

УДК 528.063

**МЕТОДЫ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА РАЗМЕРЫ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИЙ
ПРИ РЕШЕНИИ И УРАВНИВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАСЕЧЕК****Н.Н. КРЕЙДА***(Полоцкий государственный университет)*

Опыт применения итеративного способа уравнивания показывает, что для обеспечения сходимости итераций начальные координаты должны быть известны с ошибкой, не превосходящей 1/3 наименьшей стороны сети. Иногда, в зависимости от конструкции геодезической сети, расположения и количества исходных пунктов, возникает необходимость в определении начальных координат с еще более высокой точностью, обеспечивающей сходимость итераций за небольшой промежуток времени. То обстоятельство, что начальные координаты определяемых пунктов должны быть получены заранее с достаточно высокой точностью и введены в ЭВМ в качестве дополнительной информации вместе с данными об измеренных величинах и координатах исходных пунктов, является препятствием к широкому практическому использованию итеративного метода уравнивания для вычисления координат. Поэтому во многих программах, применяемых в настоящее время на производстве, начальные координаты находят по формулам решения засечек и лишь затем уточняют методом уравнивания. В непредусмотренных алгоритмом случаях начальные координаты могут быть включены в исходную информацию или вычислены методами нелинейного программирования. В статье раскрыты основные причины, влияющие на размеры области сходимости итераций.

Введение. Применение ЭВМ в топографо-геодезическом производстве позволяет успешно решать задачу автоматизации трудоемких процессов математической обработки геодезических построений при предварительных, уравнивательных и окончательных вычислениях. На первом этапе обработки сложной в логическом отношении задачей является вычисление предварительных координат пунктов с использованием минимума исходной информации. В настоящее время известно несколько алгоритмов, решающих данную задачу на различном уровне автоматизации обработки измерений. Объединяют эти алгоритмы общая стратегия вычислений, согласно которой координаты находят методом последовательной вставки одного или нескольких пунктов геодезической сети с применением специальных подпрограмм решения многократных или однократных засечек. Методы решения засечек различны. Их можно разделить на три группы:

- 1) вычисление координат пунктов по формулам, рассчитанным на определенные виды засечек;
- 2) решение засечек путем многократного уравнивания измерений по методу наименьших квадратов параметрическим способом с использованием дополнительной информации о начальных значениях координат определяемых пунктов, полученных заранее по карте или схеме с необходимой точностью;
- 3) методы, основанные на нелинейном программировании [1].

Если на третьем этапе обработки не применять линеаризацию нелинейных параметрических уравнений и минимизировать целевую функцию методами поиска, то область сходимости итераций настолько велика, что практически во всех случаях не требуется задавать начальные координаты определяемых пунктов. Исключение составляют лишь неоднозначные линейные и угловые засечки, для решения которых следует применять метод штрафных функций.

Вычисляя предварительные координаты определяемых пунктов по алгоритму Ньютона – Гаусса, практически не уделяют внимания области сходимости в этих методах. В статье И. Станеева утверждается, что область сходимости итераций по методу Ньютона мала даже при хорошем геометрическом качестве засечек.

Для выявления области сходимости применен метод статистических испытаний. При этом используют регулярную сетку размером $40 \times 40 = 1600$ узлов, располагая ее так, чтобы и исходные, и определяемые пункты накрывались этой сеткой. В каждый узел сетки помещают определяемый пункт и по формуле $X^{(j+1)} = X^{(j)} - R^{-1}B$ уточняют его координаты.

Основные исследования. В настоящее время в геодезии используются различные методы решения геодезических засечек. Предпочтение отдается тем методам, которые обладают универсальностью, простотой и надежностью решения. Немаловажным фактором является то, что с целью сокращения исходной информации о результатах измерений и координатах исходных пунктов, начальные координаты не должны задаваться в качестве исходных. Это возможно только при большой области сходимости ите-

раций. На рисунке 1 представлена схема зависимости области сходимости итераций от различных факторов. Здесь указано, что эта область зависит от методов минимизации целевой функции. Исследования показали, что надежными в этом смысле являются методы прямого поиска, включая метод релаксации, являющийся самым простым и надежным, точным и быстродействующим [2].



Рис. 1. Схема зависимости области сходимости итераций от различных факторов

На рисунке 2 показаны изолинии целевой функции.

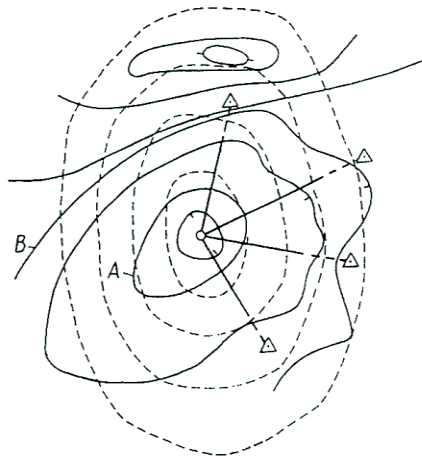


Рис. 2. Изолинии целевой функции для обратной засечки на плоскости

Сплошной чертой изолинии целевой функции следующего вида:

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N P_i L_i^2(X), \quad (1)$$

где $X = (x_1, x_2)^T$; P – веса измерений; L – свободный член нелинейных параметрических уравнений.

Пунктиром показаны изолинии целевой функции

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N c_i^2 L_i^2(X), \quad (2)$$

где

$$L(X) = \varphi(X) - T; \quad (3)$$

c_i – нормирующие множители, устанавливаемые в зависимости от вида измеренных величин, ускоряющие процесс минимизации критериальной функции и увеличивающие область сходимости итераций; $\varphi(X)$ – нелинейная функция для любого измерения T .

Нормирующие множители c_i , входящие в (2), находят с учетом модулей градиентов функций $\varphi(X)$ под условием [3]:

$$c_i S_{cp} \|\nabla \varphi_i(X_j)\| = 1, \quad (4)$$

где S_{cp} – среднее или известное (измеренное) расстояние между пунктами геодезической сети; j – номер приближения. Формулы для вычисления c_i приведены в таблице.

Виды измерений	Нормирующие множители
Прямое направление	1
Горизонтальный угол	$S_{cp} / S_{i,i+1}$
Дирекционный угол	1
Расстояние	$1/S$
Разность расстояний	$\left(2S_{cp} \sin \frac{\beta}{2}\right)^{-1}$
Сумма расстояний	$\left(2S_{cp} \cos \frac{\beta}{2}\right)^{-1}$
Угол наклона	$2 / \sin 2v_i$

Стороны S_i , S_{i+1} , $S_{i,i+1}$ и угол β показаны на рисунке 3, причем

$$S_{cp} = (S_i + S_{i+1}) / 2.$$

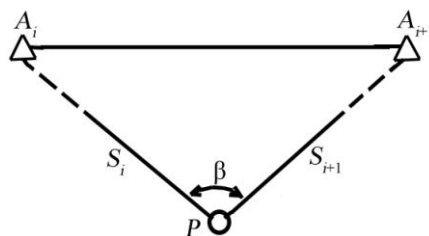


Рис. 3. Схема определения нормирующих множителей углов и расстояний

С применением функции (1) область сходимости имеет радиус S_{cp} , а с применением целевой функции (2) – $6 S_{cp}$, используя метод релаксации.

Что касается геометрии построений, то область сходимости в этом случае оценивают с помощью чисел обусловленности. Чем больше число обусловленности, тем хуже геометрия построения. На практике известны построения с плохой обусловленностью: обратная засечка на опасном круге и прямая засечка с острым углом при определяемом пункте.

Интересным и малоисследованным является вопрос о влиянии грубых промахов в информации на величину числа обусловленности. Например, для прямой засечки с непересекающимися направлениями число обусловленности будет стремиться к бесконечности и никакими методами нелинейного программирования не будет локализован минимум целевой функции.

В алгоритмах программ, принадлежащих к первой группе, применяют следующие вычислительные блоки.

Идентифицируют состав измерений с формулами решения однократных засечек. После этого выполняют обращение к соответствующей подпрограмме решения засечки. Например, в случае трех обратных направлений, измеренных на пункты с известными координатами, используется подпрограмма решения обратной засечки. Если для определяемого пункта известны дирекционные углы направлений с

двух смежных с ним пунктов, то решение выполняется по формулам прямой засечки. Чтобы обеспечить обработку разнообразных по сложности построений геодезических сетей, программируют формулы для решения однократных геодезических засечек двух определяемых пунктов и более, в том числе и тех засечек, которые редко применяют на практике. Это приводит к значительному усложнению алгоритма. Для сокращения текста программ применяют обобщенные формулы решения засечек нескольких видов.

Следующий вычислительный блок выполняет сравнение координат пунктов, полученных из двух-трех вариантов засечек, выбор наилучших вариантов решения, поиск грубых ошибок в измерениях или координатах исходных пунктов, оценку точности результатов и, если позволяет анализ наблюдений, вычисление осредненных значений координат пунктов.

На рисунках 4 – 6 показаны области сходимости для алгоритма линеаризованных итераций (метод Гаусса) слева, метода релаксации [2] – справа.

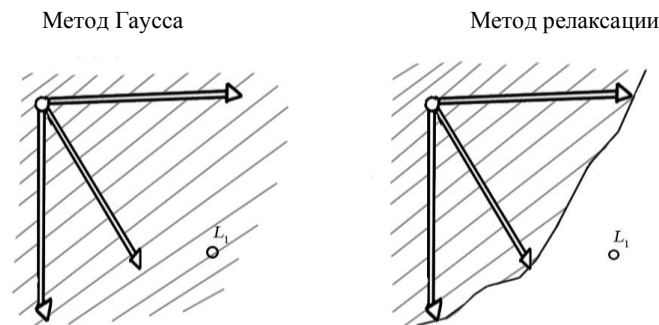


Рис. 4. Линейная засечка

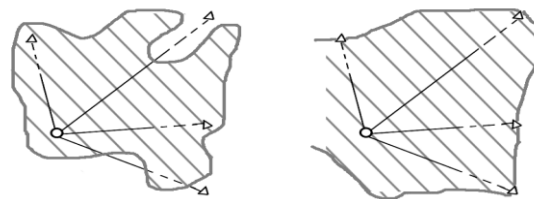


Рис. 5. Обратная засечка

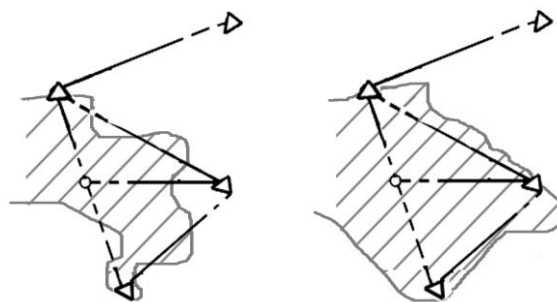


Рис. 6. Прямая засечка

По данным заштрихованных областей сходимости можно сделать следующие выводы:

- 1) метод Гаусса охватывает все поле линейной засечки, включая локальный минимум L_1 , что недопустимо. Метод релаксации не захватывает область локального минимума;
- 2) для обратной засечки на плоскости (см. рис. 5) область сходимости итераций на чертеже слева гораздо меньше, чем на рисунке справа;

3) для метода Гаусса для прямой засечки область сходимости еще меньше, что теоретически в свое время было доказано З.М. Юршанским. Для метода релаксации (см. рис. 6, справа) область сходимости такова, что можно брать начальное приближение как среднеарифметическое из координат исходных пунктов.

Исследования показали, что для некоторых прямых засечек область сходимости итераций настолько велика, что при любом качестве засечки начальные координаты определяемого пункта можно задавать вблизи любого исходного пункта. Такой же результат получим для обратных и линейных засечек, если исходные пункты расположены на одной окружности, а определяемый пункт находится в центре этой окружности. В этих случаях среднее арифметическое из координат исходных пунктов всегда попадает в область сходимости итераций.

Заключение. Для решения любых геодезических засечек следует применять методы нелинейного программирования, не использующие производные целевой функции, т.е. методы прямого поиска. В процессе минимизации целевой функции необходимо вычислять число обусловленности системы нормальных уравнений, не для минимизации целевой функции, а для того случая, когда задача уравнивания будет вырожденной и никакими методами минимум целевой функции $\varphi(X)$ найти нельзя. В большинстве случаев область сходимости линеаризованных итераций достаточно велика, что противоречит исследованиям, опубликованным И. Станеевым в работе [4].

Таким образом, предлагаем на производстве применять только методы прямого поиска, например, метод релаксации [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Применение геодезических засечек, их обобщенные схемы и способы машинного решения / П.И. Баран [и др.]. – М.: Недра, 1986. – 166 с.
2. Мицкевич, В.И. Вычисление различных видов засечек на ЭЦВМ методом сверхрелаксации / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1974. – № 10. – С. 36 – 40.
3. Мицкевич, В.И. Общий алгоритм вычисления пространственных засечек на ЭВМ методом релаксации / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1978. – № 2. – С. 25 – 28.
4. Станеев, И. Изчисляване на многократни обратни засечки с помощта на ЦЕИМ / И. Станеев // Геодезия, картография, землеустройство. – 1973. – № 2(13). – С. 8 – 9.

Поступила 06.04.2009