УДК 528.063

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ УРАВНИВАНИЯ И ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

А.Ю. БУДО, Н.О. КУПРИЕНКО
(Полоцкий государственный университет);
О.Е. ГАРМАЗА
(Белорусский национальный технический университет, Минск)

Многокритериальная оптимизация как новая методика при уравнивании возникла на основе обобщения метода L_p-оценок, применяемого для математической обработки геодезических сетей. Недостаток этого метода заключается в постоянстве показателя степени n (n = 2 – метод наименьших квадратов; n = 1– метод наименьших модулей). Причём степень n берётся неизменной для всех разнородных результатов измерений. Для того чтобы в полигонометрии для углов применить одну степень, а для сторон – другую, разработана соответствующая методика многокритериальной оптимизации. Если степени n определены не средствами математической статистики, а под условием минимума максимальной ошибки положения пункта в слабом месте сети, то получим многокритериальную оптимизацию, так как в поиске решения участвуют два, а в некоторых случаях даже три критерия. Выполнены исследования по воздействию дополнительных целевых функций на результаты оценки точности в многокритериальном методе.

Критериальной функцией для многостепенной оптимизации будет следующая [1, 2]:

$$\Phi(X)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{c_i}{\sigma_i}\right)^{n_i}\left|L_i(X)\right|^{n_i}, \tag{1}$$

которая является основной с последующим дополнением вспомогательных целевых функций.

Такая постановка задачи имеет практическое значение, когда, например, при уравнивании линейно-угловой сети для линейных и угловых измерений можно брать разные показатели степени *n*. Важность такого решения имеет тот же эффект, как если бы мы вместо равноточных результатов измерений предложили обрабатывать неравноточные данные. Минимизацию функции (1) можно выполнить любым методом нелинейного программирования с использованием формул численного дифференцирования.

При многокритериальном уравнивании геодезических сетей окончательное решение $\hat{X}$ будем отыскивать под условием минимума векторной целевой функции, состоящей, например, из двух критериальных функций F_1 и F_2. Функция (1) позволяет применять для каждого измерения свою степень n_i. Взаимосвязь $F_1=\Phi(X)$ и F_2 определяется тем, что степени n_i отыскиваются под условием минимума F_2 в различных вариантах.

Основная часть. Применим многокритериальную оптимизацию, используя одну из дополнительных целевых функций в следующих вариантах:

вариант 1

$$F_2=\sum_{i=1}^{k}M_i, \tag{2}$$

где k – число определяемых пунктов; M – ошибка положения пункта;

вариант 2

$$F_2=\min M_{\max}, \tag{3}$$

определяющий минимаксный подход;

вариант 3

$$F_2=Sp(Q), \tag{4}$$

т.е. наименьший след обратной матрицы;

вариант 4

$$F_2=\mu\cdot S_p(Q), \tag{5}$$

где $\mu=\sqrt{\dfrac{V^TPV}{r}}$;

вариант 5

$$F_2 = \mu \cdot \Psi\,, \tag{6}$$

где Ψ – относительная обусловленность для данного построения;

вариант 6

$$F_2 = \mu + \Psi\,. \tag{7}$$

В таблице 1 приведены результаты вычислений по всем шести вариантам для линейно-угловой сети [3, с. 217], показанной на рисунке.

Таблица 1

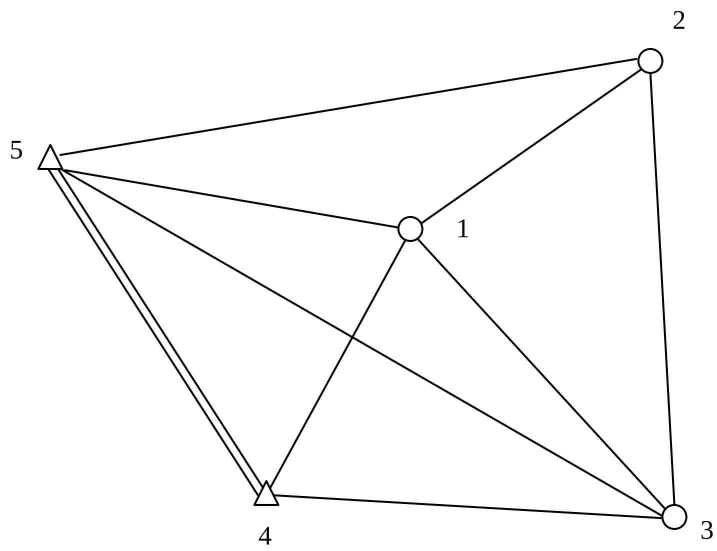
Результаты вычислений

Варианты			1	2	3	4	5	6
Связи		Измерения	СТЕПЕНИ					
1	4	2300,060 м	2,4	2,5	3,1	2,6	2,1	2,3
3	4	3090,353 м	2,4	2,4	3,9	2,6	1,9	2,4
2	5	3643,234 м	2,2	2,3	3,9	2,4	2,1	2,1
1	5	2115,919 м	2,2	2,3	3,0	2,4	2,6	2,4
3	5	4363,611 м	2,3	2,3	3,9	2,5	1,9	2,3
1	2	2169,073 м	2,3	2,4	3,0	2,4	1,5	1,7
1	3	2620,909 м	2,3	2,4	2,9	2,5	1,7	1,7
2	3	3922,860 м	2,4	2,4	2,6	2,5	1,7	1,9
4	5	00є 00' 00,00"	–	–	–	–	–	–
4	1	57є 20' 32,10"	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	2,7
4	3	113є 14' 06,35"	1,9	1,9	1,8	1,9	1,7	1,6
5	2	00є 00' 00,00"	–	–	–	–	–	–
5	1	32є 12' 22,92"	1,3	1,3	1,2	1,5	2,1	2,1
5	3	57є 50' 15,30"	1,2	1,2	1,2	1,2	2,0	1,2
5	4	98є 26' 12,73"	1,5	1,5	1,2	1,4	1,6	1,5
1	4	00є 00' 00,00"	–	–	–	–	–	–
1	5	56є 25' 37,99"	1,3	1,2	1,2	1,2	1,6	1,2
1	2	172є 53' 39,44"	1,5	1,6	1,2	1,9	1,8	1,2
1	3	282є 29' 53,83"	1,2	1,2	1,2	1,2	3,0	2,0
3	4	00є 00' 00,00"	–	–	–	–	–	–
3	5	26є 09' 54,12"	1,6	1,6	1,4	1,5	1,7	1,6
3	1	46є 36' 17,98"	1,5	1,8	1,4	1,4	2,3	3,4
3	2	77є 59' 46,71"	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
2	3	00є 00' 00,00"	–	–	–	–	–	–
2	1	39є 00' 17,79"	1,4	1,5	1,5	1,5	2,3	1,2
2	5	70є 19' 51,51"	1,7	1,8	1,3	1,7	2,4	3,7

Варианты	1	2	3	4	5	6
Многостепенная функция (1)						
μ	1,250	1,304	19,220	1,481	1,263	1,223
M_1	0,0068	0,0069	0,0061	0,0071	0,0087	0,0089
M_2	0,0117	0,0115	0,0104	0,0119	0,0187	0,0153
M_3	0,0106	0,0109	0,0125	0,0115	0,0152	0,0130
Двухстепенная функция (1)						
n_S	2,2	2,2	2,5	2,2	–	–
n_β	1,9	1,9	1,9	1,9	–	–
μ	1,199	1,199	1,504	1,199	–	–
M_1	0,0073	0,0073	0,0088	0,0073	–	–
M_2	0,0126	0,0126	0,0148	0,0126	–	–
M_3	0,0113	0,0113	0,0133	0,0113	–	–

В условиях двухстепенной функции (1) берутся одинаковые степени для сторон (n_S) и для направлений (n_β), что занимает в 10 раз меньше машинного времени по сравнению с многостепенной оптимизацией.

При $n_S = n_\beta = 2{,}0$, $\sigma_S = 0{,}01$ м, $\sigma_\beta = 0{,}7''$ имеем: $\mu = 1{,}121$; ошибки положения пунктов $M_1 = 0{,}0074$ м, $M_2 = 0{,}0133$ м, $M_3 = 0{,}0119$ м.



Линейно-угловая сеть

По данным таблицы 1 видно, что функция (4) (вариант 3) является неудачной. Лучшей является критериальная функция (3).

В таблице 2 показаны значения оптимальных n_i для примеров, взятых из [3], где указаны результаты измерений и координаты исходных пунктов.

Поиск n_i осуществлялся методом приближений под условием минимума целевой функции (1). Сначала для всех измерений принималось $n = 2{,}0$. Затем для каждого измерения выбирался показатель степени n_i с шагом $\Delta n_i = \pm 0{,}1$ и запоминалось n_i с наименьшим значением F_2 (2). Приближения заканчивались в том случае, если изменение n_i для всех измерений не приводило к уменьшению функции (1). Также ставилось ограничение на число полных приближений, когда просматривались все измерения. Число таких приближений не превышало 20.

Таблица 2

Одностепенная многокритериальная оптимизация

№ п/п	1	2	3	4	5	6
Номер страницы в [3]	93	129	153	179	202	217
Оптимальные n	2,0	2,0	2,0	2,0	2,2	2,1
μ	0,608	1,139	0,833	1,053	1,054	1,153
M_1	0,0523	0,0475	0,0425	0,0595	0,0373	0,0073
M_2	0,0537	0,0292	0,0440	0,0766	0,0406	0,0128
M_3	0,0245	0,0387	0,0206	0,0392	–	0,0115
M_4	–	–	–	0,0589	–	–

В таблице 3 выполнена многокритериальная оптимизация с применением дополнительной целевой функции (2) для тех же примеров, что и в таблице 2.

Таблица 3

Многостепенная многокритериальная оптимизация

№ п/п	1			2			3			4			5			6		
Номер страницы в [3]	93			129			153			179			202			217		
σ_β	1,0			1,0			1,0			–			–			0,7		
σ_S	–			–			–			0,03			0,03			0,01		
	1	5	1,5	1	6	1,4	1	6	1,9	1	5	2,0	4	1	1,8	1	3	2,4
	1	4	2,6	1	5	1,5	1	5	2,4	1	6	2,0	4	2	1,8	1	4	2,4
	2	4	3,6	2	6	1,3	2	6	2,7	2	3	2,0	4	3	1,9	2	5	2,2
	2	5	2,3	2	1	1,9	2	5	1,8	2	5	2,0	4	5	1,9	2	3	2,2
	2	1	1,9	3	6	1,9	2	1	2,6	3	4	1,5	5	1	2,0	2	4	2,3
	3	5	1,8	3	2	1,7	3	6	1,8	3	5	1,6	5	2	2,0	3	5	2,3
	3	2	1,8	4	6	1,9	3	2	1,5	3	6	1,2				3	4	2,3
	4	5	1,8	4	7	1,5	4	6	2,8	4	5	1,2				4	5	2,4
	4	2	1,9	5	6	1,8	4	3	1,5	4	6	1,5				1	3	3,9
	4	3	3,9	5	7	1,9	5	2	2,3	5	6	1,5				1	4	1,9
	5	2	1,4	5	4	1,8	5	6	2,5							2	3	1,3
	5	3	3,9	6	2	2,2	5	4	1,8							2	4	1,2
	5	4	1,7	6	3	2,1	6	2	2,2							2	1	1,5
				6	7	2,0	6	3	2,6							3	2	1,3
				6	4	2,0	6	4	1,8							3	5	1,5
				6	5	1,8	6	5	1,8							3	4	1,2
				7	5	1,9										4	2	1,6
				7	6	1,9										4	3	1,5
				7	4	1,9										4	5	1,2
																5	3	1,4
																5	2	1,7
№ п/п	1			2			3			4			5			6		
μ	0,481			1,131			0,773			0,479			0,896			1,250		
M_1	0,0445			0,0457			0,0400			0,0408			0,0400			0,0068		
M_2	0,0399			0,0285			0,0431			0,0578			0,0347			0,0117		
M_3	0,0150			0,0377			0,0201			0,0204			–			0,0106		
M_4	–			–			–			0,0428			–			–		

По данным таблиц 2 и 3 видно, что ошибка положения определяемых пунктов стала меньше в 1,5… 2,0 раза.

В таблице 3 в каждой колонке с номерами 1… 6 даны следующие сведения: номер связи для измерения (например, в первой строке читаем связь 1…5) и значение степени n_i (в нашем случае 1.5).

Методика поиска степеней при многостепенной многокритериальной оптимизации заключается в следующем:

1) для каждого измерения (для первого примера измерений 13) присваивается степень равная 2,0;

2) уравнивание геодезической сети выполняется три раза, испытывая степень первого измерения в виде 1.9, 2.0, 2.1;

3) запоминается та степень (например, 1.9), для которой дополнительная целевая функция F_2 минимальна;

4) аналогично поступают со вторым, с третьим и тринадцатым измерениями, уравнивая сеть для одного приближения $13 \times 3 = 39$ раз;

5) при 20 приближениях требуется уравнять сеть для получения окончательного результата $20 \times 39 = 780$ раз, что на Pentium III занимает 2…3 с машинного времени.

Исследования показали, что для геодезической сети, состоящей из 40 определяемых пунктов, требуется до 40 минут машинного времени.

Следует иметь в виду, что многокритериальный метод теряет свою эффективность при числе пунктов более 40. В этом случае следует применять одностепенную многокритериальную оптимизацию (см. табл. 2).

В **заключение** отметим, что многокритериальная оптимизация может выполняться с наилучшим эффектом для вспомогательных целевых функций (2) и (3). В этом случае вспомогательные функции (4) – (7) можно применить при проектировании геодезических сетей многокритериальном методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мицкевич, В.И. Основы многокритериального уравнивания геодезических сетей / В.И. Мицкевич, П.В. Субботенко, В.В. Ялтыхов. – Новополоцк: ПГУ, 2008. – 127 с.
2. Ялтыхов, В.В. Применение метода Lp-оценок в уравнительных вычислениях / В.В. Ялтыхов, Н.О. Куприенко, П.М. Левданский. – Новополоцк: ПГУ, 2008. – 98 с.
3. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы): учеб. пособие для вузов / Н.В. Яковлев [и др.]. – М.: Недра, 1982. – 368 с.

Поступила 06.04.2009