{cases} 1, s=n \\ 0, s<n \end{cases} - символ Кронеккера \quad (11)$$

Подставляем (10),(11) в (9) получим:

$$\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}} \partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}} \frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \delta_n^t \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \delta_n^t \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \quad (12)$$

Так как $\delta_n^s = \begin{cases} 1, s=n \\ 0, s<n \end{cases} - символ Кронекера$, то

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d=n}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^{s=n} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} =$$

$$= \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s=n)d}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^{s=n} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \text{ , так как } \delta_n^s = 0,\ s<n;\ \delta_n^{s=n} = 1 \quad (13)$$

Подставляем (13) в (12):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \delta_n^t \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \delta_n^t \sum_{d=1}^{m}\Big(\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{m}\sum_{d=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \quad (14)$$

Так как $\delta_n^t = 0,\ t<n;\ \delta_n^{t=n} = 1$, то

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x} \partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} + \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x} \partial \overset{(t=n)j}{x}} \delta_n^{t=n} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} =$$

$$= \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x} \partial \overset{(n)j}{x}} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \quad (15)$$

Подставляем (15) в (14), получим:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}(\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k})=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}=\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}$$

Теорема3 доказана.

Теорема 4. $L:T^nX_m\to\Re$ невырожденная (вырожденная) функция в точке $v_x^n\in T^nX_m$, в системе координат (x) базе X_m расслоения. Тогда в любой другой системе координат $(\bar{x})$ в базе X_m функция $L:T^nX_m\to\Re$ также будет соответственно невырожденной (вырожденной), следовательно, свойства вырожденности и невырожденности не зависит от выбора локальной системы координат в базе X_m, то есть является геометрическим инвариантом в расслоении T^nX_m

Доказательство. По теореме 3 $\dfrac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\dfrac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}$

Невырожденность в системе координат (x) в базе X_m по определению

означает $\det(\dfrac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}})\neq 0$. Поэтому **по теореме 3**

$$\det(\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}})=\det(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l})=$$

$$=\det(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}})\det(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k})\det(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l})\neq 0 \text{ так как } \det(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k})\neq 0 \; u \det(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l})\neq 0 \text{ - так}$$

как замена координат $x=x(\bar{x})$ в базе в базе X_m невырожденная.

Аналогично, если $L:T^nX_m\to\Re$ - вырожденная функция, то

$\det(\dfrac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}})=0$. **По теореме 3 имеем**

$$\det(\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}})=\det(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l})=$$

$$=\det(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}})\det(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k})\det(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l})=0\cdot\det(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k})\det(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l})=0$$

Теорема доказана.

Определение 3. Гладкое отображение $f:T^kX_m\to T^lX_m$ $(0\leq k<l)$ называется сечением, если следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} T^k X_m \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & T^l X_m \arrow[dl, "\pi^l_k"] \\ & T^k X_m & \end{tikzcd}$$

Определение 4. Пусть $U(v_{0_x}^{2n-1})$ — окрестность точки $v_{0_x}^{2n-1}$ в расслоении $T^{2n-1}X_m$. Подмногообразие , $\sigma_f \subset T^{2n}X_m$,

$$\sigma_f = \sigma_f(U) = \left\{ v_x^{2n} \in T^{2n}X_m \mid v_x^{2n} = f(v_x^{2n-1}),\, v_x^{2n-1} \in U(v_{0_x}^{2n-1}) \right\}$$

называется (гладким) подмногообразием, порождённым сечением $f : T^{2n-1}X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n}X_m$.

Лемма 1. Пусть $U(v_{0_x}^{2n-1})$ – окрестность точки $v_{0_x}^{2n-1}$ в расслоении $T^{2n-1}X_m$.

Подмногообразие $\sigma_f \subset T^{2n}X_m$,

$$\sigma_f = \sigma_f(U) = \left\{ v_x^{2n} \in T^{2n}X_m \mid v_x^{2n} = f(v_x^{2n-1}),\, v_x^{2n-1} \in U(v_{0_x}^{2n-1}) \right\},$$

задаваемое сечением $f : T^{2n-1}X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n}X_m$ имеет размерность $2mn$.

Доказательство. Пусть (x) - локальная система координат в базе X_m расслоения $T^{2n}X_m$. Тогда

Отображение $f : T^{2n-1}X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n}X_m$ в локальных координат имеет вид :

$$y^{(k)i}(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-1)}{x}) = \begin{cases} x^{(k)i}, \ k = \overline{0, 2n-1} \\ f_i(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-1)}{x}), \ k = 2n \end{cases} \qquad i = \overline{1, m}$$

Рассмотрим отображения $s(k,i) = m \bullet k + i \quad k = \overline{0,2n}, \quad p(l,j) = m \bullet l + j$, $l = \overline{0,2n-1} \quad i, j = \overline{1,m}$

Отображение $s(k,i)$, $k = \overline{0,2n}$, $i = \overline{1,m}$ биективно отображает двумерную целочисленную решетку размером $[0;2n] \times [1;m]$ в целочисленный одномерную решетку - отрезок $[1;(2n+1) \bullet m]$

Сюрьективность отображения $s(k,i) = m \bullet k + i$ следует из очевидного тождества :

$$s = \begin{cases} m \bullet [\frac{s}{m}] + s - m \bullet [\frac{s}{m}] \ , \mathrm{mod}(s,m) \neq 0 \Rightarrow 0 \le k = [\frac{s}{m}] \le 2n,\, 1 \le i = s - m \bullet [\frac{s}{m}] < m \\ m \bullet ([\frac{s}{m}] - 1) + m \ , \ c = 0 \ \Rightarrow 0 \le k = [\frac{s}{m}] - 1 \le 2n,\, i = m \end{cases}$$

Где $\mathrm{mod}(s,m)$ - остаток от деления s на m

Докажем , что $s(k,i)$ инъективно : $s(k,i) = m \bullet k_1 + i_1 = m \bullet k_2 + i_2 \ \Rightarrow m \bullet (k_2 - k_1) = i_1 - i_2$

Так как $1 \le i_1, i_2 \le m \ \Rightarrow \ 1 - m \le i_1 - i_2 \le m - 1$ Так как $m \bullet (k_2 - k_1) \vdots m \Rightarrow i_1 - i_2 = 0 \Rightarrow k_2 - k_1 = 0$

Инъективность и сюрьективность, а ,значит, и биективность $s(k,i)$ доказаны.

Аналогично доказывается биективность отображения $p(l,j) = m \bullet l + j$

Рассмотрим замену переменных :

$$\begin{cases} Y^{s(k,i)} = x^{(k)i} \ , \ k = \overline{0,2n-1} \ , \ i = \overline{1,m} \ \Rightarrow Y^{s(k,i)} = Y^{mk+i} = x^{(k)i} = X^{p(k,i)} = X^{mk+i} = X^s \\ Y^{s(2n,i)} = x^{(2n)i} = f_i(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-1)}{x}) \\ X^{p(l,j)} = x^{(l)j} \ , \ l = \overline{0,2n-1} \ , \ j = \overline{1,m} \end{cases}$$

Пусть E_{2mn} -единичная матрица размера $2mn$, $F_i(X^1, \ldots, X^{2mn}) = f_i(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-1)}{x})$

Значит, ранг матрицы Якоби

$$rk\frac{\partial y^{k(i)}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-1)}{x})}{\partial x^{(l)j}}=rk\frac{\partial Y^{s(k,i)}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-1)}{x})}{\partial X^{p(l,j)}}=rk\frac{\partial X^{s(k,i)}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-1)}{x})}{\partial X^{p(l,j)}}=$$

$$=rk\begin{pmatrix}E_{2mn}\\ \dfrac{\partial F_i}{\partial X^p}\end{pmatrix}\geq 2mn$$

. С другой стороны , ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}E_{2mn}\\ \dfrac{\partial F_i}{\partial X^p}\end{pmatrix}$ размером $(2mn+m)\times 2mn$

$$rkA\leq \min(2mn+m,2mn)=2mn\ \Rightarrow\ rkA=rk\begin{pmatrix}E_{2mn}\\ \dfrac{\partial F_i}{\partial X^p}\end{pmatrix}=2mn$$

Значит, отображение $f:T^{2n-1}X_m\supset U(v_0^{2n-1})\to T^{2n}X_m$ задает подмногообразие размерности $2mn$. **Лемма 1** доказана.

Определение 5. Подмногообразие

$$\varepsilon=\varepsilon_L(V)=\left\{v_x^{2n}\in V\subset T^{2n}X_m\ \mid\ \varepsilon_{(x)L}(\varphi_x(v_x^{2n}))=0\in\Re^m\right\}$$

Где $L:T^nX_m\supset\pi_n^{2n}V\to\Re^m$ — невырожденная функция, $L(x,\dot{x},\ldots,x^{(n)})$ локальная запись в системе координат (x), называется лагранжевым подмногообразием над $V(v_{0_x}^{2n})\subset T^{2n}X_m$,которое, когда это не будет приводить к недоразумению, мы будем называть лагранжевым подмногообразием $\varepsilon_L\subset T^{2n}X_m$. Здесь

$\varepsilon_{(x)L}:\ \Re^{(2n+1)m}\supset\varphi_x(V\subset T^{2n}X_m)\to\Re^m$ $(\varphi_x:\ (V\subset T^{2n}X_m)\to\Re^{(2n+1)m}$ - координатный диффеоморфизм в локальной карте $(V\subset T^{2n}X_m,\varphi_x)$ расслоённого пространства $T^{2n}X_m)$ - гладкая функция, которая в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоённого пространства $T^{2n}X_m$ имеет вид:

$$\varepsilon_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right)\ ,\quad i=\overline{1,m}$$

Теорема 5. Определение 5 корректно, так как оно не зависит от выбора локальных координат (x) в базе X_m расслоённого пространства $T^{2n}X_m$, то есть независимо от выбора локальных координат (x) в базе X_m в окрестности точки $v_x^{2n}\in V\subset T^{2n}X_m$ расслоённого пространства $T^{2n}X_m$ определяет одно и то же подмногообразие

$$\varepsilon=\varepsilon_L(V)=\left\{v_x^{2n}\in V\subset T^{2n}X_m\ \mid\ \varepsilon_{(x)L}(\varphi_x(v_x^{2n}))=0\in\Re^m\right\}$$

Более точно: если $x=x(\bar{x})$ - произвольная невырожденная замена в базе X_m расслоённого пространства $T^{2n}X_m$ и функции

$$\varepsilon_{(x)L}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right)\ ,\quad i=\overline{1,m}$$

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{(l)i}}) \ , \quad i=\overline{1,m}$$

- координатные записи отображений
$\varepsilon_{(x)L}: \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_x(V \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m$ $\qquad$ $\varepsilon_{(\bar{x})L}: \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_{\bar{x}}(V \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m$, то имеет

место, следующее равенство:

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j_{(x)L}(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \qquad (16)$$

Доказательство. По определению $\varepsilon_{(x)L}: \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_x(W \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m$

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}) = p_0^i(n) = p_{0,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-0)}{x}), \quad i=\overline{1,m}.$$

Действительно, так как $L: T^nX_m \supset \pi_n^{2n-1}U \to \Re^m \Rightarrow p=n$ и

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(p+\min(n,p)-k)}{x}) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(n+\min(n,n)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$$

$k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$

$$p_{k=0}^i(n) = p_{0,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-0)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}) = \varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x})$$

Аналогично, $\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{(l)i}}) = \bar{p}_0^i(n) = \bar{p}_{0,n}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-0)}{\bar{x}})$, $\quad i=\overline{1,m}$,

поскольку

$$\bar{p}_k^i(n) = \bar{p}_{k,n}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(p+\min(n,p)-k)}{\bar{x}}) = \bar{p}_{k,n}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}}...,\overset{(n+\min(n,n)-k)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}})$$

$k=\overline{0,n}$, $i=\overline{1,m}$

$$\bar{p}_{k=0}^i(n) = \bar{p}_{0,n}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-0)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{(l)i}}) = \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})$$

По **теореме 2** для $k=0,n$ $\ i,j=\overline{1,m}$ имеем**:**

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m}p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \ , \qquad \det(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}) \neq 0$$ в

частности для $k=0$ (импульсы 0-го порядка – функциональные части в уравнениях Эйлера -
Лагранжа)

$$\overline{p_0^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-0)}{\bar{x}}) = \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m}p_0^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-0)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_0^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-0)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} =$$

$= \sum_{j=1}^{m} p_0^j(n)(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(2n-0)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = \sum_{j=1}^{m}\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\overset{\bullet}{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}}))\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}$. Таким образом, доказано, что $\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\overset{\bullet}{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j_{(x)L}(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(2n)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}$, $\det(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}) \neq 0$, поэтому $\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\overset{\bullet}{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^j_{(x)L}(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) = 0$, $i,j=\overline{1,m}$.

Таким образом, равенство 0 $\varepsilon^j_{(x)L}(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) = 0$, $j=\overline{1,m}$ в одной системе координат влечет $\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\overset{\bullet}{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = 0$ во всех системах координат. Таким образом, соотношение 1 и независимость определения лагранжева подмногообразия от выбора локальной системы координат замена в базе X_m расслоённого пространства $T^{2n}X_m$ доказана.

Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Пусть - $f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})$ - локальная запись гладкой функции $f: T^n X_m \to \Re$ В локальных координатах в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Тогда

$$D_t^p f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p)j}{x} + a(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x}) \text{ , } p \geq 1$$

Доказательство. Проведем индукцией по p.

База индукции $p=1$

$D_t^1 f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x}) = D_t f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x}) = \sum_{s=0}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j} = \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}}x^{(k+1)j}$. При $s \leq k-1 \Rightarrow s+1 \leq k$, поэтому $\frac{\partial f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}$ и $x^{(s+1)j}$ и произведение $\frac{\partial f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}$ зависят от производных порядка не выше k, значит и вся сумма

$a(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k+1-1)}{x}) = a(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x}) = \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}$ также от производных порядка не выше k Значит,

$$D_t^1 f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x}) = \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}}x^{(k+1)j} = a(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x}) + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}}x^{(k+1)j}.$$

База индукции проверена.

Индуктивный переход. Пусть утверждение верно для p ,то есть

$$D_t^p f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p)j}{x} + a(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x})$$

Докажем, что оно верно для $p+1$, то есть имеет место равенство:

$$D_t^{p+1} f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p+1)j}{x} + \bar{a}(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k+p+1-1)}{x}) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p+1)j}{x} + \bar{a}(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(k+p)}{x})$$

По предположению индукции имеем:

$$D_t^{p+1} f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x}) = D_t(D_t^p f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})) = D_t(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x})) =$$

$$= (\sum_{j=1}^m D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} D_t(\overset{(k+p)j}{x})) + D_t\, a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x}) =$$

$$= \sum_{j=1}^m D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x}).$$

Максимальный порядок производных в каждом члене суммы

$\sum_{j=1}^m D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x}$ равен

$\max(k+1, k+p) = k+p$, так как $p \geq 1$.

По доказанному утверждению при $p = 1$ максимальный порядок производных

в $D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}$ равен $k+1$, а максимальный порядок производных в

$D_t\, a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x}$ равен $k+p-1+1 = k+p$

Значит, $\bar{a}(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p)}{x}) = \sum_{j=1}^m D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x})$

зависит от производных порядка не выше $k+p$

Итак, $\sum_{j=1}^m D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x}) =$

$= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + \bar{a}(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p)}{x})$.**Теорема 6** доказана.

Теорема 7 . $\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x})$ -функции из условия **теоремы 5**. Тогда

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}) = (-1)^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x}),\ i = \overline{1,m}.$$

Доказательство. Проведем индукцией по n.

База индукции $n = 1$

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n=2)}{x}) = \varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x}) = \sum_{l=0}^{n=1} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}) = (-1)^0 D_t^0 (\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n=1)}{x})}{\partial x^{(0)i}}) + (-1)^1 D_t^1 (\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n=1)}{x})}{\partial x^{(1)i}}) =$$

$$= \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 D_t^1 (\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^{(p)j} \partial \dot{x}^i} \cdot x^{(p+1)j} =$$

$$= \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^{(0)j} \partial \dot{x}^i} x^{(0+1)j} + (-1)^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^{(1)j} \partial \dot{x}^i} x^{(1+1)j} =$$

$$= \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^i + (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} \ddot{x}^j = (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} \ddot{x}^j + g_i(x,\dot{x}).$$

Где $g_i(x,\dot{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^i$ База индукции доказана.

Индуктивный переход. Пусть утверждение верно для n .Докажем, что оно верно для $n+1$

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2(n+1))}{x}) = \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2(n+1))j} + g_i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2(n+1)-1)}{x}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(n+1)i}} x^{(2n+2)j} + g_i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n+1)}{x})$$

Для $n+1$ имеет место:

$$\sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) + (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)i}}\right)$$

По теореме 6:

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) + (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)i}}\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(l)i}} \cdot \overset{(n+1+l)j}{x} + a_l(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n+1+l-1)}{x})\right) +$$

$$+ (-1)^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(n+1)i}} \cdot \overset{(n+1+n+1)j}{x} + a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n+1+n+1-1)}{x})\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(l)i}} \cdot \overset{(n+1+l)j}{x} + a_l(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n+l)}{x})\right) +$$

$$+ (-1)^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(n+1)i}} \cdot \overset{(2n+2)j}{x} + a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n+1)}{x})\right).$$

Поскольку максимальный порядок производных в

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(l)i}} \cdot \overset{(n+1+l)j}{x} + a_l(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n+l)}{x})\right)$$

равен $\max\limits_{0 \le l \le n}(n+1, n+1+l, n+l) = \max\limits_{0 \le l \le n}(n+1+l) = n+n+1 = 2n+1$. Поэтому

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(l)i}} \cdot \overset{(n+1+l)j}{x} + a_l(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n+l)}{x})\right) + (-1)^{n+1} \cdot a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n+1)}{x}) = \bar{a}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n+1)}{x}).$$

$$\sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = (-1)^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(n+1)i}} \cdot \overset{(2n+2)j}{x} + \bar{a}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n+1)}{x})\right).$$

Индуктивный переход доказан. **Теорема 7** доказана.

Теорема 8. Для двух отображений
$\varepsilon_{(x)L}: \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_x(V \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m$, $\varepsilon_{(\bar{x})L}: \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_{\bar{x}}(V \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m$.

Рассмотрим 2 композиции отображений:
$\varepsilon_{(x)L} \circ \varphi_x : V \subset T^{2n}X_m \to \Re^m$ и $\varepsilon_{(\bar{x})L} \circ \varphi_{\bar{x}} : V \subset T^{2n}X_m \to \Re^m$ Тогда множества решений уравнений $\varepsilon_{(x)L} \circ \varphi_x(v^{2n}) = 0 \in \Re^m$ и $\varepsilon_{(\bar{x})L} \circ \varphi_{\bar{x}}(v^{2n}) = 0 \in \Re^m$
$v^{2n} \in W \subset T^{2n}X_m$ совпадают, то есть задают в $T^{2n}X_m$ одно и то же гладкое подмногообразие размерности $(2n+1)\cdot m - m = 2mn$.

Боле точно, имеет место равенство:

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\varphi_{\bar{x}}(v^{2n})) = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j_{(x)L}(\varphi_x(v^{2n})) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \qquad (17)$$

Доказательство $v^{2n} \in V \subset T^{2n}X_m, \varphi_x(v^{2n}) = (x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x})$ $\varphi_{\bar{x}}(v^{2n}) = \bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n)}{\bar{x}}$.
По теореме 5 имеет место следующее равенство:

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j_{(x)L}(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}$$. Поэтому

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\varphi_{\bar{x}}(v^{2n})) == \sum_{j=1}^m \varepsilon^j_{(x)L}(\varphi_x(v^{2n})) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}$$ то есть

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L} \circ \varphi_{\bar{x}}(v^{2n}) == \sum_{j=1}^m \varepsilon^j_{(x)L} \circ \varphi_x(v^{2n}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}.$$

Соотношение (17) доказано.

В матрице Якоби $\dfrac{\partial \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(k)j}{x}}, k = \overline{0,2n}, i = \overline{1,m}$ отображения
$\varepsilon_{(\bar{x})L}: \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_{\bar{x}}(V \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m$
размером $m \times (2n+1)\cdot m$ существует невырожденный минор порядка $m \times m$:

По **теореме 7** имеем

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D^l_t\left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = (-1)^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g_i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}),\ i = \overline{1,m}.$$

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D^l_t\left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = (-1)^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)k} + g_i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}), i = \overline{1,m}$$

$$\frac{\partial \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(2n)j}{x}} = (-1)^n \frac{\partial^2 L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}}, i, j = \overline{1,m}.$$

$$\frac{\partial \varepsilon^i_{(x)L}(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}\left((-1)^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)k} + g_i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x})\right) =$$

$$=\frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}\left((-1)^n\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k}\partial x^{(n)i}}x^{(2n)k}\right)+\frac{\partial g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}}=(-1)^n\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k}\partial x^{(n)i}}x^{(2n)k}\right)+\frac{\partial g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k}\partial x^{(n)i}}\right)\bullet x^{(2n)k}+\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k}\partial x^{(n)i}}\bullet\frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}(x^{(2n)k}))+\frac{\partial g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}}$$

Так как $g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})$, $\dfrac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k}\partial x^{(n)i}}$ не зависит от $\overset{(2n)j}{x}$ явно, то

$\dfrac{\partial g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}},\ \dfrac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}\left(\dfrac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k}\partial x^{(n)i}}\right)=0$. Поскольку

$\dfrac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}(x^{(2n)k}=\delta_j^k=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\neq k\end{cases}$ $-$ *символ Кронеккера*, то имеет равенство:

$$(-1)^n\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k}\partial x^{(n)i}}\right)\bullet x^{(2n)k}+\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k}\partial x^{(n)i}}\bullet\frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}(x^{(2n)k}))+\frac{\partial g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k}\partial x^{(n)i}}\bullet\frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}(x^{(2n)k}+\frac{\partial g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}}=(-1)^n\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k}\partial x^{(n)i}}\bullet\delta_j^k+\frac{\partial g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k}\partial x^{(n)i}}\bullet\delta_j^k=(-1)^n\bullet\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k}\partial x^{(n)i}},$$

где $\delta_j^k=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\neq k\end{cases}$ $-$ *символ Кронеккера*

Так как по условию функция $L: T^n X_m \supset \pi_n^{2n} W \to \Re$ – невырожденная, по **теореме 4**, в любых координатах $\det\left(\dfrac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}\right)\neq 0.$

Значит, $\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\right)\geq m$. С другой стороны, ранг матрицы Якоби

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\right)\leq \min(m,(2n+1)\bullet m)\leq m, k=\overline{0,2n}, i=\overline{1,m}).$$

Значит, $\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\right)=m$. Следовательно, система уравнений $\varepsilon_{(\bar{x})L}:\Re^{(2n+1)m}\supset\varphi_{\bar{x}}(W\subset T^{2n}X_m)\to\Re^m$ задает гладкое подмногообразие размерности $(2n+1)\cdot m-m=2mn$.

Теорема 8 доказана.

Рассмотрим V окрестность точки $v_0^{2n} \in T^{2n}X_m$, на которой определена проекция $\pi_{2n-1}^{2n}: T^{2n}X_m \to T^{2n-1}X_m$ (каноническая проекция). Окрестность $U(u_0^{2n-1}) = \pi_{2n-1}^{2n}\left(V(v_0^{2n})\right)$ – образ при каноническом проектировании окрестности V.

Функция $f: T^{2n-1}X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n}X_m$ представляет собой гладкое сечение и невырожденную функцию Лагранжа во всей области определения $L: T^n X_m \supset \pi_n^{2n-1}U \to \Re$.

Теорема 9 (инвариантный критерий решения задачи). Пусть σ_f – подмногообразие сечения f, то есть

$$\sigma_f = \sigma_f(U) = \left\{ v^{2n} \in V \subset T^{2n}X_m \mid v^{2n} = f(u^{2n-1}),\, u^{2n-1} \in U(u_0^{2n-1}) \right\},$$

а $\varepsilon_L(V)$ – лагранжево подмногообразие в $T^{2n}X_m$, то есть

$$\varepsilon_L(V) = \left\{ v^{2n} \in V \subset T^{2n}X_m \mid \varepsilon_{(x)L}(\phi_x(v^{2n})) = 0 \in \Re^m \right\}.$$

Два подмногообразия σ_f и ε_{L} совпадают

$$\sigma_f(U) = \sigma_f(\pi_{2n-1}^{2n}(V)) = \varepsilon_{\mathrm{L}}(V),$$

тогда и только тогда, если в любой локальной системе координат (x) в базе X_m

$$\varepsilon_{(x)L} \circ \phi_x \circ f : T^{2n-1}X_m \supset U(u_0^{2n-1}) \to 0 \in \Re^m.$$

Доказательство. **По теореме 8** решение уравнения $\varepsilon_{(x)L} \circ \varphi_x(v^{2n}) = 0 \in \Re^m$ не зависит от выбора локальных координат (x) в базе X_m. Значит, равенство композиции $\varepsilon_{(x)L} \circ \varphi_x \circ f : T^{2n-1}X_m \supset U(u_0^{2n-1}) = 0 \in \Re^m$ не зависит от выбора локальных координат Так как $f: T^{2n-1}X_m \supset U(u_0^{2n-1}) \to T^{2n}X_m$. -гладкое сечение, то в локальной системе координат (x) в базе X_m это сечение задается уравнением $\overset{(2n)i}{x} = f^i(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x})$ (18)
$\varepsilon_L(V)$ задается системой уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}} \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g^i(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}) = 0,\ i = \overline{1,m} \quad (19)$$

Равенство $\sigma_f(U) = \sigma_f(\pi_{2n-1}^{2n}(V)) = \varepsilon_{\mathrm{L}}(V)$ означает , что наборы $\overset{(2n)i}{x} = f(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x})$ являются решением системы уравнений (18) .Это значит, что

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n)}{x} = f(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x})) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} f^j(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}) + g^i(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}) = 0,\ i = \overline{1,m} \quad (20)$$

Пусть существует набор $(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}, \overset{(2n)}{x})$ являющийся решением (19), но не удовлетворяющий условию (18) , то есть $\overset{(2n)j}{x} = f_j(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}) + d_j$, $|d| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} d_j^2} \neq 0$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g^i(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}) = 0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} (f_j(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}) + d_j) + g^i(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} (f_j(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}) + g^i(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} d_j = 0,\ i = \overline{1,m}$$ В силу равенства (21)

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}(f_j(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x})+g^i(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x})=0,\ i=\overline{1,m}$$. Значит, $$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}d_j=0,\ i=\overline{1,m} \qquad (22)$$

Так как $L:T^nX_m\supset\pi_n^{2n-1}U\to\Re$ — невырожденная функция, то **по теореме 4** в любой системе координат $\det(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\partial \overset{(n)j}{x}})\neq 0$. Значит, существует обратная матрица

$$(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\partial \overset{(n)i}{x}})^{-1},\ k,i=\overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}=\delta_j^k\ ,\ \text{где}\ \ \delta_j^k=\begin{cases}1,\ j=k\\ 0,\ j\neq k\end{cases}-\text{символ Кронекера}$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}d_j)=\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}\cdot 0=0=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}d_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}d_j(\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}})=\sum_{j=1}^{m}d_j\,\delta_j^k=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}d_j\,\delta_j^k+d_k\delta_{j=k}^k=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}d_j\cdot 0+d_k\delta_k^k=d_k\ ,k=\overline{1,m} \qquad (23)$$

В правой части (22) $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}d_j\,\delta_j^k=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}d_j\cdot 0=0$ так как $\delta_j^k=\begin{cases}1,\ j=k\\ 0,\ j\neq k\end{cases}-\text{символ Кронекера}$

То есть $\overline{d}=(d_1,d_2,...,d_m)=(0,0,...,0)=\overline{0}$. Получили противоречие с тем, что $\overset{(2n)j}{x}=f_j(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x})+d_j\ ,\ |\,d\,|=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}d_j^2}\neq 0$. Значит, решением системы (19) являются только наборы вида (18). **Теорема 9** доказана.

Следствие из **теоремы 9** вытекает, что лагранжевость сечения $f:T^{2n-1}X_m\supset U(v_0^{2n-1})\to T^{2n}X_m$ которое в локальной системе координат задается системой ОДУ $\overset{(2n)j}{x}=f^j(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}),\ j=\overline{1,m}$ в точности означает существоование невырожденной матрицы $a_{ij}(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})$, $\det(a_{ij}(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x}))\neq 0$ такой что

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})(\overset{(2n)j}{x}-f^j(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}))=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})\cdot 0=0\ .$$

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n)}{x})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}x^{(2n)j}+g_i(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x})=0,\ i=\overline{1,m}$$

Итак, сформулированная выше задача лагранжевых сечений в расслоенных пространствах скоростей в локальных координатах означает существование невырожденной системы уравнений Эйлера-Лагранжа,разрешая которую относительно старших производных можно получить ОДУ с заданной правой частью.
Возникает естественный вопрос: существуют ли не лагранжевы сечения. Оказывается при $n>1$ существует прозрачный необходимый признак.

Теорема 10. $L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})$-локальная запись функции $L: T^n X_m \to \Re$ в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X$ Тогда

$$D_t^k L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}) = \sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,...k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C_{k_1,...k_r}^{j_1,j_2,...,j_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r} + h(x,...,\overset{(n)}{x}),\ k\ge 1 \qquad (24)$$

Доказательство. Проведем индукцией по k.

База индукции $k=1$:

$$D_t^k L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}) = \sum_{p=1}^{k=1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,...,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C_{k_1,...,k_r}^{j_1,j_2,...,j_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r} + h(x,...,\overset{(n)}{x}) =$$

$$= \sum_{r=1}^{p=1}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,...,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C_{k_1,...,k_r}^{j_1,j_2,...,j_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r} + h(x,...,\overset{(n)}{x}) = \qquad (25)$$

Так как $r = p = 1$, то выражение (25) примет вид $\sum_{\substack{n+1\le k_1,...k_r 1\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C_{k_1,...k_r}^{j_1,j_2,...,j_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r} + h(x,...,\overset{(n)}{x}) =$

$$= \sum_{j_1=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1\\ k_1=n+1}} C_{k_1,...,k_r}^{j_1,j_2,...,j_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r} + h(x,...,\overset{(n)}{x}) = \sum_{j_1=1}^{m} C_{n+1}^{j_1,}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(n+1)j_1} + h(x,...,\overset{(n)}{x}) \qquad (26)$$

$$D_t^{k=1} L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}) = D_t L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}) = \sum_{j_1=1}^{m}\sum_{p=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(p)j_1}}x^{(p+1)j_1} = \sum_{j_1=1}^{m}\left(\sum_{p=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(p)j_1}}x^{(p+1)j_1} + \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j_1}}x^{(n+1)j_1}\right) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(p)j_1}}x^{(p+1)j_1} + \sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j_1}}x^{(n+1)j_1} = \sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j_1}}x^{(n+1)j_1} + h(x,...,\overset{(n)}{x})$$

База индукции доказана.

Индуктивный переход.

Пусть утверждение верно для k. Докажем, что оно верно для $k+1$:

$$D_t^{k+1} L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}) = \sum_{p=1}^{k+1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,...k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} \bar{C}_{k_1,...k_r}^{j_1,j_2,...,j_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r} + \bar{h}(x,...,\overset{(n)}{x}),\ k\ge 1 \qquad (27)$$

По предположению индукции:

$$D_t^k L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}) = \sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,...,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C_{k_1,...,k_r}^{j_1,j_2,...,j_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r} + h(x,...,\overset{(n)}{x}),\ k\ge 1$$

Учитывая, что $D_t(\prod_{s=1}^{r} f_s) = \sum_{u=1}^{r}\frac{\prod_{s=1}^{r} f_s}{f_u}D_t f_u$, получим

$$D_t^{k+1}L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})=D_t(D_t^kL(x,\dot{x},\ldots,x))=D_t(\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h(x,\ldots,\overset{(n)}{x}))=$$

$$=\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}D_tC_{k_1,\ldots,k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+D_th(x,\ldots,\overset{(n)}{x})+$$

$$+\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})D_tx^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot D_tx^{(k_r)j_r}=$$

$$=\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}D_tC_{k_1,\ldots,k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+D_th(x,\ldots,\overset{(n)}{x})+$$

$$+\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1+1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+\ldots+\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}x^{(k_2+1)j_2}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+$$

$$+\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots,k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r+1)j_r}= \qquad (28)$$

Условие равносильно $\sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{r}(k_i-n)=p$

$$D_tC_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{u=0}^{n}\frac{\partial C_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{x^{(u)j}}x^{(u+1)j}=\sum_{j=1}^{m}B_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(n+1)j}+D_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})$$

То есть набору $(k_1,\ldots,k_r):\sum_{i=1}^{r}(k_i-n)=p$ в сумме

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}D_tC_{k_1,\ldots,k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} \qquad (29)$$

будет соответствовать набор $(k_1,\ldots,k_r,k_{r+1}=n+1):\sum_{i=1}^{r+1}(k_i-n)=\sum_{i=1}^{r}(k_i-n)+(n+1-n)=p+1$

В (29) $r\le p\le k\Rightarrow r+1\le k+1, p+1\le k+1$,а так как в (27) $r\le p\le k+1$,то все слагаемые вида(29) войдут в сумму (27).

Каждому набору $(k_1,\ldots,k_i,\ldots,k_r):\sum_{j=1}^{r}(k_j-n)=p$ в сумме (28):

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots,k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots x^{(k_i+1)j_i}\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}$$

соответствует набор $(k_1,..,k_i+1,.,k_r):\sum_{j=1}^{r}(k_j-n)=p+1$.

В (28) $r\le p\le k \Rightarrow p+1\le k+1$,а так как в (27) $r\le p\le k+1$,то все слагаемые вида(28) войдут в сумму (27).Еще одно слагаемое в (28)

$$D_t h(x,...,\overset{(n)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{u=0}^{n}\frac{\partial h(x,...,\overset{(n)}{x})}{x^{(u)j}}x^{(u+1)j}=\sum_{j=1}^{m}B(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(n+1)j}+D(x,...,\overset{(n)}{x})$$

Очевидно, входит в сумму (27) при $r=p=1$ и в свободный член $\overline{h}(x,...,\overset{(n)}{x})$ (27) Итак, все слагаемые суммы (28) являются членами суммы (27) Индуктивный переход доказан. **Теорема 10** доказана.

Замечание. Все слагаемые в сумме при $l\ge 1, l<k$

$$D_t^l L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})=\sum_{p=1}^{l}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,...k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,...k_r}^{j_1,j_2,...,j_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r}+h(x,...,\overset{(n)}{x})\ ,l\ge 1,l<k \qquad (30)$$

Структурно входят в сумму (24) ,так как $l\le k$, и все условия в сумме (30) выполняются для суммы (24)

Замечание. $k_1-n=s_1, k_2-n=s_2,...,k_r-n=s_r \Rightarrow s_1\ge 1, s_2\ge 1,...,s_r\ge 1 \quad k_1=s_1+n,...,k_r=s_r+n$

$$D_t^l L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})=\sum_{p=1}^{l}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{1\le s_1,...,s_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=p}}C_{s_1,...,s_r}^{j_1,j_2,...,j_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(s_1+n)j_1}\cdot...\cdot x^{(s_r+n)j_r}+h(x,...,\overset{(n)}{x})\ ,l\ge 1$$

Теорема 11. Пусть $\overset{(2n)i}{x}=f_j(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}), i=\overline{1,m}$ - локальная запись в системе (x) в базе X_m гладкого сечения $f:T^{2n-1}X_m\supset U(u_0^{2n-1})\to T^{2n}X_m$, $n>1$, являющегося лагранжевым сечением в окрестности $U(u_0^{2n-1})$ карты $(U(u_0^{2n-1}),\varphi_x)$

$\varphi_x:U(u_0^{2n-1})\to\Re^{2mn}$ - координатный диффеоморфизм

$\varphi_x(U(u_0^{2n-1}))=W_{\Re^{2mn}(x)}(x_0,\overset{\bullet}{x}_0,...,\overset{(2n-1)}{x_0})\subset\Re^{2mn}$

$\varphi_x(U(u_0^{2n-1}))=(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x})$ Тогда

$$f_i(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x})=\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{1\le s_1,...,s_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=n}}C_{s_1,...,s_r}^{ij_1,j_2,...,j_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(n+s_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(n+s_r)j_r}+$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,...k_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=p}}C_{s_1,...,s_r}^{ij_1,j_2,...,j_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(n+s_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(n+s_r)j_r}+h_i(x,...,\overset{(n)}{x}) \qquad (31)$$

Доказательство. На основании **теоремы 7** получим

$$\varepsilon_{(x)L}^{i}(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n)}{x})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}x^{(2n)j}+g_i(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x})=0,\ i=\overline{1,m}.$$

Разрешая эту систему относительно старших производных, умножая обе части на $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\right)^{-1}$, в силу невырожденности функции $L: T^n X_m \to \Re^m$ $(\det(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}}) \neq 0)$, $f_i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-1)}{x}) = -\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\right)^{-1} g_j(x,\dot{x},...,\overset{(2n-1)}{x})$, получим систему ОДУ $\overset{(2n)i}{x} = f_i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-1)}{x}), i=\overline{1,m}$.

Член со старшей производной в сумме $\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right)$ (32)

равен $D_t^n\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\right)$ На основании **теоремы 10** имеет место равенство**:**

$$D_t^n\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\right) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,...k_r \\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C^{ij_1,j_2,...,j_r}_{k_1,...k_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r} + h_i(x,...,\overset{(n)}{x}),\ n\ge 1 \tag{33}$$

По **замечанию к теореме 10** все члены суммы (34) при $l<n$ структурно входят в сумму (33)

$$D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\right) = \sum_{p=1}^{l}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,...k_r \\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C^{ij_1,j_2,...,j_r}_{k_1,...k_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r} + h_i(x,...,\overset{(n)}{x}),\ l\ge 1 \tag{34}$$

Поэтому вся сумма (32) будет структурно иметь вид (33):

$$D_t^n\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\right) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,...k_r \\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C^{ij_1,j_2,...,j_r}_{k_1,...k_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r} + h_i(x,...,\overset{(n)}{x})\ (n\ge 1) \tag{35}$$

По теореме 7 $C^{ij_1}_{2n}(x,...,\overset{(n)}{x}) = \frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j_1}{x}}$ (36)

Слагаемым $\overset{(2n)j_1}{x}$, $j_1=\overline{1,m}$ в (35) с максимальным порядком производной, равным $2n$,имеющим коэффициенты вида (36) соответствует условие $\sum_{i=1}^{r=1}(k_i-n)=n \Rightarrow k_1=2n$ то есть $r=1, p=n$.

Все остальные слагаемые в (35) зависят от производных

Порядка не выше $2n-1$. Поэтому выделение в (35) слагаемых $\overset{(2n)j_1}{x}$, $j_1=\overline{1,m}$ в отдельную сумму $\sum_{j_1=1}^{m} C^{ij_1}_{2n}(x,...,\overset{(n)}{x})\overset{(2n)j_1}{x} = \sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j_1}{x}}\overset{(2n)j_1}{x}$ означает исключение из (35) слагаемых с $r=1 u\ p=n$.

Отрицание условие $(r=1) \wedge (p=n)$ ***имеет вид***

$\overline{(r=1) \wedge (p=n)} = \overline{r=1} \vee \overline{p=n} = (r\neq 1) \vee (p\neq n)$

Условие $(r \neq 1) \wedge (p \neq n)$ включается в условие $(p \neq n)$ Это следует из

$(r \neq 1) = (r \neq 1) \wedge 1 = (r \neq 1) \wedge ((p = n) \vee (p \neq n)) = (r \neq 1) \wedge (p = n) \vee (r \neq 1) \wedge (p \neq n)$

$(r \neq 1) \vee (p \neq n) = ((r \neq 1) \wedge (p = n) \vee (r \neq 1) \wedge (p \neq n)) \vee (p \neq n) =$

$((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee ((r \neq 1) \wedge (p \neq n)) \vee (p \neq n) = ((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee ((r \neq 1) \wedge (p \neq n)) \vee (p \neq n) \wedge 1) =$

$((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee ((r \neq 1) \vee 1) \wedge (p \neq n) = ((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee ((r \neq 1) \vee 1) \wedge (p \neq n)$

Так как $((r \neq 1) \vee 1) = 1$ и $((r \neq 1) \vee 1) \wedge (p \neq n) = 1 \wedge (p \neq n) = (p \neq n)$ то,

$((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee ((r \neq 1) \vee 1) \wedge (p \neq n) = ((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee (p \neq n)$

Итак, $(r \neq 1) \vee (p \neq n) = ((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee (p \neq n) = (r \geq 2) \wedge (p = n)) \vee (p \leq n-1)$ (37)

Условия** $((r \neq 1) \wedge (p = n))$ **и** $(p \leq n-1)$ **не пересекаются.

$$D_t^n\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\right) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\leq k_1,\ldots k_r \\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C_{k_1,\ldots k_r}^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + h_i(x,\ldots,\overset{(n)}{x}) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m} C_{2n}^{ij_1}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})\overset{(2n)j_1}{x} + \sum_{p=1}^{n}\sum_{\substack{r=1 \\ (r\neq 1)\vee(p\neq n)}}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\leq k_1,\ldots,k_r \\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C_{k_1,\ldots,k_r}^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + h_i(x,\ldots,\overset{(n)}{x}) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m} C_{2n}^{ij_1}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})\overset{(2n)j_1}{x} + \sum_{p=1}^{n}\sum_{\substack{r=1 \\ ((r\geq 2)\wedge(p=n))\ \vee(p\leq n-1)}}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\leq k_1,\ldots,k_r \\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C_{k_1,\ldots,k_r}^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + h_i(x,\ldots,\overset{(n)}{x}) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j_1}{x}}\overset{(2n)j_1}{x} + \sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\leq k_1,\ldots,k_r \\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+n}} C_{k_1,\ldots,k_r}^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\leq k_1,\ldots,k_r \\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C_{k_1,\ldots,k_r}^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + h_i(x,\ldots,\overset{(n)}{x}) \qquad (38)$$

Итак, уравнения $\varepsilon_{(x)L}^{i}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = 0$ структурно будут иметь вид (38):

$$\sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j_1}{x}}\overset{(2n)j_1}{x} = -\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\leq k_1,\ldots,k_r \\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+n}} C_{k_1,\ldots,k_r}^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} -$$

$$-\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\leq k_1,\ldots,k_r \\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C_{k_1,\ldots,k_r}^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + h_i(x,\ldots,\overset{(n)}{x}) \qquad (39)$$

Так как $\left(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\,\partial \overset{(n)j_1}{x}}\right)^{-1}$ зависит от производных порядка n. При умножении обеих частей (39) на обратную матрицу $\left(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\,\partial \overset{(n)j_1}{x}}\right)^{-1}$ правая часть (39) сохранит свой структурный вид

$$\overset{(2n)i}{x} = f_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x}) = \sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i=m+n}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})\,x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} +$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i=m+p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})\,x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x}) \qquad (40)$$

При замене переменных в (40)
$k_1-n=s_1, k_2-n=s_2,\dots,k_r-n=s_r \Rightarrow s_1\ge 1, s_2\ge 1,\dots,s_r\ge 1 \quad k_1=s_1+n,\dots,k_r=s_r+n$ получим:

$$\overset{(2n)i}{x} = f_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x}) = \sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{1\le s_1,\dots,s_r\\ \sum_{i=1}^{r} s_i=n}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})\,x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r} +$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} s_i=p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})\,x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r} + h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x}) \qquad (40)$$

Теорема 11 доказана.

Теорема 12 . Пусть $\overset{(2n)i}{x} = f_j(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x}), i=\overline{1,m}$ - локальная запись в системе (x) в базе X_m гладкого сечения $f: T^{2n-1}X_m \supset U(u_0^{2n-1}) \to T^{2n}X_m$, $n>1$, являющегося лагранжевым сечением в окрестности $U(u_0^{2n-1})$ Тогда

$$f_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x}) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{kji}(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})\,\overset{(n+1)k}{x}\,\overset{(2n-1)j}{x} + \sum_{j=1}^{m} b_{ji}(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})\,\overset{(2n-1)j}{x} \quad + \quad c_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-2)}{x}) \quad i=\overline{1,m}$$

Доказательство. Следует из **теоремы 11** равенство (31):

$$f_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x}) = \sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{1\le s_1,\dots,s_r\\ \sum_{i=1}^{r} s_i=n}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})\,x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r} +$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} s_i=p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})\,x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r} + h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x}) \qquad (41)$$

Слагаемые со старшей производной в $\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{1\le s_1,\ldots,s_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=n}} C^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}_{s_1,\ldots,s_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}$ имеют

вид $a(x,\overset{\bullet}{x},\ldots,\overset{(n)}{x})\overset{(n+n-1)}{x}\overset{(n+1)}{x}$. Это следует при $r=2$ из $s_1+s_2=n$,то решениями являются наборы $(s_1,s_2)=(n-1,1)$, $(s_1,s_2)=(n-2,2)$, $\ldots$ Член со старшей производной - $a(x,\overset{\bullet}{x},\ldots,\overset{(n)}{x})\overset{(2n-1)}{x}\overset{(n+1)}{x}$.

Аналогично слагаемые со старшей производной во второй сумме

$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=p}} C^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}_{s_1,\ldots,s_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}+h_i(x,\ldots,\overset{(n)}{x})$ имеют вид

$b(x,\overset{\bullet}{x},\ldots,\overset{(n)}{x})\overset{(n+n-1)}{x}$. Это следует при $r=1, p=n-1$ из $s_1=p=n-1$,то решениями являются наборы $(s_1)=(n-1)$ Член со старшей производной - $b(x,\overset{\bullet}{x},\ldots,\overset{(n)}{x})\overset{(2n-1)}{x}$.

Теорема12 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин В. А. Современная геометрия. Методы и приложения / В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М.: УРСС, 1994.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М.: Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1974.
5. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – Т. 2: Теория поля. – 512 с.
6. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – Т. 1: Механика. – 214 с.
7. Галеев Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
8. Дирак П. Лекции по квантовой механике / П. Дирак. – М.: Мир, 1968.
9. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5– 246.
10. Трофимов В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995.
11. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, О.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2015. - № 12. - С. 117-123
13. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф.Пастухов, Д.Ф /Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2015. - № 4. - С. 27- 36
14.Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого

государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2017. - № 12. - С. 78-100.
15. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2018. - № 4. - С. 194-209.
16. Сборник статей по дифференциальной геометрии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094
17. Необходимые условия в обратной вариационной задаче / Ю.Ф. Пастухов // Фундамент. и прикл. матем., **7**:1 (2001), 285–288 http://mi.mathnet.ru/rus/fpm/v7/i1/p285 http://mi.mathnet.ru/fpm550.

LAGRANGIAN SECTIONS

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV
(POLOTSK STATE UNIVERSITY)

Annotation. The concept of Lagrangian sections in fibered velocity spaces of arbitrary order is defined invariantly, their properties are formulated and proved, an invariant criterion for solving the problem is given, a necessary condition for Lagrangian sections and ODE systems of arbitrary even order is obtained.

УДК 514

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНА В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов
(Полоцкий государственный университет)

Аннотация: В работе рассматриваются свойства функций Гамильтона и Лагранжа в координатно - импульсном пространстве и в расслоенном пространстве скоростей. Основным полученным результатом для двух матриц Гессе от функции Лагранжа и функции Гамильтона является утверждение : случае локальной не вырожденности матрицы Гессе от функции Гамильтона по импульсам максимального порядка (матрицы Гессе от функции Лагранжа по скоростям максимального порядка) указанные матрицы Гессе взаимно обратны. Получен ряд вспомогательных результатов, например, о квазилинейной форме временной производной порядка k от обобщенной координаты по скоростям расслоенного пространства порядка k для невырожденной замены координат. Получены интересные тождества в координатно импульсном пространстве q-p для частной производной между координатами расслоенного пространства (координата-координата, импульс – импульс). Получены формулы, связывающие частные производные в координатно импульсном пространстве q-p для функций Лагранжа и Гамильтона по одним и тем же переменным.

Ключевые слова: Функция Гамильтона, вариационная задача, расслоённое пространство скоростей, уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, тензор обобщенного импульса, невырожденный гессиан.

Введение.

Гамильтон в 1835 году получил новую форму уравнений движения механических систем канонические уравнения Гамильтона. В 1848 году М. В. Остроградский распространил принцип Гамильтона на случай систем с нестационарными голономными связями, после чего распространилось название принцип Гамильтона — Остроградского. Полученная система канонических уравнений содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем у Лагранжа, но зато все они первого порядка, (у Лагранжа — второго). Высоко отозвался о работах Гамильтона по динамике член-корреспондент АН СССР Л. Н. Сретенский, отметивший: «Эти работы легли в основу всего развития аналитической механики в XIX веке». Аналогичное мнение выразил академик РАН В. В. Румянцев: «Оптико-механическая аналогия Гамильтона определила на столетие прогресс аналитической механики». По мнению профессора Л. С. Полака, это была «теория, почти не имеющая аналогов в механике по общности и абстрактности», открывшая колоссальные возможности в механике и смежных науках.

Академик В. И. Арнольд следующим образом охарактеризовал возможности, открывшиеся после появления гамильтоновой механики: Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряда задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.).

Подход Гамильтона оказался высоко эффективным во многих математических моделях физики. На этом плодотворном подходе основан, например, многотомный учебный курс «Теоретическая физика» Ландау и Лифшица. Первоначально вариационный принцип Гамильтона был сформулирован для задач механики, но при некоторых естественных предположениях из него выводятся уравнения

Максвелла электромагнитного поля. С появлением теории относительности оказалось, что этот принцип строго выполняется и в релятивистской динамике. Его эвристическая сила существенно помогла разработке квантовой механики, а при создании общей теории относительности Давид Гильберт успешно применил гамильтонов принцип для вывода уравнений гравитационного поля (1915 год).Из сказанного следует, что принцип наименьшего действия Гамильтона(и естественным образом связанная с ним система канонических уравнений) занимает место среди коренных, базовых законов природы — наряду с законом сохранения энергии и законами термодинамики.

Вариационное исчисление является одним из старейших и богатых содержанием и приложениями разделов математического анализа. Вариационные задачи (например, изопериметрические) рассматривались и в древности, но исследовались геометрическими методами. Поэтому началом зарождения вариационного исчисления можно считать работу Ферма 1662 г., в которой аналитическими методами исследована задача о распространении света из одной оптической среды в другую и о преломлении света на границе двух сред. Далее аналогичные (но более общие) вариационные задачи исследовались Ньютоном (задача о наименьшей поверхности вращения - в 1685 г.), Д. Бернулли (задача о брахистохроне) и др.

Теоретико-групповая точка зрения Клейна, изложенная в его «Эрлангенской программе» (1872), то есть: геометрия — учение об инвариантах групп преобразований, в применении к дифференциальной геометрии была развита Картаном, который построил теорию пространств проективной связности и аффинной связности.

Основная задача дифференциальной геометрии состоит в нахождении и описании дифференциальных инвариантов геометрических структур. Необходимым аппаратом здесь является исчисление струй. Это понятие интенсивно использовалось в теории геометрических структур высшего порядка в работах В.В.Вагнера, Г.Ф.Лаптева, Л.Е.Евтушика, М.О.Рахулы, а в последнее время в теории особенностей гладких отображений М.Голубицким, В.Гийеминым и геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений А.М.Виноградовым, В.В.Лычагиным. Представленная работа является продолжением работ авторов [9, 10,13,16,17,18,19,20].

Постановка задачи и основные определения.

Введем обозначения для дифференциально-геометрических структур, используемых в работе: X_m – гладкое многообразие размерности *m*; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка *n* с базой расслоения X_m; $L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$.

Функция Гамильтона $H(q,p): \Re^{2mn} \to \Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}, l1=\overline{1,n}, j2=\overline{1,m}, l2=\overline{1,n}$

$$p=\bar{p}=(p_1^{j1},p_2^{j1},...,p_n^{j1})=(p_1^1 p_1^2 ... p_1^m, p_2^1 p_2^2 ... p_2^m,...,p_n^1,...,p_n^m)=(p_{l1}^{j1}) \qquad j1=\overline{1,m} \quad l1=\overline{1,n}$$

$$q=\bar{q}=(q_1^{j2},q_2^{j2},...,q_n^{j2})=(q_1^1 q_1^2 ... q_1^m, q_2^1 q_2^2 ... q_2^m,...,q_n^1,...,q_n^m)=(q_{l2}^{j2}) \qquad j2=\overline{1,m} \quad l2=\overline{1,n}$$

$$L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$$ -функция Лагранжа, двойственная к функции Гамильтона.

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$ где

$L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функция $p_{k,n}^i$ читается как $k-ая$ компонента обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульс порядка k (k -импульс) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Постановка задачи.

Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе: X_m – гладкое многообразие размерности *m*; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка *n* с базой расслоения X_m; $L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$ [9].

Поставим следующую задачу,- какими свойствами обладает *Функция Гамильтона* $H(q,p): \Re^{2mn} \to \Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}, l1=\overline{1,n}, j2=\overline{1,m}, l2=\overline{1,n}$ и функция Лагранжа, двойственная к функции Гамильтона $L(p,q) = -H(p,q) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$ и какие связи между двумя данными функциями $H(q,p): \Re^{2mn} \to \Re$, $L(p,q): \Re^{2mn} \to \Re$.

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $\overline{x}^i = S^i(x_1, x_2, ..., x_m)$, здесь $S:(x) \to (\overline{x})$ – гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p \ge \max(s,l)$, $i = \overline{1,m}$, тогда

$$D_t^k x^i(\overline{x}) = x^{(k)i}(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} \overset{(k)j}{\overline{x}} + f(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\overline{x}}) \quad k \ge 1 \tag{1}$$

где $f(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\overline{x}})$ - некоторая гладкая функция

$$\overline{x}, \dot{\overline{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\overline{x}}, \quad \overset{(s)}{\overline{x}} = (\overset{(s)1}{\overline{x}}, ..., \overset{(s)m}{\overline{x}}), \quad \overset{(s)j}{\overline{x}} = D_t^s \overline{x}^j \quad s = \overline{0, k-1}$$

Доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k=1$

$D_t^1 x^i(\overline{x}) = x^{(1)i}(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} \overset{(1)j}{\overline{x}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} \dot{\overline{x}}^j$ проверено. Проверим для k=2

$$D_t^2 x^i(\overline{x}) = x^{(2)i}(\overline{x}) = D_t^1\Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} \overset{(1)j}{\overline{x}}\Big) = \sum_{j=1}^{m} D_t^1\Big(\frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\Big)\dot{\overline{x}}^j + \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} D_t^1 \dot{\overline{x}}^j = \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^l \partial \overline{x}^j} \dot{\overline{x}}^l \dot{\overline{x}}^j +$$

$+\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} \ddot{\overline{x}}^j = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} \ddot{\overline{x}}^j + f(\overline{x}, \dot{\overline{x}}), \quad f(\overline{x}, \dot{\overline{x}}) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^l \partial \overline{x}^j} \dot{\overline{x}}^l \dot{\overline{x}}^j$. *Проверено. для* $k=2$ Индуктивный переход.

Пусть $D_t^k x^i(\overline{x}) = x^{(k)i}(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} \overset{(k)j}{\overline{x}} + f(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\overline{x}})$. Тогда

$$D_t^{k+1} x^i(\overline{x}) = D_t^1 x^{(k)i}(\overline{x}) = D_t\Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} \overset{(k)j}{\overline{x}} + f(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\overline{x}})\Big) = \sum_{j=1}^{m} D_t\Big(\frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} \overset{(k)j}{\overline{x}}\Big) + D_t\big(f(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\overline{x}})\big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} D_t\Big(\frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\Big) \overset{(k)j}{\overline{x}} + \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} D_t(\overset{(k)j}{\overline{x}}) + D_t\big(f(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\overline{x}})\big) \tag{2}$$

Поскольку $D_t\Big(\frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\Big) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \overline{x}^l}\Big(\frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\Big)\dot{\overline{x}}^l = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^l \partial \overline{x}^j} \dot{\overline{x}}^l$ и $D_t(\overset{(k)j}{\overline{x}}) = \overset{(k+1)j}{\overline{x}}$, то (2) равно

$$\sum_{j=1}^{m} D_t\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(k)j}{x} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t(\overset{(k)j}{x}) + D_t(f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{x})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^l\right)\overset{(k)j}{x} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(k+1)j}{x} + \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{x})}{\partial \overset{(s)j}{x}}\overset{(s+1)j}{x} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(k+1)j}{x} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{x}),\ 0+1 \le s+1 \le k-1+1 = k \quad (3)$$

В (3) сгруппируем члены : $\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(k+1)j}{x} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{x})$, $0+1 \le s+1 \le k-1+1 = k$, где

$$f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^l\right)\overset{(k)j}{x} + \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{x})}{\partial \overset{(s)j}{x}}\overset{(s+1)j}{x}$$

. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_m)$ $S:(\bar{x}) \to (x)$, - гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p \ge \max(s,l)$ $i = \overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} = \begin{cases} C_k^p \cdot D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_k^p = \frac{k!}{p!\cdot(k-p)!}, k! = \prod_{j=1}^{k} j, k \ge p \\ 0, k < p \end{cases}$$

Доказательство. При $k < p$ по Теореме 1 имеем

$$x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{x} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{x}) \quad k \ge 1$$

Поэтому

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{x}}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{x} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{x})\right) = 0$$

При $k \ge p$ доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k = p$

По **Теореме 1**, имеем
$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{x}}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{x} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{x})\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial \overset{(k)l}{x}}{\partial \overset{(k)j}{x}}\right) + \frac{\partial f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\delta_j^l = \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \qquad \delta_j^l = \begin{cases}1, j = l \\ 0, j \ne l\end{cases} - \textit{символ Кронекера}$$

База индукции доказана. Индуктивный переход. Пусть утверждение теоремы справедливо при $k \ge p$

Введем функции $F_k^i(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{x}) = x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{x})$, $\overset{(k+1)i}{x} = D_t(x^{(k)i}) = D_t F_k^i = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}}\overset{(s+1)l}{x}$.

$$\frac{\partial x^{(k+1)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(l)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{x}}\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}}\overset{(s+1)l}{x}\right) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{x}\partial \overset{(s)l}{x}}\overset{(s+1)l}{x} + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}}\frac{\partial x^{(s+1)l}}{\partial \overset{(p)j}{x}}\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{x}\partial \overset{(s)l}{x}}\overset{(s+1)l}{x}\right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}}\delta_p^{s+1}\delta_j^l = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}\partial \overset{(p)j}{x}}\overset{(s+1)l}{x}\right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p-1)j}{x}} \quad (4)$$

По предположению индукции $\dfrac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)}{\bar{x}}{}^{j}} = \dfrac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p)}{\bar{x}}{}^{j}} = C_k^p D_t^{k-p}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)$. Значит, (4) равно

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(s)}{\bar{x}}{}^{l}\,\partial \overset{(p)}{\bar{x}}{}^{j}}\overset{(s+1)l}{\bar{x}}\right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p-1)}{\bar{x}}{}^{j}} = C_k^p\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)}{\bar{x}}{}^{l}}\left(D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\right)D_t\overset{(s)l}{\bar{x}}\right) + C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) =$$

$$= C_k^p\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-p}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)}{\bar{x}}{}^{l}}\left(D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-p)}{\bar{x}})\right)D_t\overset{(s)l}{\bar{x}}\right) + C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right). \tag{5}$$

Так как $C_k^p + C_k^{p-1} = \dfrac{k!}{p!(k-p)!} + \dfrac{k!}{(p-1)!(k-(p-1))!} = \dfrac{k!}{p!(k-p)!}\left(1+\dfrac{p}{k-p+1}\right) = \dfrac{(k+1)!}{p!(k-p+1)!} = C_{k+1}^p$ и (6)

$$D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-p)}{\bar{x}}) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-p}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)}{\bar{x}}{}^{l}}\left(D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-p)}{\bar{x}})\right)D_t\overset{(s)l}{\bar{x}} \tag{7}$$

Учитывая (6) и (7) получим выражение для (5):

$$C_k^p\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-p}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)}{\bar{x}}{}^{l}}\left(D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-p)}{\bar{x}})\right)D_t\overset{(s)l}{\bar{x}}\right) + C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) =$$

$$= C_k^p D_t\left(D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\right) + C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) = (C_k^p + C_k^{p-1})D_t^{k+1-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) = C_{k+1}^p D_t^{k+1-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right).$$

Теорема 2 доказана.

Пусть $H(q,p)$ - функция $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$: (нижние индексы меняются от 1 до n , верхние индексы меняются от 1 до m)

$$p=\bar{p}=(p_1^{j1},p_2^{j1},...,p_n^{j1})=(p_1^1p_1^2...p_1^m,p_2^1p_2^2...p_2^m,...,p_n^1,...,p_n^m)=(p_{l1}^{j1}) \qquad j1=\overline{1,m} \quad l1=\overline{1,n}$$

$$q=\bar{q}=(q_1^{j2},q_2^{j2},...,q_n^{j2})=(q_1^1q_1^2...q_1^m,q_2^1q_2^2...q_2^m,...,q_n^1,...,q_n^m)=(q_{l2}^{j2}) \qquad j2=\overline{1,m} \quad l2=\overline{1,n}$$

Теорема 3. Пусть $s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$. Тогда

$$1)\ \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = \begin{cases}(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\ ,\ s=1, k=\overline{1,n}\ ,\ i,j=\overline{1,m}\\ (1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\ ,\ 2\le s\le n, k=\overline{1,n}\ ,\ i,j=\overline{1,m}\end{cases} = \delta_j^i\,\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1)\ ,\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m} \tag{8}$$

$$2)\ \frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} = \frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} = 0\ ,\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m} \tag{9}$$

$$3)\ \frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i} = \delta_i^j\delta_s^k \tag{10}$$

$$\text{Где } \delta_\beta^\alpha = \begin{cases}1,\ \alpha=\beta\\ 0\ ,\ \alpha\ne\beta\end{cases} - \textit{символ Кронекера}$$

Доказательство. $1\le k\le n-1 \Rightarrow 2\le k+1\le n$, $1\le s\le n$ Поэтому при $s=1$

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = 0 = 1-1 = 1-\delta_s^1 = (1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1},\ i,j=\overline{1,m} \text{ где } \delta_s^1 = \begin{cases}1, s=1\\0, s\ne 1\end{cases} = \begin{cases}1, s=1\\0, s\ge 2\end{cases} - \textit{символ Кронекера}$$

При $s=1$ формула (7) доказана.

где $\delta_j^i = \begin{cases}1, i=j\\0, i\ne j\end{cases} - \textit{символ Кронекера}$, где $\delta_s^{k+1} = \begin{cases}1, s=k+1\\0, s\ne k+1\end{cases} - \textit{символ Кронекера}$

при $\quad 2\le s\le n$ $\qquad \dfrac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\begin{cases}1,\ (i=j)\wedge(s=k+1)\\ 0,\ (i\ne j)\vee(s\ne k+1)\end{cases}=\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1)\ ,\ i,j=\overline{1,m}$

или $\dfrac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\begin{cases}(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\ ,\ s=1,k=\overline{1,n}\ ,\ i,j=\overline{1,m}\\ (1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\ ,\ 2\le s\le n,k=\overline{1,n}\ ,\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1)\ ,\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$

Вторая и третья части теоремы очевидны:

$\dfrac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}=\dfrac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}=0$, так переменные p , q независимы , $s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$

$\dfrac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}=\begin{cases}1\ ,(i=j)\wedge(k=s)\\ 0\ ,(i\ne j)\vee(k\ne s)\end{cases}=\delta_i^j\delta_s^k$ Условие во второй строке, очевидно, является отрицанием условия в первой: $\overline{(i=j)\wedge(k=s)}=\overline{(i=j)}\vee\overline{(k=s)}=(i\ne j)\vee(k\ne s)$

Теорема3 доказана.

Теорема 4. Пусть (q,p) - $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}, l1=\overline{1,n}, j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}$. Тогда при $s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$ и произвольных $p_k^j\in\Re$ выполнено соотношение:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=\ p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)=p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1) \tag{11}$$

где $\delta_s^1=\begin{cases}1,s=1\\0,s\ne1\end{cases}=\begin{cases}1,s=1\\0,s\ge2\end{cases}-\mathit{символ\ Кронекера}$

,где $\delta_j^i=\begin{cases}1,i=j\\0,i\ne j\end{cases}-\mathit{символ\ Кронекера}$, где $\delta_s^{k+1}=\begin{cases}1,s=k+1\\0,s\ne k+1\end{cases}-\mathit{символ\ Кронекера}$

Доказательство. Так как $(1-\delta_s^1)$ не зависит от индексов суммирования k,j , то

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}$$

При $s=1$ $(1-\delta_s^1)=1-1=0\Rightarrow(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=0\qquad p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)=p_{s-1}^i\cdot0=0$ и утверждение теоремы выполнено. При $n\ge s\ge2\Rightarrow s-1\ge1\qquad \delta_s^1=0\ ,1-\delta_s^1=1-0=1\Rightarrow p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)=p_{s-1}^i$ - правая часть .

$p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=\begin{cases}p_{k=s-1}^{j=i}=p_{s-1}^i\ ,(j=i)\wedge(k+1=s)\\ 0\qquad ,(j\ne i)\vee(k+1\ne s)\end{cases}\Rightarrow(1-\delta_s^1)p_{s-1}^i=(1-0)\,p_{s-1}^i=p_{s-1}^i$ - левая часть утверждения.

При

$n=1\Rightarrow s=1\ (s=\overline{1,n})\Rightarrow\delta_n^1=\delta_s^1=1$ Поэтому $p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1)=p_{1-1}^i(1-\delta_0^1)(1-\delta_0^1)=0=p_{1-1}^i(1-\delta_0^1)$

$n>1\Rightarrow s=1\ (s=\overline{1,n})\Rightarrow\delta_n^1=0\Rightarrow(1-\delta_n^1)=(1-0)=1\Rightarrow p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)=p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1)$

Формула (11) проверена. Теорема 4 доказана.

Рассмотрим функцию $L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^jq_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$

Теорема 5. Пусть $L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^jq_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$. Тогда имеют место равенства:

$$1.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\,\frac{\partial^2H}{\partial p_n^j\partial q_s^i} \tag{12}$$

$$2.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^i+\delta_n^s\frac{\partial H}{\partial p_n^i}+\sum_{j=1}^m p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i} \qquad (13)$$

Где $\delta_\beta^\alpha=\begin{cases}1,\ \alpha=\beta\\ 0\ ,\ \alpha\neq\beta\end{cases}$ – *символ Кронеккера*

Доказательство. $\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^m(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})$

По теореме 3: $\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}=\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}=0$, так переменные p , q независимы и выполняются равенства:

1) $\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\begin{cases}(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\ ,\ s=1,k=\overline{1,n}\ ,\ i,j=\overline{1,m}\\ (1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\ ,\ 2\le s\le n,k=\overline{1,n}\ ,\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1)\ ,\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$

Поэтому

$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^m(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})$. Иначе,

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^m(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m(p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^m(p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m(p_k^j(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1})+\sum_{j=1}^m p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}+\sum_{j=1}^m p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)p_{s-1}^i+\sum_{j=1}^m p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}$$

По теореме 4: $\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m(p_k^j(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=\ p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)$ Поэтому:

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}+\sum_{j=1}^m p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{j=1}^m p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}$$

Формула (12) проверена. Первая часть теоремы 5 доказана.

$$L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^m p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}=-H(p,q)+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^m p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}.$$

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i})+\sum_{j=1}^m(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}).$$

Так как $\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}=\begin{cases}1\ ,\ \ (s=k)\wedge(i=j),s,k=\overline{1,n}\ ,\ i,j=\overline{1,m}\\ 0\ ,\ \ (s\neq k)\vee(i\neq j),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_i^j\delta_s^k$ и $\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i}=0$, то

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i})+\sum_{j=1}^m(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i})=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^m(\delta_i^j\delta_s^k\ \ q_{k+1}^j)+\sum_{j=1}^m(\delta_i^j\delta_s^n\ \ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i})=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^j+\delta_s^n\ \ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+\sum_{j=1}^m p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}$$

Формула (13) проверена. **Теорема 5** доказана.

Теорема 6. Пусть - $f(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(k)}{x})$ - локальная запись гладкой функции $f:T^nX_m\to\Re$

В локальных координатах в базе X_m расслоения T^nX_m. Тогда

$$D_t^p f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + a(x,\dot x,\dots,\overset{(k+p-1)}{x})\ ,\ p \ge 1$$

Доказательство. Проведем индукцией по p

База индукции $p = 1$

$$D_t^1 f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x}) = D_t f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x}) = \sum_{s=0}^{k}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j} = \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}} x^{(k+1)j}.$$

При $s \le k-1 \Rightarrow s+1 \le k$, поэтому $\dfrac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}$, $x^{(s+1)j}$ и произведение

$\dfrac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j}$ зависят от производных порядка не выше k, значит и вся сумма:

$a(x,\dot x,\dots,\overset{(k+1-1)}{x}) = a(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x}) = \sum\limits_{s=0}^{k-1}\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j}$ также от производных порядка не выше k. Значит,

$$D_t^1 f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x}) = \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}} x^{(k+1)j} = a(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x}) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}} x^{(k+1)j}.$$

База индукции проверена.

Индуктивный переход. Пусть утверждение верно для p, то есть

$$D_t^p f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + a(x,\dot x,\dots,\overset{(k+p-1)}{x})$$

Докажем, что оно верно для $p+1$, то есть имеет место равенство:

$$D_t^{p+1} f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + \bar a(x,\dot x,\dots,\overset{(k+p+1-1)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + \bar a(x,\dot x,\dots,\overset{(k+p)}{x})$$

По предположению индукции имеем:

$$D_t^{p+1} f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x}) = D_t(D_t^p f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})) = D_t\Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + a(x,\dot x,\dots,\overset{(k+p-1)}{x})\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} D_t(\overset{(k+p)j}{x})\Big) + D_t\, a(x,\dot x,\dots,\overset{(k+p-1)}{x}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + D_t\, a(x,\dot x,\dots,\overset{(k+p-1)}{x}).$$

Максимальный порядок производных в каждом члене суммы $\sum\limits_{j=1}^{m} D_t \dfrac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x}$ равен

$\max(k+1, k+p) = k+p$, так как $p \ge 1$. По доказанному утверждению при $p=1$ максимальный порядок

производных в $D_t \dfrac{\partial f(x,\dot x,\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}$ равен $k+1$, а максимальный порядок производных в $D_t\, a(x,\dot x,\dots,\overset{(k+p-1)}{x})$ равен

$k+p-1+1 = k+p$

Значит, $\bar{a}(x,\dot{x},...,\overset{(k+p)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x})$ зависит от производных порядка не выше $k+p$.

Итак, $\sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x}) =$

$. = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + \bar{a}(x,\dot{x},...,\overset{(k+p)}{x})$. Теорема 6 доказана.

Теорема 7(линейность обобщенного импульса по старшим производным). Пусть $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$ - импульс ранга n для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$.

Пусть $b(n,p,k) = \max(2\min(p,n)-k, p)$, $\max v = 2\min(n,p)-k$, $\min v = \min(n,p)$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{b(n,p,k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) \quad k = \overline{0, \min v - 1}\ ,\ i = \overline{1,m}$$
-компоненты импульса ранга n .

Тогда

$$p_k^i(n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(\min v)j} \partial x^{(\min v)i}} x^{(\max v)j} + g_i(x,\dot{x},...,\overset{(\max v-1)}{x}),\ i = \overline{1,m} \tag{14}$$

Доказательство.

По теореме 6 максимальная степень координат, по t ,которые войдут в многочлен $D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$ по степеням производных координат по t при выполнении дифференцирования равна $\max(l+k+l = 2l+k) = \max(2l+k)$ при условии, что

$l \le n-k$, $l+k \le p \Leftrightarrow l \le p-k \quad \Rightarrow \quad l \le n-k, l \le p-k \Leftrightarrow l \le \min(n-k, p-k) = \min(n,p)-k$

$\max\limits_{l \le \min(n,p)-k} (2l+k) = 2(\min(n,p)-k)+k = 2\min(n,p)-k = \max v$.

Значит, значение координаты с наибольшей степенью производной по t ,которая войдет в выражение $\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$ равно $\max(p, \max\limits_{l \le \min(n,p)-k}(2l+k)) = \max(p, 2\min(n,p)-k)) = b(n,p,k)$

Теорема 7 доказана.

Замечание. Ясно, что $\max \text{v} = 2\min(n,p)-k \ \ge \ \min \text{v} = \min(n,p)$ при $k \le \min(n,p)$

и $\max \text{v} = 2\min(n,p)-k \ > \ \min \text{v} = \min(n,p)$ при $k < \min(n,p))$

Условие $k \le n$ следует из определения импульса ранга n , а при $k > p$ компоненты импульса

$$p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{b(n,p,k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) \equiv 0 \text{ (тривиальны)}$$

Поэтому условие $k \le n, k \le p \Leftrightarrow k \le \min(n,p)$ определяет нетривиальные компоненты импульса ранга n.

Теорема 8. При $p = n$ $\quad p_k^i(n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \overset{(2n-k)j}{x} + g_i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k-1)}{x})\ ,\ i = \overline{1,m}, k = \overline{0,n-1}$ (15)

Доказательство. По теореме 7 $\max \text{v} = 2\min(n,p)-k = 2\min(n,n)-k = 2n-k$,

$\min \text{v} = \min(n,p) = \min(n,n) = n$

$b(n,p=n,k)=\max(2\min(p=n,n)-k,p)=\max(2\min(n,n)-k,n)=\max(2n-k,n)=2n-k$ т. к $k\le \min(n,p)=\min(n,n)=n$

$p_k^i(n)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\overset{(2n-k)j}{x}+g_i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k-1)}{x}),\ i=\overline{1,m}$ При $0\le k\le n-1$ $\quad 2n-k\ge n+1>n$ и выражение

$p_k^i(n)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\overset{(2n-k)j}{x}+g_i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k-1)}{x}),\ i=\overline{1,m}$ линейно зависит от старших производных $\overset{(2n-k)j}{x}$

Формула (15) доказана. Теорема 8 доказана.

Теорема 9. Пусть $\det(\frac{\partial^2 L(X^n)}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}})\neq 0$ в точке $\pi_n^{2n-k}X_0^{2n-k}=X_0^n=(x_0,\dot{x}_0,\ddot{x}_0,...,\overset{(n)}{x}_0)$, $X_0^{2n-k}=(x_0,\dot{x}_0,\ddot{x}_0,...,\overset{(2n-k)}{x_0})$, $0\le k\le n-1$, $\pi_n^{2n-k}:T^{2n-k}X_m\to T^nX_m$ - каноническая проекция. Тогда существует окрестность $U(X_0^{2n-k})$ точки X_0^{2n-k}

1) $\det(\frac{\partial p_k^i(n)(X^{2n-k})}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}})=\det(\frac{\partial^2 L(X^n)}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}})\neq 0 \quad X^n=\pi_n^{2n-k}(X^{2n-k})$ (16)

2) $x^{(2n-k)j}=x^{(2n-k)j}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k-1)}{x},p_k^i(n))$ (17)

Доказательство.

$$\frac{\partial p_k^i(n)}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}=\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}(\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\overset{(2n-k)s}{x}+g_i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k-1)}{x}))=\sum_{s=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\overset{(2n-k)s}{x})+\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}(g_i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k-1)}{x})))=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}})\overset{(2n-k)s}{x}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)i}}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}(\overset{(2n-k)s}{x})+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}(g_i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k-1)}{x})))=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}})\overset{(2n-k)s}{x}=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)i}}\delta_j^s=\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}},$$

где $\delta_j^s=\begin{cases}1,\ s=j\\ 0\ ,\ s\neq j\end{cases}$ $-$ *символ Кронекера*

так как при $0\le k\le n-1\Rightarrow 2n-k\ge n+1>n$, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}})\equiv 0\Rightarrow \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}})\overset{(2n-k)s}{x}=0$$

Поскольку $2n-k\ge 2n-k-1$ при любых целых n,k , следовательно

$\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}(g_i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k-1)}{x}))=0$. Первое равенство в формуле (16) доказана, первая часть Теоремы 9 доказана.

Так как по первой части теоремы 9

$\det(\frac{\partial p_k^i(n)}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}})(X_0^{2n-k})=\det(\frac{\partial^2 L(X_0^n)}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}})=\det(\frac{\partial^2 L(\pi_n^{2n-k}(X_0^{2n-k}))}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}})\neq 0$,то из гладкости функций $\pi_n^{2n-k}:T^{2n-k}X_m \to T^n X_m$, $L:T^n X_m \to \Re$ и гладкости композиции $L\circ\pi_n^{2n-k}:T^{2n-k}X_m \to \Re$ следует, что существует окрестность $U(X_0^{2n-k})$, точки X_0^{2n-k}, такая что $\det(\frac{\partial^2 L(\pi_n^{2n-k}(X^{2n-k}))}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)i}}) \neq 0 \ \forall X^{2n-k}\in U(X_0^{2n-k})$, $X^{2n-k}=(x,\dot{x},\ddot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$

По теореме о неявной функции в окрестности $U(X_0^{2n-k})$ точки X_0^{2n-k}

$x^{(2n-k)j}=x^{(2n-k)j}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k-1)}{x},p_k^i(n))$

Формула (17) и Теорема 9 доказана.

Замечание. В условии теоремы 8 условие $0\le k\le n-1$ было существенно, так как при $0\le k\le n-1 \Rightarrow 2n-k\ge n+1>n$, следовательно, $\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}})\equiv 0 \Rightarrow$

$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}})\overset{(2n-k)s}{x}=0$ для $k=n$ этого утверждать уже нельзя. Тем не менее, оказывается аналогичное утверждение справедливо и для $k=n$.

Теорема 10. Пусть $H:\Re^{2mn}\to\Re$ - функция $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$ и выполняется условие

$$\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i\partial p_k^i})\neq 0,\ i,j=\overline{1,m} \text{ окрестности } U(q_0,p_0) \text{ точки } (q_0,p_0)$$

Тогда:

1) замена переменных – переход от $p_n^i \to x^{(n)i}=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}$, $i=\overline{1,m}$ является невырожденной в окрестности точки (q_0,p_0) и $\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j}=\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i}$ (18)

2) локально существует обратная замена $p_n^i=p_n^i(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...p_{n-1},x^{(n)})$ (19)

3) $\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i\partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}}=\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases}$ $-$ *символ Кронекера* (20)

Доказательство.

$x^{(n)i}=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\Rightarrow\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j}=\frac{\partial}{\partial p_n^j}(\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i})=\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i}$. Выражение (18) проверено.

Так как $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i})\neq 0$, то по теореме об обратной функции существует обратная замена

$p_n^i=p_n^i(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)})$ (19) и первые 2 части утверждения доказаны.

Продифференцируем соотношения

$x^{n(i)}(q_1,...,q_n,p_1,...,p_{n-1},p_n(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)}))\equiv x^{n(i)}$, $i,l,j=\overline{1,m}$. Учитывая, что

$\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^l}=\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l\partial p_n^i};\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l}=0\ s=\overline{1,n}\ ;\frac{\partial p_s^l}{x^{n(j)}}=0\ s=\overline{1,n-1}$,

$$\frac{\partial x^{n(i)}}{x^{n(j)}}=\delta_j^i=\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l}\frac{\partial q_s^l}{x^{n(j)}}+\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_s^l}\frac{\partial p_s^l}{x^{n(j)}}+\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}}=$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}}=\sum_{l=}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}}$$

Что доказывает формулу (20) и теорему 10.

Теорема 11. Пусть $H(q,p)$ - функция $H:\Re^{2mn}\to\Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$

1) $\det(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i \partial p_k^i})\neq 0$, $i,j=\overline{1,m}$ окрестности $U(q_0,p_0)$ точки (q_0,p_0)

2) $$L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$$

Тогда 1)) замена переменных – переход от $p_n^i \to x^{(n)i}=\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}, i=\overline{1,m}$ (21)

является невырожденной в окрестности точки (q_0,p_0).

2)) локально существует обратная замена $p_n^i=p_n^i(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots p_{n-1},x^{(n)})$ (22)

3)) $\dfrac{\partial}{\partial x^{(n)i}}L(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},p_n(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)}))=p_n^i$ (23)

Доказательство. По теореме10 первые 2 части теоремы 11 доказаны:

$x^{(n)i}=\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\Rightarrow\dfrac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j}=\dfrac{\partial}{\partial p_n^j}(\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i})=\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i}$ Так как $\det(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i})\neq 0$ то

по теореме об обратной функции существует обратная замена $p_n^i=p_n^i(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)})$

$$\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}L(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},p_n(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)}))=\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(-H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(p_k^j q_{k+1}^j)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_k^j}\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}+$$

$$\overset{(24)}{+}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_k^j)q_{k+1}^j+p_k^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}q_{k+1}^j))+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) \quad (25)$$

Так как в (24)-(25): $\dfrac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}}=0$, $k=\overline{1,n}$, $\dfrac{\partial}{\partial x^{(n)i}}q_{k+1}^j=0$, $k=\overline{1,n-1}$ поэтому (24)-(25)можно переписать:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_k^j}\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_k^j)q_{k+1}^j+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}q_{k+1}^j)+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}))=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) \quad (26)$$

Так как $\dfrac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}=\dfrac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\delta_n^k=\begin{cases}\dfrac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}, & k=n\\ 0 & ,k<n\end{cases}$, $\delta_n^k=\begin{cases}1, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}$ – *символ Кронекера* (27)

(переменные $q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)}$ - независимы), то (26) можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}))=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^k+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}))=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}))=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}+\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})+\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) \quad (28)$$

так как $\sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}+\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=\sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}=0$

Преобразуем (28) $\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_k^l}\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}})$ (29)

Так как $\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}}=0$ $k=\overline{1,n},\ i,l=\overline{1,m}$ и по формуле (27) $\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}=\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^l$

,где $\delta_n^l=\begin{cases}1,\ l=n\\0\ ,\ l\neq n\end{cases}$ $-$ *символ Кронекера*

то правую формулы(29) преобразуем далее:

$$\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_k^l}\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}})=\sum_{j=1}^{m}p_n^j\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}p_n^j\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^k=\sum_{j=1}^{m}p_n^j\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}} \quad (30)$$

По теореме10 п3 3) $\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i\partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}}=\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\0\ ,\ i\neq j\end{cases}$ $-$ *символ Кронеккера* имеем:

$\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}}=\delta_i^j=\begin{cases}1,\ j=i\\0\ ,\ j\neq i\end{cases}$ $-$ *символ Кронекера*. Поэтому (30) равно:

$$\sum_{j=1}^{m}p_n^j\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}}=\sum_{j=1}^{m}p_n^j\delta_i^j=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}p_n^j\delta_i^j+p_n^{j=i}\delta_i^{j=i}=0+p_n^i\cdot 1=p_n^i$$

Теорема 11 доказана.

Теорема 12. Пусть 1) $H(q,p)$ - функция $H:\Re^{2mn}\to\Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$ Введем сокращенные обозначения $q=(q_1,q_2,...,q_n,)$, $p=(p_1,p_2,...,p_n)$, $P_{n-1}=(p_1,p_2,...,p_{n-1})$, $p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)})$

2) $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i\partial p_k^i})\neq 0$, $i,j=\overline{1,m}$ окрестности $U(q_0,p_0)$ точки (q_0,p_0).

Тогда

1) $\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial p_n^i\partial p_n^s}\frac{\partial^2 L(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}}=$

$=\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\0\ ,\ i\neq j\end{cases}$ $-$ *символ Кронекера* (31)

(матрицы $\frac{\partial^2 H(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial p_n^i\partial p_n^s}$ и $\frac{\partial^2 L(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}}$ - взаимно-обратные.)

2) $\frac{\partial^2 H(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial p_n^i\partial p_n^s}\neq 0\Leftrightarrow\frac{\partial^2 L(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}}\neq 0$ (32)

Доказательство. По теореме10 п.2 $p_n^i=p_n^i(q_1,q_2,...,q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)})=p_n^i(q,P_{n-1},x^{(n)})$

Значит, $L(q,p)=L(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))$, $H(q,p)=H(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))$

По теореме 11 $\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)})) = p_n^i \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x^{(n)j}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))\right) = \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} = \frac{\partial p_n^i(q, P_{n-1}, x^{(n)})}{\partial x^{(n)j}} \quad (33)$$

Равенство (33) схоже с матрицей Якоби $\frac{\partial p_n^i(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}}$ локальной записи импульсов n-ого порядка по старшим производным координат порядка n для функции $L: T^n X_m \to \Re$ и может быть получено по-другому:

$$p_k^i(n)(x,..., \overset{(2n-k)}{x}) = p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m} \Rightarrow$$

$$p_n^i(n) = p_{k=n}^i(n)(x,..., \overset{(2n-n)}{x}) = p_n^i(n)(x,..., \overset{(n)}{x}) = (-1)^{l=0} D_t^{l=0}\left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0+n)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(n)j}} = \frac{\partial}{\partial x^{(n)j}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}}$$

По теореме 10 п.3

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \cdot \frac{\partial p_n^s(q, P_{n-1}, x^{(n)})}{\partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} \ - \textit{символ Кронекера} \quad (34)$$

Подставим $\frac{\partial p_n^s(q, P_{n-1}, x^{(n)})}{\partial x^{(n)j}} = \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)s}} = \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)j}}$ (прямое следствие из (33)) в (34):

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \cdot \frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} \ - \textit{символ Кронекера}$$

(35)

Вторая часть теоремы

$\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} = \frac{\partial^2 H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)j}} \neq 0$ следует из равенства (35)

Теорема 12 доказана.

В работе получены основные результаты:

1) В теореме 1 показано, что оператор k кратного дифференцирования расслоения скоростей по времени (старых координат выраженных через новые) квазилинеен относительно k раз дифференцирования по времени новых координат с коэффициентами якобиана перехода.

Пусть $x^{i} = S^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m)$, здесь $S: (x) \to (\bar{x})$ – гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p \geq \max(s,l)$, $i = \overline{1,m}$, тогда

$$D_t^k x^i(\bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}}) \quad k \geq 1 \quad (1)$$

где $f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})$ - некоторая гладкая функция

$$\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}}, \quad \overset{(s)}{\bar{x}} = (\overset{(s)1}{\bar{x}}, ..., \overset{(s)m}{\bar{x}}), \quad \overset{(s)j}{\bar{x}} = D_t^s \bar{x}^j \quad s = \overline{0, k-1}$$

2) В теореме 2 получена формула частной производной первого порядка для расслоения скоростей порядка k старых координат по расслоению скоростей в новых координат порядка p. Показано, что

она пропорциональна производной порядка k-p по времени от якобиана перехода.

Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m)$ $S : (\bar{x}) \to (x)$, - гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p \ge \max(s,l)$ $i = \overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \begin{cases} C_k^p \cdot D_t^{k-p}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_k^p = \dfrac{k!}{p!(k-p)!}, k! = \prod\limits_{j=1}^{k} j, k \ge p \\ 0, k < p \end{cases}$$

3) В теореме 3 получена связь частных производных первого порядка обобщенных координат и импульсов по обобщенным импульсам и координатам с произвольными нижними индексами порядка k,s и произвольными верхними индексами порядка i, j. Данные производные можно выразить через функции дельта Кронекера.

Пусть $s,k = \overline{1,n}$, $i,j = \overline{1,m}$. Тогда

$$1)\ \frac{\partial q^j_{k+1}}{\partial q^i_s} = \begin{cases} (1-\delta^1_s)\,\delta^i_j\,\delta^{k+1}_s \ , \ s = 1, k = \overline{1,n} \ , \ i,j = \overline{1,m} \\ (1-\delta^1_s)\,\delta^i_j\,\delta^{k+1}_s \ , \ 2 \le s \le n, k = \overline{1,n} \ , \ i,j = \overline{1,m} \end{cases} = \delta^i_j\,\delta^{k+1}_s(1-\delta^1_s) \ , \ s,k = \overline{1,n}, \ i,j = \overline{1,m} \qquad (8)$$

$$2)\ \frac{\partial p^j_k}{\partial q^i_s} = \frac{\partial p^j_n}{\partial q^i_s} = 0 \ , \ s,k = \overline{1,n}, \ i,j = \overline{1,m} \qquad (9)$$

$$3)\ \frac{\partial p^j_k}{\partial p^i_s} = \delta^j_i\,\delta^k_s \qquad (10)$$

$$\text{Где } \delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1, \ \alpha = \beta \\ 0 \ , \ \alpha \ne \beta \end{cases} - \textit{символ Кронекера}$$

4) **Теорема 4** – формула свертки обобщенного импульса в двойной сумме по верхнему и нижнему индексам.

Пусть (q,p) - $2mn$ независимых переменных $(q^{j2}_{l2}, p^{j1}_{l1})$ $j1 = \overline{1,m}$, $l1 = \overline{1,n}$, $j2 = \overline{1,m}$, $l2 = \overline{1,n}$. Тогда при $s,k = \overline{1,n}$, $i,j = \overline{1,m}$ и произвольных $p^j_k \in \Re$ выполнено соотношение:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p^j_k(1-\delta^1_s)\,\delta^i_j\,\delta^{k+1}_s = (1-\delta^1_s)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p^j_k\,\delta^i_j\,\delta^{k+1}_s = \ p^i_{s-1}(1-\delta^1_s)$$

где $\delta^1_s = \begin{cases} 1, s = 1 \\ 0, s \ne 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, s = 1 \\ 0, s \ge 2 \end{cases} - \textit{символ Кронекера}$

,где $\delta^i_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \ne j \end{cases} - \textit{символ Кронекера}$, где $\delta^{k+1}_s = \begin{cases} 1, s = k+1 \\ 0, s \ne k+1 \end{cases} - \textit{символ Кронекера}$

5) В теореме 5 показано, что частные производные по обобщенным координатам (импульсам) с индексами (i,s) от функций Гамильтона и Лагранжа пропорциональны друг другу с точностью до слагаемого по сопряженной координате с тем же значением верхнего индекса (для производной по координате нижний индекс понижается на 1, для производной по импульсу нижний индекс повышается на 1)и суммы со вторыми частными производными функции Гамильтона и обобщенного импульса максимального порядка.

Пусть $L(p,q) = -H(p,q) + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{m} p^j_k q^j_{k+1} + \sum\limits_{j=1}^{m} p^j_n \cdot \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p^j_n}$. Тогда имеют место равенства:

$$1.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1) + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i} \qquad (12)$$

$$2.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i} + (1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^i + \delta_n^s \frac{\partial H}{\partial p_n^i} + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_s^i} \qquad (13)$$

$$\text{Где } \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} \ - \ \textit{символ Кронеккера}$$

6) **Теорема 6** показывает, что формула временной производной порядка p от гладкой функции с аргументом скорости максимального порядка k выражается квазилинейно через скорость расслоенного пространства скоростей с максимальным порядком k+p.

Пусть - $f(x, \dot{x}, ..., \overset{(k)}{x})$ - локальная запись гладкой функции $f: T^n X_m \to \Re$

В локальных координатах в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Тогда

$$D_t^p f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x}) \ , p \geq 1$$

7) **Теорема 7**- формула квазилинейной связи обобщенного импульса с индексами(i,k) ранга n со вторыми частными производными функции Лагранжа по координатам расслоенного пространства скоростей минимального порядка, умноженными на скорости расслоенного пространства максимального порядка.

(линейность обобщенного импульса по старшим производным). Пусть $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$ - импульс ранга n для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$.
Пусть $b(n,p,k) = \max(2\min(p,n) - k, p)$, $\max v = 2\min(n,p) - k$, $\min v = \min(n,p)$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{b(n,p,k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) \quad k = \overline{0, \min v - 1}\ ,\ i = \overline{1,m}$$ -компоненты импульса ранга n .

Тогда

$$p_k^i(n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(\min v)j} \partial x^{(\min v)i}} x^{(\max v)j} + g_i(x,\dot{x},...,\overset{(\max v-1)}{x}),\ i = \overline{1,m}$$

8) **Теорема 8** – частный случай **теоремы 7**(порядок временной производной равен рангу обобщенного импульса), формула которой используется в дальнейшем.

При $p = n$ $$p_k^i(n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \overset{(2n-k)j}{x} + g_i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k-1)}{x}) \ , i = \overline{1,m}, k = \overline{0,n-1}$$

9) В теореме 9 показана эквивалентность частной временной производной порядка 2n-k от обобщенного импульса $p_k^i(n)$ по координате расслоенного пространства скоростей и гессиана от функции Лагранжа по координатам расслоенного пространства с максимальным порядком n(локально невырожденного). В силу теоремы о неявной функции можно выразить координату расслоенного пространства скоростей максимального порядка через обобщенный импульс.

Пусть $\det(\frac{\partial^2 L(X^n)}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}) \neq 0$ в точке $\pi_n^{2n-k} X_0^{2n-k} = X_0^n = (x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, ..., \overset{(n)}{x}_0)$, $X_0^{2n-k} = (x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, ..., \overset{(2n-k)}{x_0})$, $0 \le k \le n-1$, $\pi_n^{2n-k} : T^{2n-k} X_m \to T^n X_m$ - каноническая проекция. Тогда существует окрестность $U(X_0^{2n-k})$ точки X_0^{2n-k}

1) $\det(\frac{\partial p_k^i(n)(X^{2n-k})}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}) = \det(\frac{\partial^2 L(X^n)}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}) \neq 0 \quad X^n = \pi_n^{2n-k}(X^{2n-k})$ (16)

2) $x^{(2n-k)j} = x^{(2n-k)j}(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k-1)}{x}, p_k^i(n))$

10) В случае не вырожденности гессиана функции Гамильтона по импульсам (старшего порядка n) можно выразить гессиан через частную производную координаты расслоенного пространства скоростей по обобщенным импульсам, в которых порядки скорости расслоенного пространства и импульса равны n(максимальны).

Пусть $H : \Re^{2mn} \to \Re$ - функция $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $\quad j1 = \overline{1,m}$, $l1 = \overline{1,n}$, $j2 = \overline{1,m}$, $l2 = \overline{1,n}$ и выполняется условие

$$\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i \partial p_k^i}) \neq 0,\ i, j = \overline{1,m} \text{ окрестности } U(q_0, p_0) \text{ точки } (q_0, p_0)$$

Тогда:

1) замена переменных – переход от $p_n^i \to x^{(n)i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}, i = \overline{1,m}$ является невырожденной в окрестности

точки (q_0, p_0) и $\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j} = \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}$ (18)

2) локально существует обратная замена $p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ... p_{n-1}, x^{(n)})$

11) В случае локальной не вырожденности гессиана функции Гамильтона по импульсам старшего порядка n частная производная первого порядка от Лагранжиана по скорости порядка n равна импульсу того же порядка порядка n . Аналогично скорость порядка n равна частной производной функции Гамильтона обобщенному импульсу порядка n.

Пусть $H(q, p)$ - функция $H : \Re^{2mn} \to \Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $\quad j1 = \overline{1,m}$, $l1 = \overline{1,n}$, $j2 = \overline{1,m}$, $l2 = \overline{1,n}$

1) $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i \partial p_k^i}) \neq 0$, $i, j = \overline{1,m}$ окрестности $U(q_0, p_0)$ точки (q_0, p_0)

2) $L(p,q) = -H(p,q) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$

Тогда 1)) замена переменных – переход от $p_n^i \to x^{(n)i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}, i = \overline{1,m}$ (21)

является невырожденной в окрестности точки (q_0, p_0).

2)) локально существует обратная замена $p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ... p_{n-1}, x^{(n)})$ (22)

3)) $\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, x^{(n)})) = p_n^i$

12) Матрица Гессе для функции Гамильтона по импульсам старшего порядка n и матрица Гессе от функции Лагранжа по скоростям порядка n являются взаимно обратными, то есть их свертка по

индексу пространственной переменной даёт символ Кронекера.

Пусть $H(q,p)$ - функция $H:\Re^{2mn}\to\Re$ $2mn$ независимых переменных

$(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$

$\det(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i \partial p_k^i})\neq 0$, $i,j=\overline{1,m}$ окрестности $U(q_0,p_0)$ точки (q_0,p_0). Тогда

1) $$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s}\frac{\partial^2 L(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}}=\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases} - \textit{символ Кронекера}$$

(31)

(Матрицы $\dfrac{\partial^2 H(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s}$ *и* $\dfrac{\partial^2 L(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}}$ - взаимно-обратные.)

2) $$\frac{\partial^2 H(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s}\neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}}\neq 0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: УРСС, 1994.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
6. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
7. Козлов А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2006. – № 3. – С. 63–64.
8. Галеев Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
12. Трофимов В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов А.Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995.
13. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Вакуленко С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
15. Пастухов Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
16. Пастухов Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
17. Пастухов Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
18. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2018. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094. – Дата доступа: 15.06.2018.

19. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика,7:1(2001), 285-288
20. Пастухов, Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.

PROPERTIES OF THE HAMILTON FUNCTION
IN VARIATION TASKS WITH HIGHER DERIVATIVES
Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

In this paper, we study the differential properties of the Hamilton function of independent variables for a variational problem with higher derivatives and related Lagrange function

Keywords: Hamilton function, variation problem, fiber space of velocities,, Euler-Lagrange equations, smooth manifolds, energy tensor, tensor of generalized momentum, non-degenerate function.

УДК 514

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ГАМИЛЬТОНА

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Аннотация: В работе рассматриваются свойства функций Гамильтона и Лагранжа в координатно - импульсном пространстве. Основным полученным результатом для системы ОДУ 1-ого порядка Гамильтона является утверждение : решения системы 2mn обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона первого порядка являются решениями системы соответствующей системы m дифференциальных уравнений порядка n Эйлера-Лагранжа ,двойственной к функции Гамильтона и соответствующего невырожденного преобразования переменных.
Получены формулы, связывающие частные производные в координатно-импульсном пространстве q-p для функций Лагранжа и Гамильтона по одним и тем же переменным. Получены формулы для частных производных для двойственной к функции Гамильтона функции Лагранжа по координатным переменным в координатно-импульсном пространстве (X_n, P_{n-1})

Ключевые слова: Функция Гамильтона, вариационная задача, расслоённое пространство скоростей, уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, тензор обобщенного импульса, невырожденный гессиан.

Введение.

Гамильтон в 1835 году получил новую форму уравнений движения механических систем канонические уравнения Гамильтона.. Полученная система канонических уравнений содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем у Лагранжа, но зато все они первого порядка, (у Лагранжа — второго).

Вариационное исчисление является одним из старейших и богатых содержанием и приложениями разделов математического анализа. Вариационные задачи (например, изопериметрические) рассматривались и в древности, но исследовались геометрическими методами. Поэтому началом зарождения вариационного исчисления можно считать работу Ферма 1662 г., в которой аналитическими методами исследована задача о распространении света из одной оптической среды в другую и о преломлении света на границе двух сред. Далее аналогичные (но более общие) вариационные задачи исследовались Ньютоном (задача о наименьшей поверхности вращения - в 1685 г.), Д. Бернулли (задача о брахистохроне) и др.

В 1696 г. И. Бернулли сформулировал и опубликовал математическую проблему с предложением для математиков своего времени заняться ее решением. В задаче о брахистохроне требовалось найти форму гладкой кривой, соединяющей две точки так, чтобы материальная точка, двигаясь по ней без трения под действием силы тяжести, прошла участок между этими точками за минимальное время. Задача была решена крупнейшими учеными того времени – Я. Бернулли, Г. Лейбницем, Г. Лопиталем и И. Ньютоном. Свои подходы к решению этой задачи предложили Л. Эйлер и Ж. Лагранж, что привело к рождению вариационного исчисления. Эти решения наметили многие направления будущей общей теории. И. Бернулли исходил из оптико-механических аналогий, Я. Бернулли применил принцип Гюйгенса, Г. Лейбниц решил задачу, заменяя кривую ломаными, заложив тем самым основу прямым методам в вариационном исчислении.

Настоящими творцами общей теории вариационного исчисления (которые дали название этой науке) являются Л. Эйлер (уравнения Эйлера) и Ж. Лагранж (метод вариаций). Далее следует А. Лежандр (исследование второй вариации – необходимое условие Лежандра), У. Гамильтон и Б. Якоби (понятие сопряженной точки, необходимое условие Якоби, теория Гамильтона – Якоби), А. Клёбш и Ю. Майер (задачи с функционалами более общей природы, необходимое условие Клёбша, поля экстремалей Майера), Вейерштрасс (задачи в параметрической форме, достаточные условия сильного экстремума). Работы Майера конца XIX в. послужили основой для углубленного исследования вариационных задач Лагранжа и Майера, доказательства правила множителей для них и др. В начале XX в. Д. Гильберт ввел свой известный инвариантный интеграл для доказательства достаточных условий экстремума, А. Кнезер исследовал задачи с подвижными концами, получил геометрическое условие Якоби (при помощи огибающей семейства экстремалей).

Представленная работа является продолжением работ авторов [9, 10,13,16,17,18,19,20,21,22].

Основные определения.

Введем обозначения для объектов, используемых в работе:.

Функция Гамильтона $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}, l1=\overline{1,n}, j2=\overline{1,m}, l2=\overline{1,n}$

$$p=\bar{p}=(p_1^{j1},p_2^{j1},...,p_n^{j1})=(p_1^1p_1^2...p_1^m,p_2^1p_2^2...p_2^m,...,p_n^1,...,p_n^m)=(p_{l1}^{j1})\qquad j1=\overline{1,m}\quad l1=\overline{1,n}$$

$$q=\bar{q}=(q_1^{j2},q_2^{j2},...,q_n^{j2})=(q_1^1q_1^2...q_1^m,q_2^1q_2^2...q_2^m,...,q_n^1,...,q_n^m)=(q_{l2}^{j2})\qquad j2=\overline{1,m}\quad l2=\overline{1,n}$$

Гамильтона.

Определение 1. $L(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$ $\qquad L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^jq_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$

называется функция Лагранжа, двойственная к функции *Гамильтона* $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$

Постановка задачи.

Пусть $H(q,p)$ – функция Гамильтона зависит от $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1}),\ j1=\overline{1,m},\ l1=\overline{1,n},\ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}$, при этом нижние индексы меняются от 1 до n, верхние индексы меняются от 1 до m

$$p=\bar{p}=(p_1^{j1},p_2^{j1},...,p_n^{j1})=(p_1^1p_1^2...p_1^m,p_2^1p_2^2...p_2^m,...,p_n^1,...,p_n^m)=(p_{l1}^{j1}),\ \ j1=\overline{1,m},\ l1=\overline{1,n};$$

$$q=\bar{q}=(q_1^{j2},q_2^{j2},...,q_n^{j2})=(q_1^1q_1^2...q_1^m,q_2^1q_2^2...q_2^m,...,q_n^1,...,q_n^m)=(q_{l2}^{j2}),\ \ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}.$$

Поставим следующую задачу: какими свойствами обладает *Функция Гамильтона* $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}, l1=\overline{1,n}, j2=\overline{1,m}, l2=\overline{1,n}$ и функция Лагранжа, двойственная к функции Гамильтона $L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^jq_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$ и какие связи между двумя данными функциями $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$, $L(p,q):\Re^{2mn}\to\Re$. Сформулировать и доказать обратную теорему Гамильтона.

Имеет место следующая

Теорема 1 Пусть $s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$. Тогда

1) $$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\begin{cases}(1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1}, & s=1,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\\ (1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1}, & 2\le s\le n,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_j^i\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\qquad(1)$$

2) $$\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}=\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}=0,\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m};\qquad(2)$$

3) $$\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}=\delta_i^j\delta_s^k,\qquad(3)$$

где $\delta^{\alpha}_{\beta}=\begin{cases}1, & \alpha=\beta\\ 0, & \alpha\neq\beta\end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство. Прибавим 1 к обеим частям двойного неравенства $1\le k\le n-1 \Rightarrow 2\le k+1\le n$, $1\le s\le n$, поэтому при $s=1$

$$\frac{\partial q^{j}_{k+1}}{\partial q^{i}_{s}}=0=1-1=1-\delta^{1}_{s}=(1-\delta^{1}_{s})\,\delta^{i}_{j}\,\delta^{k+1}_{s},\ i,j=\overline{1,m},$$

где $\delta^{1}_{s}=\begin{cases}1, s=1\\ 0, s\neq 1\end{cases}=\begin{cases}1, s=1\\ 0, s\geq 2\end{cases}$ – символ Кронекера.

При $s=1$ формула (7) доказана.

где $\delta^{i}_{j}=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$, $\delta^{k+1}_{s}=\begin{cases}1, s=k+1\\ 0, s\neq k+1\end{cases}$ – символ Кронекера.

При $2\le s\le n$ $\dfrac{\partial q^{j}_{k+1}}{\partial q^{i}_{s}}=\begin{cases}1, (i=j)\wedge(s=k+1)\\ 0, (i\neq j)\vee(s\neq k+1)\end{cases}=\delta^{i}_{j}\delta^{k+1}_{s}=\delta^{i}_{j}\delta^{k+1}_{s}(1-\delta^{1}_{s}),\ i,j=\overline{1,m}$ или

$$\frac{\partial q^{j}_{k+1}}{\partial q^{i}_{s}}=\begin{cases}(1-\delta^{1}_{s})\delta^{i}_{j}\delta^{k+1}_{s},\ s=1,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\\ (1-\delta^{1}_{s})\delta^{i}_{j}\delta^{k+1}_{s},\ 2\le s\le n,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta^{i}_{j}\delta^{k+1}_{s}(1-\delta^{1}_{s}),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}.$$

Вторая и третья части теоремы очевидны:

$\dfrac{\partial p^{j}_{k}}{\partial q^{i}_{s}}=\dfrac{\partial p^{j}_{n}}{\partial q^{i}_{s}}=0$, $s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$, так как переменные p, q независимы;

$\dfrac{\partial p^{j}_{k}}{\partial p^{i}_{s}}=\begin{cases}1, (i=j)\wedge(k=s)\\ 0, (i\neq j)\vee(k\neq s)\end{cases}=\delta^{j}_{i}\delta^{k}_{s}$, условие во второй строке очевидно является отрицанием условия в первой: $\overline{(i=j)\wedge(k=s)}=\overline{(i=j)}\vee\overline{(k=s)}=(i\neq j)\vee(k\neq s)$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть (q,p) - $2mn$ независимых переменных $(q^{j2}_{l2},p^{j1}_{l1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$. Тогда при $s=\overline{1,n}$, $i,j=\overline{1,m}$ и произвольных $p^{j}_{k}\in\Re$ выполнено соотношение

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p^{j}_{k}(1-\delta^{1}_{s})\,\delta^{i}_{j}\,\delta^{k+1}_{s}=(1-\delta^{1}_{s})\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p^{j}_{k}\,\delta^{i}_{j}\,\delta^{k+1}_{s}=p^{i}_{s-1}(1-\delta^{1}_{s})=p^{i}_{s-1}(1-\delta^{1}_{s})(1-\delta^{1}_{n}) \qquad (4)$$

где $\delta^{1}_{s}=\begin{cases}1, s=1\\ 0, s\neq 1\end{cases}=\begin{cases}1, s=1\\ 0, s\geq 2\end{cases}$ – символ Кронекера;

$\delta^{i}_{j}=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$ – символ Кронекера;

$\delta^{k+1}_{s}=\begin{cases}1, s=k+1\\ 0, s\neq k+1\end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство. Так как $(1-\delta^{1}_{s})$ не зависит от индексов суммирования k, j, то

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p^{j}_{k}(1-\delta^{1}_{s})\,\delta^{i}_{j}\,\delta^{k+1}_{s}=(1-\delta^{1}_{s})\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p^{j}_{k}\,\delta^{i}_{j}\,\delta^{k+1}_{s}.$$

При $s=1$ $(1-\delta^{1}_{s})=1-1=0\Rightarrow(1-\delta^{1}_{s})\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p^{j}_{k}\,\delta^{i}_{j}\,\delta^{k+1}_{s}=0$ $p^{i}_{s-1}(1-\delta^{1}_{s})=p^{i}_{s-1}\cdot 0=0$ и утверждение **теоремы 2** выполнено.

При $n \ge s \ge 2 \Rightarrow s-1 \ge 1$ $\delta_s^1 = 0,\ 1-\delta_s^1 = 1-0 = 1 \Rightarrow p_{s-1}^i(1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i$ – правая часть;

$p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = \begin{cases} p_{k=s-1}^{j=i} = p_{s-1}^i,\ (j=i)\wedge(k+1=s) \\ 0,\ (j\ne i)\vee(k+1\ne s)\end{cases} \Rightarrow (1-\delta_s^1)\,p_{s-1}^i = (1-0)\,p_{s-1}^i = p_{s-1}^i$ – левая часть утверждения.

При $n=1 \Rightarrow s=1\ (s=\overline{1,n}) \Rightarrow \delta_n^1 = \delta_s^1 = 1$, поэтому

$$p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1) = p_{1-1}^i(1-\delta_1^1)(1-\delta_1^1) = 0 = p_{1-1}^i(1-\delta_1^1).$$

При $n>1 \Rightarrow \delta_n^1 = 0 \Rightarrow (1-\delta_n^1) = (1-0) = 1 \Rightarrow p_{s-1}^i(1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1)$.

Формула (4) проверена. **Теорема 2** доказана.

Рассмотрим функцию $L(p,q) = -H(p,q) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$.

Теорема 3. Пусть $L(p,q) = -H(p,q) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$. Тогда имеют место равенства:

$$1.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1) + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i} \qquad (5)$$

$$2.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i} + (1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^i + \delta_n^s\frac{\partial H}{\partial p_n^i} + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_s^i} \qquad (6)$$

Где $\delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1,\ \alpha=\beta \\ 0\ ,\ \alpha\ne\beta \end{cases}$ – *символ Кронеккера*

Доказательство: $\dfrac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i} = -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\dfrac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} q_{k+1}^j + p_k^j\dfrac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\dfrac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}\right).$

По **теореме 1**, $\dfrac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} = \dfrac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} = 0$, так как переменные p, q независимы, перепишем равенства:

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = \begin{cases} (1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1},\ s=1,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m} \\ (1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1},\ 2\le s\le n,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases} = \delta_j^i\,\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m},$$

поэтому $\dfrac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i} = -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\dfrac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} q_{k+1}^j + p_k^j\dfrac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\dfrac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}\right).$

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + (1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} q_{k+1}^j + p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}\right) =$$

$$= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + (1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}\right) =$$

$$= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + (1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(p_k^j(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\right) + \sum_{j=1}^{m} p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i} =$$

$$= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + (1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} + \sum_{j=1}^{m} p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i} =$$

$$= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + (1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\,p_{s-1}^i + \sum_{j=1}^{m} p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}.$$

По **теореме 2**, $\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=\ p_{s-1}^i(1-\delta_s^1\,)$, поэтому

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1\,)+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}.$$

Формула (5) проверена. Первая часть **теоремы 3** доказана.

$$L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}=-H(p,q)+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}.$$

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\,\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}).$$

Так как $\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}=\begin{cases}1,\ (s=k)\wedge(i=j),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\\ 0,\ (s\neq k)\vee(i\neq j),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_i^j\delta_s^k$ и $\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i}=0$, то

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\,\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i})=$$

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\delta_i^j\delta_s^k\ \ q_{k+1}^j)+\sum_{j=1}^{m}(\delta_i^j\delta_s^n\ \ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i})=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^j+\delta_s^n\ \ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}.$$

Формула (6) проверена. **Теорема 3** доказана.

Теорема 4. Пусть $H:\Re^{2mn}\to\Re$ – функция $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$ и выполняется условие

$$\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i\partial p_k^i})\neq 0\ ,\ i,j=\overline{1,m}\ \text{ окрестности }\ U(q_0,p_0)\ \text{ точки }\ (q_0,p_0)\,.$$

Тогда

1) замена переменных $p_n^i\to x^{(n)i}=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}$, $i=\overline{1,m}$ является невырожденной в окрестности точки (q_0,p_0) и справедливо

$$\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j}=\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i}\,; \tag{7}$$

2) локально существует обратная замена

$$p_n^i\ =\ p_n^i(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,\ p_{n-1},x^{(n)})\,; \tag{8}$$

3) имеет место формула свертки

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i\partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}}=\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\ 0\ ,\ i\neq j\end{cases}\ \text{– символ Кронекера}\,. \tag{9}$$

Доказательство. $x^{(n)i}=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\Rightarrow\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j}=\frac{\partial}{\partial p_n^j}(\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i})=\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i}$

Выражение (7) проверено.

Так как $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i})\neq 0$, то по теореме об обратной функции существует обратная замена

$$p_n^i=p_n^i(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)})\,, \tag{10}$$

и значит, первые 2 части утверждения доказаны.

Продифференцируем соотношения

$$x^{n(i)}(q_1,...,q_n,p_1,...,p_{n-1},p_n(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)}))\equiv x^{n(i)}\ ,\ i,l,j=\overline{1,m}\,.$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^l}=\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l \partial p_n^i};\dfrac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l}=0\ s=\overline{1,n}\quad;\dfrac{\partial p_s^l}{x^{n(j)}}=0\ s=\overline{1,n-1}$,

$$\frac{\partial x^{n(i)}}{x^{n(j)}}=\delta_j^i=\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l}\frac{\partial q_s^l}{x^{n(j)}}+\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_s^l}\frac{\partial p_s^l}{x^{n(j)}}+\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}}=$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}}=\sum_{l=}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}}\,.$$

Что доказывает формулу (9) и **теорему 4**.

Теорема 5. Пусть $H(q,p)$ – функция $H:\Re^{2mn}\to\Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m},\quad l1=\overline{1,n},\ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}$. И пусть функция Гамильтона в уравнении связи $L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$ невырождена $\det(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i\partial p_n^i})\neq 0,\ i,j=\overline{1,m}$, где $U(q_0,p_0)$ – окрестность точки (q_0,p_0).

Тогда справедливы следующие результаты:

1) формула замена переменных – это переход от

$$p_n^i\to x^{(n)i}=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i},\ i=\overline{1,m}\,, \tag{11}$$

является невырожденным в окрестности точки (q_0,p_0);

2) локально существует обратная замена

$$p_n^i=p_n^i(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)})\,; \tag{12}$$

3)
$$\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}L(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},p_n(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)}))=p_n^i. \tag{13}$$

Доказательство. По **теореме 4**, первые 2 части **теоремы 5** доказаны:

$$x^{(n)i}=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\Rightarrow\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j}=\frac{\partial}{\partial p_n^j}(\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i})=\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i}\,.$$

Так как $\det(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i})\neq 0$, благодаря теореме об обратной функции существует обратная замена переменных $p_n^i=p_n^i(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)})$.

$$\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}L(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},p_n(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)}))=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(-H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(p_k^j q_{k+1}^j)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})= \tag{14}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_k^j}\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_k^j)q_{k+1}^j+p_k^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}q_{k+1}^j))+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})). \tag{15}$$

Учтем тождества $\dfrac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}}=0;\ k=\overline{1,n};\ \dfrac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_k^j=0;\ k=\overline{1,n-1};\ \dfrac{\partial}{\partial x^{(n)i}}q_{k+1}^j=0$, поэтому формулу (15) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_k^j}\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_k^j)q_{k+1}^j+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}q_{k+1}^j)+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}))=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})). \quad (16)$$

С учетом **теоремы 3** $\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}=\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\delta_n^k=\begin{cases}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}},\ k=n\\ 0,\ k<n\end{cases}$, $\delta_n^k=\begin{cases}1,\ k=n\\ 0,\ k\neq n\end{cases}$ – символ Кронекера (17)

(переменные $q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)}$ независимы), тогда выражение (16) запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}))=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^k+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}))=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}))=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}+\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})+\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}), \quad (18)$$

так как $\sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}+\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=\sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}=0$.

Преобразуем выражение (18), получим

$$\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_k^l}\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}). \quad (19)$$

Зная, что $\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}}=0,\ k=\overline{1,n},\ i,l=\overline{1,m}$ и по формуле (27) $\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}=\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^l$, где $\delta_n^l=\begin{cases}1,\ l=n\\ 0,\ l\neq n\end{cases}$ – символ Кронекера, то выражение (19) можно преобразовать:

$$\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_k^l}\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}})=\sum_{j=1}^{m}p_n^j\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}p_n^j\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^k=\sum_{j=1}^{m}p_n^j\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}}. \quad (20)$$

По пункту 3 **теоремы 4,** $\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i\partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}}=\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases}$ – символ Кронекера, перепишем формулу (30) следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{m}p_n^j\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}}=\sum_{j=1}^{m}p_n^j\delta_i^j=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}p_n^j\delta_i^j+p_n^{j=i}\delta_i^{j=i}=0+p_n^i\cdot 1=p_n^i.$$

Теорема 5 доказана.

Обобщением **теоремы 4 п.3** является

Теорема 6. Пусть $H:\Re^{2mn}\to\Re$ - функция $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$ и выполняется условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i \partial p_k^i}\right)\neq 0,\ i,j=\overline{1,m} \text{ окрестности } U(q_0,p_0) \text{ точки } (q_0,p_0)$$

Тогда:

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)k}}=\delta_j^i\cdot\delta_n^k\quad,\ k=\overline{0,n} \tag{23}$$

Где $x^{(n)i}=\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}$, $\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\0\ ,\ i\neq j\end{cases}$ $-$ *символ Кронекера* $\delta_n^k=\begin{cases}1,\ k=n\\0\ ,\ k\neq n\end{cases}$ $-$ *символ Кронекера*

Доказательство. $x^{(n)i}=\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\Rightarrow\dfrac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j}=\dfrac{\partial}{\partial p_n^j}\left(\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\right)=\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i}$.

Так как $\det\left(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}\right)\neq 0$, то по теореме об обратной функции существует обратная замена

$p_n^i=p_n^i(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)})$ Продифференцируем соотношения

$x^{n(i)}(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_{n-1},p_n(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)}))\equiv x^{n(i)}$, $i,l,j=\overline{1,m}$. Учитывая, что

$$\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^l}=\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l\partial p_n^i};\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial q_s^l}=0\ \ s=\overline{1,n}\quad;\frac{\partial p_s^l}{x^{(n)j}}=0\ \ s=\overline{1,n-1}\ ,$$

$$\frac{\partial x^{n(i)}}{x^{(k)j}}=\delta_n^k\cdot\delta_j^i=\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l}\frac{\partial q_s^l}{x^{k(j)}}+\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_s^l}\frac{\partial p_s^l}{x^{k(j)}}+\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{k(j)}}==\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{(k)(j)}}=\sum_{l=}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^l}{x^{k(j)}}$$

В частности при $k=n$ $\quad\dfrac{\partial x^{n(i)}}{x^{(k)j}}=\delta_n^k\cdot\delta_j^i=\delta_n^{k=n}\cdot\delta_j^i=\delta_j^i=\dfrac{\partial x^{n(i)}}{x^{(n)j}}$

$\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\0\ ,\ i\neq j\end{cases}$ $-$ *символ Кронекера* $\delta_n^k=\begin{cases}1,\ k=n\\0\ ,\ k\neq n\end{cases}$ $-$ *символ Кронекера*

Что доказывает формулу (24) и **теорему 6**.

Введем обозначения

$X_{n-1}=(x^{(0)},x^{(1)},\dots,x^{(n-1)})$, $X_n=(x^{(0)},x^{(1)},\dots,x^{(n-1)},x^{(n)})=(X_{n-1},x_n)$,

$q=(q_1,q_{2,\dots,}q_n)$, $p=(p_1,p_2,\dots,p_n)$, $P_{n-1}=(p_1,p_2,\dots,p_{n-1})$, $p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)})$

Теорема 7 . 1) $H:\Re^{2mn}\to\Re$ - функция $2mn$ переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m},\ l1=\overline{1,n},\ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}$.

$$L(q,p)=-H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$$

2) $\det\left(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i\partial p_k^i}\right)\neq 0$, $i,j=\overline{1,m}$ окрестности $U(q_0,p_0)$ точки (q_0,p_0)

(**по теореме 4 п.2** $p_n=p_n(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)}))=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))$

3) Рассмотрим замену $q(X_{n-1}):\Re^{mn}\to\Re^{mn}$ $\quad q_s^i(X_{n-1})=x^{(s-1)i}$, $s=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,m}$ и функцию $L_1:\Re^{2mn}\to\Re$,

$L_1(X_n,P_{n-1})=L(q_1^i=x^{(0)i},q_2^i=x^{(1)i},\dots q_n^i=x^{(n-1)i},P_{n-1},p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))=L(q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}))$

Тогда выполняется соотношение

$$1.\ \frac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)=\frac{\partial x^{(k)j}(q,P_{n-1},x^{(n)})}{\partial q_s^j}\quad k=\overline{0,n},\ s=\overline{1,n} \tag{24}$$

$$2.\ \frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}(q=q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))+(1-\delta_k^0)(1-\delta_n^k)\cdot(1-\delta_n^1)\cdot p_k^i+p_n^j\cdot\delta_n^k= \tag{25}$$

$$-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}(q=q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j\quad k=0,n-1 \tag{26}$$

Коротко:

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)(1-\delta_n^k)\cdot(1-\delta_n^1)\cdot p_k^i+p_n^j\cdot\delta_n^k=-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j \qquad (27)$$

Где $\delta_\beta^\alpha=\begin{cases}1, \ \alpha=\beta\\ 0\ , \ \alpha\neq\beta\end{cases}$ – *символ Кронекера*

3) $\dfrac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(n)j}}=p_n^j(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}) \quad j=\overline{1,m}$

Доказательство. При $0\le k\le n-1<n,\ s=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m} \quad q_s^i(X_{n-1})=x^{(s-1)i}\ ,\quad s=\overline{1,n}\ \Rightarrow\ 0\le s-1\le n-1$

$$\frac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\frac{\partial x^{(s-1)i}}{\partial x^{(k)j}}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)\ \text{ При }\quad k=n\Rightarrow\frac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\frac{\partial x^{(s-1)i}}{\partial x^{(n)j}}=0=(1-\delta_n^k)=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)$$

т.к. $x^{(0)i},...,x^{(n-1)i}$ и $x^{(n)j}$ независимы и $1-\delta_n^k=\bar\delta_n^k=\begin{cases}1, k<n\\0, k=n\end{cases}$. Докажем ,что $\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)=\dfrac{\partial x^{(k)j}(q,p)}{\partial q_s^i}$

При $0\le k\le n-1<n,\ \ s=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m} \quad x^{(k)j}(q,p)=q_{k+1}^j,\quad s=\overline{1,n}\ \Rightarrow\ 0\le s-1\le n-1$

$$\frac{\partial x^{(k)j}(q,p)}{\partial q_s^i}=\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\delta_j^i\cdot\delta_s^{k+1}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)\ \text{ При }\quad k=n\Rightarrow\frac{\partial x^{(n)j}(q,P_{n-1},x^{(n)})}{\partial q_s^i}=\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial x^{(s-1)j}}=0=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^{k=n})$$

т.к. $q,P_{n-1},x^{(n)}$ независимы и $1-\delta_n^k=\bar\delta_n^k=\begin{cases}1, k<n\\0, k=n\end{cases}$

Пункт 1 **теоремы 7,**равенство (24) доказано.

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^m\sum_{s=1}^n\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}\frac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}+\sum_{i=1}^m\sum_{s=1}^n\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}+\sum_{i=1}^m\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}} \qquad (28)$$

По теореме 3 выполнены соотношения

$$1.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{\alpha=1}^m p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i} \qquad (29)$$

$$2.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^i+\delta_n^s\frac{\partial H}{\partial p_n^i}+\sum_{\alpha=1}^m p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_s^i} \qquad (30)$$

где $\delta_\beta^\alpha=\begin{cases}1, \alpha=\beta\\0\ ,\ \alpha\neq\beta\end{cases}$ –*символ Кронекера*, $\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\0\ ,\ i\neq j\end{cases}$ –*символКронекера*, $\delta_k^{s-1}=\begin{cases}1,\ s=k+1\\0\ ,\ s\neq k+1\end{cases}$ – *символКронекера*

Подставляя (29),(30) в (28) и учитывая, что $\dfrac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}=0$ *при* $0\le k\le n-1\ ,\ s=\overline{1,n-1}\quad (X_n,P_{n-1}-\textit{независимы})$

и **п.1 теоремы 7** $\dfrac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)\ ,k=\overline{0,n}\ ,s=\overline{1,n}$

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^m\sum_{s=1}^n\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}\frac{\partial q_s^i}{\partial x^{(k)j}}+\sum_{i=1}^m\sum_{s=1}^n\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^m\sum_{s=1}^n\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}\frac{\partial q_s^i}{\partial x^{(k)j}}+$$

$$+\sum_{i=1}^m(\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}+\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}})=\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^m\sum_{s=1}^n\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}\frac{\partial q_s^i}{\partial x^{(k)j}}+\sum_{i=1}^m\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}=$$

$$+\sum_{i=1}^m\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^m\sum_{s=1}^n(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{\alpha=1}^m p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i})\cdot\delta_k^{s-1}\cdot\delta_j^i\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^m\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}+$$

$$+\sum_{i=1}^m\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^m\sum_{s=1}^n(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{\alpha=1}^m p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i})\cdot\delta_k^{s-1}\cdot\delta_j^i\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^m\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=$$

$$\sum_{i=1}^m\sum_{s=1}^n(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{\alpha=1}^m p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i})\cdot\delta_k^{s-1=k}\cdot\delta_j^{i=j}\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^m\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=$$

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}\cdot\delta_k^{s-1=k}\cdot\delta_j^{i=j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\cdot\delta_k^{s-1=k}\cdot\delta_j^{i=j}\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{\alpha=1}^m p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i}\cdot\delta_k^{s-1=k}\cdot\delta_j^{i=j}\cdot(1-\delta_n^k)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_{k+1}^1)\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}} \quad (31)$$

По формуле(28) $\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^i+\delta_n^s\frac{\partial H}{\partial p_n^i}+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_s^i}$, при $k=n$:

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^{s=n})q_{n+1}^i+\delta_n^n\frac{\partial H}{\partial p_n^i}+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_n^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_n^i}=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_n^i}=\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}=\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i} \quad (32)$$

Подставим (32) в последнее слагаемое в (31) : $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}(\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i})\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=$

$$=\sum_{\alpha=1}^{m}(\sum_{i=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i})\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}==\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}) \quad (33)$$

По теореме 6 $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=\delta_j^\alpha\cdot\delta_n^k$

$\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\0\ ,\ i\neq j\end{cases}$ – *символ Кронекера* $\delta_n^k=\begin{cases}1,\ k=n\\0\ ,\ k\neq n\end{cases}$ – *символ Кронекера*

Поэтому (32) равно $\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}})=\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\cdot\delta_j^\alpha\cdot\delta_n^k=p_n^j\cdot\delta_n^k=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}$

По теореме 7 п.1

$$\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)=\frac{\partial x^{(k)j}(q,P_{n-1},x^{(n)})}{\partial q_s^i}\Rightarrow\frac{\partial x^{(n)\alpha}(q,P_{n-1},x^{(n)})}{\partial q_{k+1}^j}=\delta_\alpha^j\cdot\delta_n^{k+1-1}\cdot(1-\delta_n^{k=n})=\delta_\alpha^j\cdot\delta_n^k\cdot(1-1)=0$$

Следовательно $\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)=(1-\delta_n^k)\cdot\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial q_{k+1}^j}=(1-\delta_n^k)\cdot\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\cdot 0=0$ Значит,(31) равно

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_{k+1}^1)\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_{k+1}^1)\cdot(1-\delta_n^k)+p_n^j\cdot\delta_n^k=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)\cdot(1-\delta_n^k)+p_n^j\cdot\delta_n^k \quad (34)$$

Справа в (34) было использовано очевидное равенство $\delta_{k+1}^1=\delta_k^0$, так как по определению

Где $\delta_{k+1}^1=\begin{cases}1,\ 1=k+1\Leftrightarrow 0=k\\0\ ,\ 1\neq k+1\Leftrightarrow 0=k\end{cases}$ – *символ Кронекера* $\delta_k^0=\begin{cases}1,\ 0=k\\0\ ,\ 0\neq k\end{cases}$ – *символ Кронекера*

Равенство(25) доказано. Докажем, что

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_{k+1}^1)\cdot(1-\delta_n^k)+p_n^j\cdot\delta_n^k=-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$$

Сравним (34) с (27): $-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$

При $k<n\Rightarrow\delta_n^k=0\Rightarrow-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)\cdot(1-\delta_n^k)+p_n^j\cdot\delta_n^k=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)$

1)При $n>1\Rightarrow\delta_n^1=0\Rightarrow-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+p_k^j\cdot(1-\delta_k^0)=-(1-\delta_n^{k<n})\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$

2)При $n=1,(k<n\Rightarrow k=0)\Rightarrow-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_{k=0}^0)=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{0+1}^j}=-(1-\delta_n^{k=0})\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{0+1}^j}+(1-\delta_{k=0}^0)\cdot p_k^j$

То есть при $k<n$ доказано $-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)\cdot(1-\delta_n^k)+p_n^j\cdot\delta_n^k=-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$

3) При $k=n \Rightarrow \delta_n^{k=n}=1 \Rightarrow -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^{k=n})+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)\cdot(1-\delta_n^{k=n})+p_n^j\cdot\delta_n^{k=n}=p_n^j$

$(k=n\ge 1 \Rightarrow k>0 \Rightarrow \delta_{k>0}^0=0) \Rightarrow -(1-\delta_n^{k=n})\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j=(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j=(1-0)\cdot p_k^j=p_k^j$ Значит,

$-\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)\cdot(1-\delta_n^k)+p_n^j\cdot\delta_n^k=-\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)$ доказано.

Из **теоремы 7 п.2** следует основное утверждение **теоремы 7 п.3** (основное утверждение **теоремы 5 п.3**) :

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(n)j}}=-(1-\delta_n^{k=n})\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{n+1}^i}+(1-\delta_{k=n}^0)\cdot p_{k=n}^j=-(1-1)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{n+1}^i}+(1-0)\cdot p_{k=n}^j=p_{k=n}^j=p_n^j$$

Этот результат можно получить иначе.

$X_{n-1}=(x^{(0)},x^{(1)},...,x^{(n-1)})$, $X_n=(x^{(0)},x^{(1)},...,x^{(n-1)},x^{(n)})=(X_{n-1},x_n)$,

$q=(q_1,q_2,...,q_n)$, $p=(p_1,p_2,...,p_n)$, $P_{n-1}=(p_1,p_2,...,p_{n-1})$, $p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)})$

Ранее была замена $q(X_{n-1}):\Re^{mn}\to\Re^{mn}$ $\quad q_s^i(X_{n-1})=x^{(s-1)i}$, $s=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,m}$ и функцию $L_1:\Re^{2mn}\to\Re$,

$L_1(X_n,P_{n-1})=L(q_1^i=x^{(0)i},q_2^i=x^{(1)i},...,q_n^i=x^{(n-1)i},P_{n-1},p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))=L(q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}))$

$H:\Re^{2mn}\to\Re$ - функция $2mn$ переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $\ j1=\overline{1,m},\ \ l1=\overline{1,n},\ \ j2=\overline{1,m},\ \ l2=\overline{1,n}$.

$$L(q,p)=-H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^jq_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\qquad H_1(X_n,P_{n-1})=H(q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}))$$

$$L_1(X_n,P_{n-1})=-H_1(X_n,P_{n-1})+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}x^{(l)j}p_l^j=-H_1(X_n,P_{n-1})+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n-1}x^{(l)j}p_l^j+\sum_{j=1}^{m}x^{(n)j}p_n^j$$

1) $0\le k\le n\text{-}1<n,\ \ s=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}\qquad x^{(n)j}=\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}\right)+\sum_{j=1}^{m}x^{(n)j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{j=1}^{m}x^{(n)j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}$$

Так как $0\le k\le n\text{-}1<n,\ \ 1\le l\le n-1\ \ s=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}=\begin{cases}0\ ,\ (k=0)\wedge(1\le l\le n-1)\\ \delta_k^l\ \delta_i^j\ ,\ 1\le k,l\le n\text{-}1\end{cases}=\delta_k^l\,\delta_i^j(1-\delta_k^0)$

$\delta_i^j=\begin{cases}1,\ j=i\\0\ ,\ j\ne i\end{cases}$ *−символ Кронекера*, $\delta_k^l=\begin{cases}1,\ l=k\\0\ ,\ l\ne k\end{cases}$ *−символ Кронекера* $\delta_k^0=\begin{cases}1,\ k=0\\0\ ,\ k\ne 0\end{cases}$ *−символ Кронекера*$\Rightarrow$

$$-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\delta_k^l\,\delta_i^j(1-\delta_k^0)p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\delta_k^l\,\delta_i^j(1-\delta_k^0)p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)p_{l=k}^{j=i}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$=-\dfrac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)p_k^i+\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}$ Так как $P_{n-1}=(p_1,p_2,...,p_{n-1})$ и $X_{n-1}=(x^{(0)},x^{(1)},...,x^{(n-1)})$-независимы, то

$$\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=0\Rightarrow-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)p_k^i+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)p_k^i+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\cdot 0=$$

$$= -\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}} + (1-\delta_k^0)p_k^i = -\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}(1-\delta_n^k) + (1-\delta_k^0)p_k^i \qquad , 0 \le k \le n\text{-}1$$

2) $k = n$ **По теореме 5 п.3** $\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, x^{(n)})) = p_n^i =$

$$= -\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k=n)i}}(1-\delta_n^{k=n}) + (1-\delta_{k=n}^0)p_{k=n}^i = -\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k=n)i}}(1-1) + (1-0)p_{k=n}^i = -\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k=n)i}} \cdot 0 + 1 \cdot p_n^i = p_n^i$$

Объединяем результаты, полученные в пунктах 1),2), получим :

$$\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} = -(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + (1-\delta_k^0)(1-\delta_n^k)\cdot(1-\delta_n^1)\cdot p_k^i + p_n^j \cdot \delta_n^k = -(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + (1-\delta_k^0)\cdot p_k^j \quad ,0 \le k \le n$$

Теорема 7 доказана.

Теорема 8 $\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} = (1-\delta_n^k)\,\dot{p}_{k+1}^j + (1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$ в силу системы уравнений Гамильтона (35)

$$\begin{cases} \frac{dq_k^i(t)}{dt} = \frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial p_k^i} \\ \frac{dp_k^i(t)}{dt} = -\frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial q_k^i} \end{cases} \quad i = \overline{1,m}, k = \overline{1,n} \;,$$

$$\delta_k^0 = \begin{cases} 1,\ 0 = k \\ 0\ ,\ 0 \ne k \end{cases} - \textit{символ Кронеккера} \qquad \delta_k^i = \begin{cases} 1,\ i = k \\ 0\ ,\ i \ne k \end{cases} - \textit{символ Кронеккера}$$

Доказательство. Так как $-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^i} = \frac{dp_{k+1}^i(t)}{dt} = \dot{p}_{k+1}^i$ **По теореме 7 п.2**

$$\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} = -(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + (1-\delta_k^0)\cdot p_k^j = (1-\delta_n^k)\,\dot{p}_{k+1}^i + (1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$$ **Теорема 8** доказана.

Определение 2 Функцию $L_1 : \Re^{2mn} \to \Re$ **из теоремы 7** переменных $(X_n, P_{n-1}) = (x^{(0)i}, x^{(1)i}, ..., x^{(n-1)i}, x^{(n)i}, p_1^i, ..., p_{n-1}^i)$

$$L_1(X_n, P_{n-1}) = L(q_1^i = x^{(0)i}, q_2^i = x^{(1)i}, ..., q_n^i = x^{(n-1)i}, P_{n-1}, p_n = p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)})) = L(q(X_{n-1}), P_{n-1}, p_n(q(X_{n-1}), P_{n-1}, x^{(n)}))$$

$$q(X_{n-1}) : \Re^{mn} \to \Re^{mn} \qquad q_s^i(X_{n-1}) = x^{(s-1)i}\ ,\ s = \overline{1,n}\ ,\ i = \overline{1,m}$$

$$L(q,p) = -H(q,p) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$$

($L(q,p) : \Re^{2mn} \to \Re$ -функция Лагранжа, двойственная к функции Гамильтона $H(q,p) : \Re^{2mn} \to \Re$) назовем функцией Лагранжа, адаптированной двойственной к функции Гамильтона $H(q,p)$ или просто адаптированной к функции Гамильтона; преобразование $q(X_{n-1}) : \Re^{mn} \to \Re^{mn}$ $q_s^i(X_{n-1}) = x^{(s-1)i}\ , s = \overline{1,n}\ , i = \overline{1,m}$ назовем адаптирующим преобразование q координат(не выраждено);преобразование А:$(q(X_n, P_{n-1}), p(X_n, P_{n-1}))$:
$(q_k^i = q_k^i((X_n, P_{n-1}) = x^{(k-1)i}), p_1^i((X_n, P_{n-1}) = p_1^i, ..., p_{n-1}^i((X_n, P_{n-1}) = p_{n-1}^i, p_n^i((X_n, P_{n-1}) = p_n^i(q = X_{n-1}, P_{n-1}, x^{(n)}))$
назовем адаптирующим преобразованием (q,p) координат.

Теорема 9 Адаптирующее преобразование $\mathrm{A} : \Re^{2\mathrm{mn}} \to \Re^{2mn}$ $A(X_n, P_{n-1}) = (q(X_n, P_{n-1}), p(X_n, P_{n-1}))$
$q_k^i(X_n, P_{n-1}) = x^{(k-1)i}$ $k = \overline{1,n},$ $p_{n-1}(X_n, P_{n-1}) = p_{n-1}, p_n = p_n(X_{n-1}, P_{n-1}, x^{(n)}))$ не выраждено.

Доказательство. Матрица Якоби $\frac{\partial(q,p)}{\partial(X_{n-1}, P_{n-1}, x_n)}$ имеет вид :

$$\frac{\partial(q,p)}{\partial(X_{n-1}, P_{n-1}, x_n)} = \begin{pmatrix} E_{m\bullet(2n-1)} & 0^T_{1\times m\bullet(2n-1)} \\ 0_{1\times m\bullet(2n-1)} & \frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(n)j}} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^i \partial p_n^j}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

где $E_{m\bullet(2n-1)}$ -единичная матрица, $0_{1\times m\bullet(2n-1)}$ -0-вектор, $0^T_{1\times m\bullet(2n-1)}$ -транспонированный 0-вектор.

В правом нижнем углу матрицы использован основной результат работы **[22],стр. 150, теорема 6 :**
$\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}}=\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^i\partial p_n^j}\right)^{-1}$ и так как $\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^i\partial p_n^j}\right)\neq 0\Rightarrow\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}}\right)=\det^{-1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^i\partial p_n^j}\right)\neq 0$

$\det(\frac{\partial(q,p)}{\partial(X_{n-1},P_{n-1},x_n)})=\det^{-1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^i\partial p_n^j}\right)\neq 0$,значит, переменные (X_n,P_{n-1}) -независимы **Теорема 9 доказана.**

Определение 3 Обратное к $\mathrm{A}:\Re^{2\mathrm{mn}}\to\Re^{2mn}$ $A(X_n,P_{n-1})=(q(X_n,P_{n-1}),p(X_n,P_{n-1}))$
$q_k^i(X_n,P_{n-1})=x^{(k-1)i}$ $k=\overline{1,n},$ $p_{n-1}(X_n,P_{n-1})=p_{n-1},p_n=p_n(X_{n-1},P_{n-1},x^{(n)}))$ преобразование
$\mathrm{A}^{-1}:(q,p)\to(X_n(q,p)\ ,\ P_{n-1}(q,p))$ $\mathrm{A}^{-1}(q,p)=(x^{(k-1)i}(q,p)=q_k^i\ k=\overline{1,n}\ ;\ x^{(n)i}(q,p)=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\ ;\ p_l^i(q,p)=p_l^i\ l=\overline{1,n-1}\ )$
называется обратным адаптирующим преобразование координат(преобразование Лежандра)

Определение 4 Пусть $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$ -функция Гамильтона, $L_1(X_n,P_{n-1}):\Re^{2mn}\to\Re$ -адаптированная к ней функция Лагранжа. Система уравнений $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k D_t^k(\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}})=0,\ i=\overline{1,m}$ назовем системой уравнений Эйлера-Лагранжа, адаптированной к функции Гамильтона $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$,где D_t^k - оператор k - кратного полного дифференцирования по переменной t

Теорема 10. 1) $H:\Re^{2mn}\to\Re$ - функция $2mn$ переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m},\ l1=\overline{1,n},\ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}$.

$L(q,p)=-H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$ -двойственная к $H:\Re^{2mn}\to\Re$ функция Лагранжа

2) $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i\partial p_k^i})\neq 0$, $i,j=\overline{1,m}$ окрестности $U(q_0,p_0)$ точки (q_0,p_0)

(**по теореме 4 п.2** $p_n=p_n(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)}))=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))$

3) Пусть $L_1:\Re^{2mn}\to\Re$ -адаптированная функция Лагранжа переменных (X_n,P_{n-1}):
$L_1(X_n,P_{n-1})=L(q_1^i=x^{(0)i},q_2^i=x^{(1)i},\dots,q_n^i=x^{(n-1)i},P_{n-1},p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))=L(q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}))$
Тогда преобразование Лежандра(обратное адаптирующее преобразование координат)
$\mathrm{A}^{-1}:(q,p)\to(X_n(q,p)\ ,\ P_{n-1}(q,p))$ $\mathrm{A}^{-1}(q,p)=(x^{(k-1)i}(q,p)=q_k^i\ k=\overline{1,n}\ ;\ x^{(n)i}(q,p)=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\ ;\ p_l^i(q,p)=p_l^i\ l=\overline{1,n-1}\ )$

любого решения $(q(t),p(t))$ системы ОДУ 1-ого порядка Гамильтона

$$\begin{cases}\frac{dq_k^i(t)}{dt}=\frac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial p_k^i}\\ \frac{dp_k^i(t)}{dt}=-\frac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial q_k^i}\end{cases}\quad i=\overline{1,m},k=\overline{1,n}\qquad(36)$$

$(X_n(t),P_{n-1}(t))=A^{-1}(\ (q(t),p(t))\ )=$
$=(x^{(k-1)i}(q(t),p(t))=q_k^i(t)\ k=\overline{1,n}\ ;\ \ x^{(n)i}(q(t),p(t))=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}(q(t),p(t))\ ;\ \ p_l^i(q(t),p(t))=p_l^i(t)\ l=\overline{1,n-1}\ )$

является решением адаптированной системы уравнений Эйлера-Лагранжа.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k D_t^k(\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}})=0,\ i=\overline{1,m}$$

Доказательство. По теореме 8 $\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=(1-\delta_n^k)\,\dot{p}_{k+1}^j+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$, **по теореме 7 п.3** $\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(m)j}}=p_n^j$

$$\delta_k^0 = \begin{cases} 1,\ 0 = k \\ 0\ ,\ 0 \neq k \end{cases} \quad - \ \textit{символ Кронекера}$$

При $0 < 1 \le k \le n-1 < n \Rightarrow \delta_n^k = 0 = \delta_k^0 \Rightarrow 1 - \delta_k^0 = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k D_t^k (\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}}) = (-1)^0 \cdot \frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(0)i}} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}}) + (-1)^n D_t^n \left(\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(n)i}} \right) =$$

$$+ (-1)^n D_t^n (p_n^i) = \dot{p}_1^j + (-1)^n D_t^n \left(p_n^j\right) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k ((1-\delta_n^k)\, \dot{p}_{k+1}^j + (1-\delta_k^0) \cdot p_k^j) = \dot{p}_1^j + (-1)^n D_t^n \left(p_n^j\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (\dot{p}_{k+1}^j + p_k^j) = \dot{p}_1^j + (-1)^n D_t^n \left(p_n^j\right) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (\dot{p}_{k+1}^j) + (-1)^k D_t^k (p_k^j)) =$$

$$= \dot{p}_1^j + (-1)^n D_t^n \left(p_n^j\right) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (\dot{p}_{k+1}^j) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (p_k^j) = \dot{p}_1^j + (-1)^n D_t^n \left(p_n^j\right) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^{k+1} (p_{k+1}^j) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (p_k^j) = \dot{p}_1^j + (-1)^n D_t^n \left(p_n^j\right) + \sum_{l=2}^{n} (-1)^{l-1} D_t^l (p_l^j) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (p_k^j) = \dot{p}_1^j + (-1)^n D_t^n \left(p_n^j\right) +$$

$$(-1) \cdot \sum_{l=2}^{n} (-1)^l D_t^l (p_l^j) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (p_k^j) = \dot{p}_1^j + (-1)^n D_t^n \left(p_n^j\right) - (-1)^n D_t^n \left(p_n^j\right) - \sum_{l=2}^{n-1} (-1)^l D_t^l (p_l^j) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k D_t^k (p_k^j) + (-1)^{k=1} D_t^{k=1} (p_{k=1}^j) = \dot{p}_1^j - \sum_{l=2}^{n-1} (-1)^l D_t^l (p_l^j) + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k D_t^k (p_k^j) + (-1)^{k=1} D_t^{k=1} (p_{k=1}^j) =$$

$$= \dot{p}_1^j + (-1)^1 D_t^1 (p_1^j) = \dot{p}_1^j - \dot{p}_1^j = 0$$

Теорема 10 доказана

HAMILTON INVERSE THEOREM

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

The solution of a system 2mn ordinary differential Hamilton's equations of the first order are solutions of the system of the corresponding system of m differential equations of order n Euler-Lagrange dual for the Hamiltonian Lagrangian function and the corresponding transformation of variables.

Keywords: Hamilton function, variation problem, fiber space of velocities,, Euler-Lagrange equations, smooth manifolds, energy tensor, tensor of generalized momentum, non-degenerate function.

ЛИТЕРАТУРА

21. Дубровин В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: УРСС, 1994.
22. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
23. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
24. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
25. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.

26. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
27. Козлов А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2006. – № 3. – С. 63–64.
28. Галеев Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
29. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
30. Закон преобразования обобщенного импульса / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
31. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
32. Трофимов В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов А.Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995.
33. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
34. Вакуленко С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
35. Пастухов Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
36. Пастухов Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
37. Пастухов Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
38. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2018. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094. – Дата доступа: 15.06.2018.
39. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика,7:1(2001), 285-288
40. Пастухов, Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.
41. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии 2 [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/23288. – Дата доступа: 26.03.2019.
42. Пастухов, Ю.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 137-153.

УДК 514

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОБОБЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ НА ЭКСТРЕМАЛЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Аннотация: В работе рассматриваются свойства функций Гамильтона и Лагранжа в координатно - импульсном пространстве. Основным полученным результатом является свойство сохранения обобщенной энергии ранга n на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка n.Это свойство является достаточным, но не необходимым условием сохранения обобщенной энергии ранга n.

Ключевые слова: Функция Гамильтона, вариационная задача, расслоённое пространство скоростей, уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, тензор обобщенного импульса, невырожденный гессиан.

Введение.

Гамильтон в 1835 году получил новую форму уравнений движения механических систем канонические уравнения Гамильтона.. Полученная система канонических уравнений содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем у Лагранжа, но зато все они первого порядка, (у Лагранжа - второго).. Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряд задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.

Подход Гамильтона оказался высоко эффективным во многих математических моделях физики. Первоначально вариационный принцип Гамильтона был сформулирован для задач механики, но при некоторых естественных предположениях из него выводятся уравнения Максвелла электромагнитного поля. С появлением теории относительности оказалось, что этот принцип строго выполняется и в релятивистской динамике. Его эвристическая сила существенно помогла разработке квантовой механики, а при создании общей теории относительности Давид Гильберт успешно применил гамильтонов принцип для вывода уравнений гравитационного поля (1915 год).Из сказанного следует, что принцип наименьшего действия Гамильтона(и естественным образом связанная с ним система канонических уравнений) занимает место среди коренных, базовых законов природы — наряду с законом сохранения энергии и законами термодинамики. Представленная работа является продолжением работ авторов [9, 10,13,16,17,18,19,20,21,22,23].

Основные определения.

Пусть $L:T^pX_m \to \Re$, $L(x,...,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения T^pX_m.

Определение 1. Система функций $P_n = \left\{p_k^i(n)\right\} = \left\{p_{k,n}^i\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = \overline{0,n}$, $i = \overline{1,m}$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, ..., x^{(b(n,p,k))}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$$ называется обобщенным

импульсом ранга n для функции $L : T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$, где $L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функция $p_{k,n}^i$ называются $k-ой$ компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k -импульсами) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n .

Определение 2. Пусть $L: T^p X_m \to \Re$, $L(x, ..., \overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Функция

$$\bullet \quad H = H(x, \dot{x}..., \overset{(a(n,p))}{x}) = H_n = H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n} \overset{(k)i}{x} = -L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n} D^k_t x^i =$$

$$= -L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right) D^k_t x^i \quad , \overset{(k)i}{x} = D^k_t x^i , \qquad (1)$$

$$p^i_k(n) = p^i_{k,n}(x, \dot{x}, ..., \overset{(b(n,p,k))}{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

где D^k_t – оператор k- кратного полного дифференцирования по времени *t*, называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) ранга *n* этого преобразования двойственной к функции Лагранжа $L: T^p X_m \to \Re$, а также обобщенной энергией системы, состояние которой описывается функцией $L: T^p X_m \to \Re$ в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Имеет место следующая

Лемма Максимальные порядки производной по *t* $b(n, p, k), a(n, p)$ в выражениях(1),(2) для $p^i_k(n), H$

$$p^i_k(n) = p^i_{k,n}(x, \dot{x}, ..., \overset{(b(n,p,k))}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$$

$$H = H(x, \dot{x}..., \overset{(a(n,p))}{x}) = H_n = H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n} \overset{(k)i}{x} = -L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x, \dot{x}, ..., \overset{(b(n,p,k))}{x}) D^k_t x^i = -L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right) D^k_t x^i , \ \overset{(k)i}{x} = D^k_t x^i \text{, имеют вид:}$$

$$b(n, p, k) = \max(2\min(p, n) - k, p) = \begin{cases} 1)(p \le n) \begin{cases} 2p - k, & k \le p \le n \\ p \quad , & p \le k \le n \end{cases} \\ 2)(p \ge n), \ \max(2n - k, p), \quad p \ge n \end{cases} = \begin{cases} 2p - k, & k \le p \le n \\ p \quad , & p \le k \le n \\ \max(2n - k, p), & p \ge n \end{cases} \qquad (3)$$

$$a(n, p) = \max_{1 \le k \le n} (b(n, p, k), k) = \begin{cases} \max(\max\limits_{1 \le k \le \min(n,p) = p} (2p - k, k), \ \max\limits_{p \le k \le n} p) = \max(\max\limits_{1 \le k \le \min(n,p) = p} (2p - k), p), \ при \ p \le n \\ \max\limits_{1 \le k \le \min(n,p) = n} (\max(2n - k, p), k) = \max(2n - 1, p, n) \ , \ при \ p \ge n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \max(2p - 1, p) = 2p - 1 \ , \ при \ p \le n \\ \max(2n - 1, p) \ , \ при \ p \ge n \end{cases} \qquad (4)$$

Доказательство. Максимальный порядок производной по *t* порядка l в $p^i_k(n)$ равен $l + l + k = 2 \cdot l + k \ при \ l + k \le p$. Если $l + k > p$, то $\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и, значит, коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, следовательно, при определении максимального порядка производной по *t* можно считать $l + k \le p$ (в частности, $k \le p$,но $k \le n \Rightarrow k \le \min(n, p)$). Кроме того, $l \le n - k \Leftrightarrow l + k \le n \Rightarrow l + k \le \min(n, p) \Rightarrow l \le \min(n, p) - k \Rightarrow 2 \cdot l + k \le 2 \cdot (\min(n, p) - k) + k =$
$= 2 \cdot \min(n, p) - 2 \cdot k + k = 2 \cdot \min(n, p) - k$, $p^i_{k,n}$ зависит от производных порядка

$$b(n,p,k)=\max(2\min(p,n)-k,p)=\begin{cases}1)(p\le n)\begin{cases}2p-k, & k\le p\le n\\ p\quad, & p\le k\le n\end{cases}\\ 2)(p\ge n),\ \max(2n-k,p), \quad p\ge n\end{cases}\qquad \begin{cases}2p-k, & k\le p\le n\\ p\quad, & p\le k\le n\\ \max(2n-k,p), & p\ge n\end{cases} \tag{5}$$

Учитывая определение $b(n,p,k)=\max(2\min(p,n)-k,p)$ при $p=n$ получим

$$b(n,n,k)=b(n,p=n,k)=\max(2\min(n,n)-k,p)=\max(2n-k,n)=2n-k\ ,\text{так как при } 1\le k\le\min(p,n)\Rightarrow k\le n \tag{6}$$

Этот же результат получается из (3) как граничный случай, так как из $p=n\Rightarrow(p\le n)\wedge(p\ge n)$ и ,значит,

$2(p=n)-k=2n-k=\max(2n-k,p=n)=\max(2n-k,n)=2n-k,$ *так как при* $1\le k\le\min(p,n)\le n$

Для каждого слагаемого вида $p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}=p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}$ – произведения импульса порядка k на производную того же порядка по *i*-й координате – справедливо $\max(\max(2\min(p,n)-k,p),k)=\max(2\min(p,n)-k,p,k)$. Энергия системы

$$H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}=-L(x,...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x})\overset{(k)i}{x}$$

будет зависеть от максимального порядка производной- имеем прямую задача на $\max\min$:

$$a(n,p)=(\max_{1\le k\le n}(2\min(p,n)-k,p)\ ,k,p)=\max_{1\le k\le n}(2\min(p,n)-k,p,k)=\max_{1\le k\le n}(\max(2\min(p,n)-k,p),k)=\max_{1\le k\le n}(b(n,p,k),k) \tag{7}$$

Подставляя в (4) равенства, полученные в (3), получим:

$$a(n,p)=\max_{1\le k\le n}(b(n,p,k),k)=\begin{cases}\max(\max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=p}(2p-k,k),\ \max\limits_{p\le k\le n}p)=\max(\max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=p}(2p-k),\ p),\ \text{при}\ p\le n\\ \max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=n}(\max(2n-k,p),k)=\max(2n-1,p,n)\ ,\ \text{при}\ p\ge n\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\max(2p-1,p)=2p-1\ ,\ \text{при}\ p\le n\\ \max(2n-1,p)\ ,\ \text{при}\ p\ge n\end{cases} \tag{8}$$

Учитывая равенство $a(n,p)=\max\limits_{1\le k\le n}(b(n,p,k),k)$ при $p=n$ получим

$$a(n,p)=a(n,p=n)=\max_{1\le k\le n}(b(n,p=n,k),k)=\max_{1\le k\le n}(2n-k,k)=2n-1\ ,\text{так как при } 1\le k\le\min(p,n)\Rightarrow k\le n$$

Этот же результат получается из (5) как граничный случай ,так как из $p=n\Rightarrow(p\le n)\wedge(p\ge n)$ и ,значит,

$2(p=n)-1=2n-1=\max(2n-1,p=n)=\max(2n-1,n)=2n-1,$ *так как* $n\ge 1$

На основании этого можно записать

$$H(x,\dot{x}...,\overset{(a(n,p))}{x})=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dot{x}...,\overset{(b(n,p,k)}{x})\overset{(k)i}{x}=-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dot{x}...,\overset{(b(n,p,k)}{x})D^k_t x^i==-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})D^k_t x^i\ . \tag{9}$$

Доказательство Леммы завершено.

Замечание 1 Тем не менее , можно всегда считать, что $p\ge n$, так как при $p<n$ можно определить

$L_1(x,...,\overset{(n)}{x})\equiv L(x,...,\overset{(p)}{x})\Rightarrow a(n,p)=\max(2n-1,p)$, $b(n,p,k)=\max(2n-k,p)$ В частности , при

$$p=n\Rightarrow a(n,p=n)=\max(2n-1,p=n)=2n-1\ ,\ b(n,p=n,k)=\max(2n-k,p=n)=$$

$$=\max(2n-k,n)=2n-k\ \text{так как}\ 2n-k\ge n\ \ ,\text{так как при}\ 1\le k\le\min(p,n)\Rightarrow k\le n$$

Итак, если некоторое утверждение, использующее взятие производных конечного порядка выполнено для некоторого p ,то

Функциональная часть системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка n может быть интерпретирована как импульсы $0-\text{ого}$ порядка ранга n :

$$p^i_{k=0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+0)i}{x}})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l)i}{x}})=0\ ,\ i=\overline{1,m} \tag{10}$$

Постановка задачи.

Пусть $L:T^pX_m \to \Re$, $L(x,..., \overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения T^pX_m. Рассмотрим функцию Гамильтона, двойственную к $L:T^pX_m \to \Re$:

$$H(x,\dot{x}..., \overset{(a(n,p))}{x}) = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i(x,\dot{x}..., \overset{(b(n,p,k)}{x}) \overset{(k)i}{x} = -L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i(x,\dot{x}..., \overset{(b(n,p,k)}{x}) D_t^k x^i == -L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}) D_t^k x^i$$

Рассмотрим следующую задачу : при каких условиях имеет ли место сохранение функции Гамильтона на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа. Докажем, что при $p \le n$ имеет место сохранение функции Гамильтона на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа,. Ранее было доказано [16], что при $p \le n$ энергия системы является тензором нулевого ранга, то есть не зависит от выбора локальной системы координат (x) в базе X_m расслоения T^pX_m, а при $p > n$, вообще говоря, зависит от локальных координат и, таким образом, не сохраняется при замене локальной системы координат в базе X_m расслоения T^pX_m. Имеет место следующая важная

Теорема 1 (о дифференциальной связи импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков ранга n). Пусть $L:T^pX_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа.

$p_i^k(x,\dot{x},..., \overset{(p+n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$ -импульс k-ого порядка по i-ой координате. $p_{k,n}^i = \sum_{l_1=0}^{n-k}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+k)i}})$ импульс k-ого порядка, а соответственно

$p_{k-1,n}^i = \sum_{l_1=0}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})$ импульс (k-1) –ого порядка .Тогда справедливо:

$$D_t p_{k,n}^i(x,\dot{x},..., \overset{(b(n,p,k))}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_{k-1,n}^i(x,\dot{x},..., \overset{(b(n,p,k-1))}{x}) \qquad (11)$$

Доказательство. Преобразуем выражение

$$D_t p_{k,n}^i = D_t(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})) = \sum_{l=0}^{n-k} D_t((-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t(D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^{l+1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}) = (-1)\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1} D_t^{l+1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}) == (-1)(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1} D_t^{l+1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+1+k-1)i}}))$$

Выполним замену $l_1 = l+1$, так как $l = \overline{0,n-k}$ то $l_1 = \overline{1,n-k+1}$. Следовательно,

$$D_t p_{k,n}^i = (-1)(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1} D_t^{l+1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+1+k-1)i}})) = (-1)(\sum_{l_1=1}^{n-k+1}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}}))$$

$$= (-1)(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})) = (-1)(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}})) =$$

$$=(-1)(\sum_{l_1=0}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}}) - (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(0+(k-1))i}})) = (-1)(p_{k-1,n}^i - \frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}) = -p_{k-1,n}^i + \frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}})$$

Теорема 1 доказана.

Имеет место следующая простая

Теорема 2(о связи импульсов $k-ого$ порядка рангов n и $n+1$). Пусть $L:T^pX_m\to\Re$.

$L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции $L:T^pX_m\to\Re$ при выборе локальных координат в базе расслоения X_m, $p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$-импульс k-ого порядка ранга n

$p^i_{k,n+1}=\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$- импульс k-ого порядка ранга n +1. Тогда справедливо:

$$p^i_{k,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n+1,p,k))}{x})=p^k_i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})+(-1)^{n+1-k}D^{n+1-k}_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})\ ,\ i=\overline{1,m},\ k=\overline{0,n} \quad (12)$$

Доказательство: $p^i_{k,n+1}=\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})+(-1)^{n+1-k}D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1-k+k)i}{x}})=$

$=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})+(-1)^{n+1-k}D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})=p^i_{k,n}+(-1)^{n+1-k}D^{n+1-k}_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})$.

Так как $p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3 Пусть $L:T^pX_m\to\Re$, $L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения T^pX_m.Тогда при $1\le p\le n$ выполняется равенство

$$D_t(H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x}))=-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\bullet\dot{x}^i$$

где $p^i_{k=0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}})=0$, $i=\overline{1,m}$ -импульсы $0-ого$ порядка(функциональная часть системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка n

$H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x})$ обобщенная энергия системы ранга n :

$$H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x})=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k)}{x})\overset{(k)i}{x}=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k)}{x})D^k_t x^i=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})D^k_t x^i \quad (13)$$

Где $p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{0,\min(n,p)}, i=\overline{1,m}$ -импульс k -ого порядка ранга n

$$b(n,p,k)=\max(2\min(p,n)-k,p)=\begin{cases}1)(p\le n)\begin{cases}2p-k, & k\le p\le n\\ p\quad, & p\le k\le n\end{cases}\\ 2)(p\ge n),\ \max(2n-k,p), \quad p\ge n\end{cases}=\begin{cases}2p-k, & k\le p\le n\\ p\quad, & p\le k\le n\\ \max(2n-k,p), & p\ge n\end{cases}$$

$$a(n,p)=\max_{1\le k\le n}(b(n,p,k),k)=\begin{cases}\max\left(\max\limits_{1\le k\le \min(n,p)=p}(2p-k,k),\ \max\limits_{p\le k\le n} p\right)=\max\left(\max\limits_{1\le k\le \min(n,p)=p}(2p-k),\ p\right),\ \text{при } p\le n\\ \max\limits_{1\le k\le \min(n,p)=n}(\max(2n-k,p),k)=\max(2n-1,p,n)\ ,\ \text{при } p\ge n\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\max(2p-1,p)=2p-1\ ,\ \text{при } p\le n\\ \max(2n-1,p)\ ,\ \text{при } p\ge n\end{cases}$$

Доказательство. Без ограничения общности в силу **замечания 1** будем считать, что $p=n$

$$p=n\Rightarrow a(n,p=n)=\max(2n-1,p=n)=2(p=n)-1=2n-1\ ,\ b(n,p=n,k)=\max(2n-k,p=n)=2n-k$$

$$H(x,x...,\overset{(a(n,p))}{x})=H(x,...,\overset{(2n-1))}{x})=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,x,...,\overset{(p=n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}=-L(x,x,...,\overset{(n)}{x})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}$$ Найдем полную производную по t: $D_t(-L(x,x,...,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x})=$

$$=D_t(-L(x,x,...,\overset{(n)}{x}))+D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x})=D_t(-L(x,x,...,\overset{(n)}{x}))+(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x})D_t\overset{(k)i}{x})\quad(13)$$

По теореме 1 $$D_tp^k_i(x,x,...,\overset{(p+n-k)}{x})=\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}-p^{k-1}_i(x,x,...,\overset{(p+n-(k-1))}{x})\quad(14)$$ При $p=n\Rightarrow D_tp^k_i(x,x,...,\overset{(p+n-k)}{x})=$

$$=D_tp^k_i(x,x,...,\overset{(n+n-k)}{x})=D_tp^k_i(x,x,...,\overset{(2n-k)}{x})=\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}-p^{k-1}_i(x,x,...,\overset{(n+n-(k-1))}{x})=\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}-p^{k-1}_i(x,x,...,\overset{(2n-k+1)}{x})$$

Подставим (14) в (13) $D_t(-L(x,x,...,\overset{(n)}{x}))+(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x})D_t\overset{(k)i}{x})=$

$$=D_t(-L(x,x,...,\overset{(n)}{x}))+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}((\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}-p^i_{k-1,n}(x,x,...,\overset{(n+n-(k-1))}{x}))\overset{(k)i}{x}+p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x})D_t\overset{(k)i}{x})=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}-p^i_{k-1,n}(x,x,...,\overset{(n+n-(k-1))}{x})\overset{(k)i}{x}+p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x})=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}p^i_{k-1,n}(x,x,...,\overset{(n+n-(k-1))}{x})\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}\quad(15)$$

Сделаем замену $k-1=l\Rightarrow k=l+1\quad 1\le k\le n\ \Leftrightarrow\ k-1\le l\le n-1$ С учетом этого запишем (15):

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}p^i_{k-1,n}(x,x,...,\overset{(2n-(k-1))}{x})\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(l)i}{x}}\overset{(l+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}p^i_{l,n}(x,x,...,\overset{(2n-l)}{x})\overset{(l+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}\quad(16)$$

Так как $\sum\limits_{i=i_0}^{i=i_1}a_i=\sum\limits_{k=i_0}^{k=i_1}a_k$ не зависит от индекса суммирования , то (16) можно преобразовать (16):

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(l)i}{x}}\overset{(l+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}p^i_{l,n}(x,x,...,\overset{(2n-l)}{x})\overset{(l+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}p^i_{k,n}(x,x...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x} \qquad (17)$$

Так как

$$\sum_{i=0}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_i+a_0=\sum_{i=0}^{n-1}a_i+a_n \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{ik}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ik}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}a_{ik}+\sum_{i=1}^{m}a_{in}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ik}+\sum_{i=1}^{m}a_{i0}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}a_{ik}+\sum_{i=1}^{m}a_{i0}+\sum_{i=1}^{m}a_{in}$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}\,)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\overset{(n+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\overset{(0+1)i}{x}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}\,)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\overset{(n+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\dot{x}^{i} \qquad (18)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\overset{(0+1)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\dot{x}^{i} \qquad (19)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k=0,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-0)}{x})\overset{(0+1)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n)}{x})\dot{x}^{i} \qquad (20)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k=n,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x} \qquad (21)$$

Подставляя (18),(19),(20),(21) в (17) и учитывая ,что $p^{i}_{k=n,n}=\sum_{l=0}^{n-n}(-1)^{l}D^{l}_{t}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+n)i}{x}}\Big)=\sum_{l=0}^{0}(-1)^{l}D^{l}_{t}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\Big)=\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}$ имеем:

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}\,)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\overset{(n+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\dot{x}^{i}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\dot{x}^{i}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n)}{x})\dot{x}^{i}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k=n,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}\,)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\dot{x}^{i}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0)i}{x}}\dot{x}^{i}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k=n,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k=n,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n)}{x})\dot{x}^{i}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{n,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n)}{x})\dot{x}^{i}=-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{n,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{n,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n)}{x})\dot{x}^{i}=-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(2n)}{x})\dot{x}^{i}$$ **Теорема 3** доказана.

Очевидным следствием **теоремы 3** является очевидная

Теорема 4 Пусть $L:T^{p}X_{m}\to\Re$, $L(x,\dots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^{p}X_{m}$. $1\le p\le n$ Тогда на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа

$$p^i_{k=0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}\right)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right)=0$$, $i=\overline{1,m}$ -импульсы $0-ого$ порядка(функциональная часть системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка n

Двойственная к функции Лагранжа функция Гамильтона(обобщенная энергия) сохраняется:

$$D_t(H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x}))=\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\bullet\dot{x}^i\equiv 0 \Leftrightarrow H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x})\equiv const \quad (22)$$

Доказательство. На экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа

$$p^i_{0,n}=p^i_{k=0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}\right)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right)=0\ ,\ i=\overline{1,m}$$

По теореме 3 для $1\le p\le n$ имеем $D_t(H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x}))=\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\bullet\dot{x}^i=0$ **Теорема 4** доказана.

Замечание 2 $L:T^pX_m\to\Re$, $L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения T^pX_m. $1\le p\le n$. По **Лемме1** система уравнений Лагранжа $p^i_{k=0,n}=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right)$ имеет порядок производных

$$b(n,p,k)=\max(2\min(p,n)-k,p)=\begin{cases}1)(p\le n)\begin{cases}2p-k, & k\le p\le n\\ p\ , & p\le k\le n\end{cases}\\ 2)(p\ge n),\ \max(2n-k,p), & p\ge n\end{cases}=\begin{cases}2p-k, & k\le p\le n\\ p\ , & p\le k\le n\\ \max(2n-k,p), & p\ge n\end{cases},$$

$$b(n,p,k=0)=2p-0=2p$$

а двойственная к функции Лагранжа функция Гамильтона

$$a(n,p)=\max_{1\le k\le n}(b(n,p,k),k)=\begin{cases}\max(\max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=p}(2p-k,k),\ \max\limits_{p\le k\le n} p)=\max(\max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=p}(2p-k),\ p),\ при\ p\le n\\ \max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=n}(\max(2n-k,p),k)=\max(2n-1,p,n)\ ,\ при\ p\ge n\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\max(2p-1,p)=2p-1\ ,\ при\ p\le n\\ \max(2n-1,p)\ ,\ при\ p\ge n\end{cases},\ a(n,p)=2p-1$$

,то есть на 1 меньше, чем система уравнений Эйлера-Лагранжа и по **теореме 4** является интегралом этой системы. **Теорема 3** сформулирована для $p\le n$.Для обобщения **теоремы 3** докажем следующую

Теорема 5 Пусть **.** Пусть $L:T^pX_m\to\Re$, $L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения T^pX_m. Функция

- $$H_n(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x})=H_n=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}D_t^k x^i=$$
$$=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)D_t^k x^i\quad,\ \overset{(k)i}{x}=D_t^k x^i,$$
- $$H_{n+1}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x})=H_{n+1}=H_{n+1}(L,x)=H(L,x,n+1)=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x}=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n+1}D_t^k x^i=$$
$$=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)D_t^k x^i\quad,\ \overset{(k)i}{x}=D_t^k x^i,$$

-двойственные функции Гамильтона(обобщенная энергия) рангов $n\ и\ n+1$ соответственно

$$p_k^i(n) = p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)\quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$

$$p_k^i(n+1) = p^i_{k,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n+1,p,k))}{x}) = \sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)\quad k=\overline{0,n+1}, i=\overline{1,m}$$

-импульсы $k-ого$ порядка рангов n $и$ $n+1$ соответственно. Тогда

$$\dot{H}_{n+1}(x,x\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x}) = H_{n+1} = H_n + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\cdot \overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m} p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot \overset{(n+1)i}{x} \quad (23)$$

Доказательство.

$$\dot{H}_{n+1}(x,x\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x}) = H_{n+1} = H_{n+1}(L,x) = H(L,x,n+1) = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x} \quad (24)$$

Учитывая тождество $\sum_{k=1}^{n+1}a_k = \sum_{k=1}^{n}a_k + a_{n+1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+1}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ik} + \sum_{i=1}^{m}a_{i,n+1}$, преобразуем(24):

$$\dot{H}_{n+1}(x,x\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x}) = H_{n+1} = H_{n+1}(L,x) = H(L,x,n+1) = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x} =$$

$$= -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m} p^i_{k=n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x} = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m} p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x} \quad (25)$$

По теореме 2 $p^i_{k,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n+1,p,k))}{x}) = p_i^k(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) + (-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{0,n}$ (26)

Подставим (26) в (25):

$$\dot{H}_{n+1}(x,x\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x}) = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m} p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x} = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(p_i^k(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) + (-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\Big)\overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x} = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_i^k(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\overset{(k)i}{x} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x} = \dot{H}_n(x,x\ldots,\overset{(a(n,p))}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\overset{(k)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x} \quad (27)$$

В (27) было использовано: $\dot{H}_n(x,x\ldots,\overset{(a(n,p))}{x}) = H_n = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x} =$ (28)

Теорема 5 доказана.

Теорема 3 сформулирована для $1 \le p \le n$. Обобщением **теоремы 3** для любого $p \in \mathbb{N}$ является

Теорема 6 Пусть $L: T^pX_m \to \Re$, $L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения T^pX_m .Тогда при $p \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$D_t(H_n(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x})) = -\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{\dot{x}})\cdot\dot{x}^i \quad i=\overline{1,m} \quad (29)$$

$$\theta:\mathbb{Z}\to\mathbb{N} \quad \theta(n) = \begin{cases}1, & n>0\\ 0, & n\le 0\end{cases} - тета\ функция\ Хевисайда$$

$$p^i_{k=0,n} = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}\Big) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\Big) = 0$$, $i=\overline{1,m}$ -импульсы $0-ого$ порядка(функциональная часть системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка n

Доказательство. Проведем методом математической индукции по n.

База индукции $n=1$ $\overset{\bullet}{H}_n(x,x\dots,\overset{(a(n,p))}{x}) = H_n = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}$

$$\overset{\bullet}{H}_{n=1}(x,x\dots,\overset{(a(n,p))}{x}) = H_1 = H_1(L,x) = H(L,x,n=1) = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n=1}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n=1}\overset{(k)i}{x} =$$

$$= -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m} p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x} = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m} p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x} \qquad (30)$$

$$p^i_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) \Rightarrow p^i_{k=1,n=1} = p^i_{1,1} = \sum_{l=0}^{1-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(0+1)i}{x}} = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{\bullet i}{x}}$$

$$p^i_{k=0,n=1} = p^i_{0,1} = \sum_{l=0}^{1-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(0+0)i}{x}} + (-1)^1 D_t^1\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(0+1)i}{x}} = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}} - D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{\bullet i}{x}}\Big) \quad (31)$$

Поэтому $H_1 = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m} p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x} = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{\bullet i}{x}}\overset{(1)i}{x} = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{\bullet i}{x}}\overset{\bullet i}{x}$ (30)

$$D_t(H_1) = D_t(-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m} p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x}) = -D_t(L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})) + \sum_{i=1}^{m}(D_t(p^i_{1,1})\bullet\overset{\bullet i}{x} + p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x}) \quad (31)$$

По **теореме 1** $D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x}) \Rightarrow D_t(p^i_{k=1,n=1}) = D_t(p^i_{1,1}) =$

$$= \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(1-1)i}{x}} - p^i_{(k=1)-1,n=1}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n=1,p,(k=1)-1))}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}} - p^i_{0,1} = D_t p^i_{1,1}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n=1,p,k=1))}{x}) = D_t p^i_{1,1} \quad (32)$$

Учитывая, что $-D_t(L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}\dfrac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}$, а также очевидные равенства

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} a_k + a_0 + a_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{ik} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ik} = \sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ik} + \sum_{i=1}^{m} a_{i0} + \sum_{i=1}^{m} a_{i1} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{n} a_{ik} + \sum_{i=1}^{m} a_{i0} + \sum_{i=1}^{m} a_{i1},\ \sum_{k=n+1}^{p} a_k = \theta(p-n)\sum_{k=n+1}^{p} a_k$$

где $\theta:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\quad \theta(n) = \begin{cases} 1,\ n>0 \\ 0,\ n\le 0\end{cases} -$ *тета функция Хевисайда.*

подставляем левую часть (32) в (31) :

$$D_t(H_1) = D_t(-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m} p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x}) = -D_t(L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})) + \sum_{i=1}^{m}(D_t(p^i_{1,1})\cdot\overset{\bullet i}{x} + p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x}) =$$

$$= -D_t(L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})) + \sum_{i=1}^{m}\Big(\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}} - p^i_{0,1}\Big)\bullet\overset{\bullet i}{x} + p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x}\Big) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}}\bullet\overset{\bullet i}{x} -$$

$$-\sum_{i=1}^{m} p^i_{0,1}\bullet\overset{\bullet i}{x} + \sum_{i=1}^{m} p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x} = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k=0)i}{x}}\overset{(k=1)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k=1)i}{x}}\overset{(k=1+1)i}{x} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\ldots,x^{(p)})}{\partial \dot x^{i}}\dot{\dot x}^{i}-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,1}\dot{\dot x}^{i}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{1,1}\cdot\ddot x^{i}=-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,1}\dot{\dot x}^{i}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(k)i}}x^{(k+1)i}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(k=0)i}}x^{(k=1)i}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\ldots,x^{(p)})}{\partial \dot x^{i}}\dot{\dot x}^{i}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(k=1)i}}x^{(k=1+1)i}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{1,1}\cdot\ddot x^{i}=-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,1}\dot{\dot x}^{i}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(k)i}}x^{(k+1)i}=\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,1}\dot{\dot x}^{i}-\theta(p-1)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(k)i}}x^{(k+1)i}$$

База индукции доказана. Индуктивный переход. Пусть утверждение справедливо для $n\in\mathbb{N}$:

$$D_t(H_n(x,\dot x\ldots,x^{(a(n,p))}))=-\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{\partial L(x,\dot x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(k)i}}-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot x\ldots,x^{(b(n,p,k))})\dot{\dot x}^{i}\quad i=\overline{1,m}\qquad(33)$$

Докажем, что $D_t(H_{n+1}(x,\dot x\ldots,x^{(a(n+1,p))}))=-\theta(p-(n+1))\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(k)i}}-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n+1}(x,\dot x\ldots,x^{(b(n+1,p,k))})\dot{\dot x}^{i}\quad i=\overline{1,m}$ (34)

По теореме 5 $H_{n+1}(x,\dot x\ldots,x^{(a(n+1,p))})=H_{n+1}=H_n+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}\right)\cdot x^{(k)i}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{n+1,n+1}(x,\dot x,\ldots,x^{(b(n,p,k))})\cdot x^{(n+1)i}\Rightarrow$

$$\Rightarrow D_t(H_{n+1}(x,\dot x\ldots,x^{(a(n+1,p))}))=D_t\Big(H_n+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big)\cdot x^{(k)i}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{n+1,n+1}(x,\dot x,\ldots,x^{(b(n,p,k))})\cdot x^{(n+1)i}\Big)=$$

$$=D_t(H_n)+D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big)\cdot x^{(k)i}+\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{n+1,n+1}(x,\dot x,\ldots,x^{(b(n,p,k))})\cdot x^{(n+1)i}\Big)=$$

$$=D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t\Big(D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big)\cdot x^{(k)i}\Big)+D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{n+1,n+1}(x,\dot x,\ldots,x^{(b(n,p,k))})\cdot x^{(n+1)i}\Big)=$$

$$=D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot\Big(D_t^{n+1+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big)\cdot x^{(k)i}+D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big)D_t x^{(k)i}+\sum_{i=1}^{m}D_t p^{i}_{n+1,n+1}(x,\dot x,\ldots,x^{(b(n,p,k))})\cdot x^{(n+1)i}+p^{i}_{n+1,n+1}(x,\dot x,\ldots,x^{(b(n,p,k))})D_t x^{(n+1)i}\Big)=\ (35)$$

$p^{i}_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l}D_t^{l}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}}\Big)\Rightarrow p^{i}_{k=n+1,n+1}=p^{i}_{n+1,n+1}=\sum_{l=0}^{n+1-(n+1)}(-1)^{l}D_t^{l}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}}\Big)=\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(0+n+1)i}}=\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}$ (36) По **теореме 1**

$D_t p^{i}_{k,n}(x,\dot x,\ldots,x^{(b(n,p,k))})=\frac{\partial L(x,\dot x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(k-1)i}}-p^{i}_{k-1,n}(x,\dot x,\ldots,x^{(b(n,p,k-1))})\Rightarrow D_t(p^{i}_{k=n+1,n+1})=D_t(p^{i}_{n+1,n+1})=\frac{\partial L(x,\dot x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n)i}}-p^{i}_{n,n+1}(x,\dot x,\ldots,x^{(b(n,p,k-1))})$ (37) Поэтому (35):

$$=D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot\Big(D_t^{n+1+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big)\cdot x^{(k)i}+D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big)D_t x^{(k)i}+\sum_{i=1}^{m}D_t p^{i}_{n+1,n+1}(x,\dot x,\ldots,x^{(b(n,p,k))})\cdot x^{(n+1)i}+p^{i}_{n+1,n+1}(x,\dot x,\ldots,x^{(b(n,p,k))})D_t x^{(n+1)i}\Big)=$$

$$D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot\Big(D_t^{n+1+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big)\cdot x^{(k)i}+D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big)x^{(k+1)i}\Big)+\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n)i}}-p^{i}_{n,n+1}\Big)x^{(n+1)i}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}x^{(n+2)i}=$$

$$D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+2-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big)\cdot x^{(k)i}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big)x^{(k+1)i}+\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n)i}}-p^{i}_{n,n+1}\Big)x^{(n+1)i}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}}x^{(n+2)i}=$$

$$D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+2-k}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot \overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+2-(k+1)}D_t^{n+2-(k+1)}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\right)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x}=$$

$$D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+2-k}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot \overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{n+2-k}D_t^{n+2-k}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\right)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x}=$$

$$D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+2-k}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot \overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{n+1-k}D_t^{n+2-k}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\right)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x}=$$

$$D_t(H_n)+(-1)^{n+1-1}\cdot\sum_{i=1}^{m}D_t^{n+2-1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot \overset{(k=1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}D_t\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\right)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x}=$$

$$=-\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}\cdot\dot x^i+\sum_{i=1}^{m}(-1)^n\cdot D_t^{n+1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot\dot x^i-\sum_{i=1}^{m}D_t\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\overset{(n+1)i}{x}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\right)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x} \qquad (38)$$

По **теореме 2** $p^i_{k,n+1}(x,\dot x,\dots,\overset{(p+n+1-k)}{x})=p^i_{k,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(p+n-k)}{x})+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{0,n}\Rightarrow$

$$p^i_{0,n+1}(x,\dot x,\dots,\overset{(p+n+1)}{x})=p^i_{0,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(p+n-0)}{x})+(-1)^{n+1-0}D_t^{n+1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right),\ i=\overline{1,m},\ k=\overline{0,n}\Rightarrow p^i_{0,n+1}=p^i_{0,n}+(-1)^{n+1}D_t^{n+1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^i_{0,n}=p^i_{0,n+1}-(-1)^{n+1}D_t^{n+1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)=p^i_{0,n+1}+(-1)^{n+2}D_t^{n+1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right) \qquad (39)$$

$$p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)\Rightarrow p^i_{k=n+1,n+1}=p^i_{n+1,n+1}=\sum_{l=0}^{n+1-(n+1)}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)=\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(0+n+1)i}{x}}=\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}} \qquad (40)$$

По **теореме 1** $D_t p^i_{k,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})=\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}-p^i_{k-1,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x})\Rightarrow$

$$\Rightarrow D_t(p^i_{k=n+1,n+1})=D_t(p^i_{n+1,n+1})=\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}(x,\dot x,\dots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x})=D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right) \qquad (41)$$

Подставляем (39),(41) в (38) :

$$-\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}\cdot\dot x^i+\sum_{i=1}^{m}(-1)^n\cdot D_t^{n+1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot\dot x^i-\sum_{i=1}^{m}D_t\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\overset{(n+1)i}{x}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\right)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x}=-\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\left(p^i_{0,n}-(-1)^n\cdot D_t^{n+1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\right)\cdot\dot x^i+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)+\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\right)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x}=$$

$$=-\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p_{0,n+1}^{i}\bullet\overset{\bullet i}{x}=-\theta(p-(n+1))\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p_{0,n+1}^{i}\bullet\overset{\bullet i}{x}$$

Индуктивный переход доказан.**Теорема 6** доказана.
Следствием **теоремы 6** является

Теорема 7 Пусть $L:T^{p}X_{m}\to\Re$, $L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^{p}X_{m}$. Тогда на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа

$$p_{k=0,n}^{i}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^{l}D_{t}^{l}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}\Big)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}D_{t}^{l}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\Big)=0\ ,\ i=\overline{1,m}$$

Двойственная к функции Лагранжа функция Гамильтона(обобщенная энергия)
1) при $1\le p\le n$ сохраняется (**Теорема 4**):

$$D_{t}(H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x}))=\sum_{i=1}^{m}p_{0,n}^{i}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\bullet\overset{\bullet i}{x}\equiv 0\ \Leftrightarrow H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x})\equiv const \quad (22)$$

2) при $p\ge n$ $D_{t}(H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x}))=\sum_{i=1}^{m}p_{0,n}^{i}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\bullet\overset{\bullet i}{x}\neq 0\ \Leftrightarrow H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x})\neq const$ (22)

ABOUT INTEGRALS OF GENERALIZED ENERGY AT THE EXTREMALS OF THE EULER-LAGRANGE EQUATION SYSTEM

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

The paper considers the properties of the Hamilton and Lagrange functions in the coordinate - momentum space. The main result obtained is the property of conservation of generalized energy of rank n on the extremals of the system of Euler-Lagrange equations of order n. This property is a sufficient but not necessary condition for the conservation of generalized energy of rank n.
Keywords: Hamilton function, variation problem, fiber space of velocities,, Euler-Lagrange equations, smooth manifolds, energy tensor, tensor of generalized momentum, non-degenerate function.

ЛИТЕРАТУРА

43. Дубровин В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: УРСС, 1994.
44. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
45. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
46. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
47. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
48. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
49. Козлов А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2006. – № 3. – С. 63–64.
50. Галеев Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
51. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.

52. Закон преобразования обобщенного импульса / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
53. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
54. Трофимов В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов А.Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995.
55. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
56. Вакуленко С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
57. Пастухов Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
58. Пастухов Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
59. Пастухов Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
60. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2018. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094. – Дата доступа: 15.06.2019.
61. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика,7:1(2001), 285-288
62. Пастухов, Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.
63. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии 2 [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/23288. – Дата доступа: 26.03.2019.
64. Пастухов, Ю.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 137-153.
65. Пастухов, Ю.Ф. Обратная теорема Гамильтона / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 86-100.
24. Пастухов Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона в параллелепипеде с шестым порядком погрешности/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–174.
25. Волосова Н.К. Векторный аналог метода прогонки для решения трех- и пятидиагональных матричных уравнений/ Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 101–115.
26. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии/ Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова //Мир транспорта. – 2019. Т.17. № 3(82). С. 16-39.

PROPERTIES OF THE HAMILTON FUNCTION IN VARIATION TASKS WITH HIGHER DERIVATIVES

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

In this paper, we study the differential properties of the Hamilton function of independent variables for a variational problem with higher derivatives and related Lagrange function

Keywords: *Hamilton function, variation problem, fiber space of velocities,, Euler-Lagrange equations, smooth manifolds, energy tensor, tensor of generalized momentum, non-degenerate function.*

СОДЕРЖАНИЕ

к.ф.м.н.,Пастухов Ю.Ф., к.ф.м.н.,Пастухов Д.Ф.

ПГУ 2020