

УДК 528.063

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НИВЕЛИРНЫХ СЕТЕЙ ТРАДИЦИОННЫМИ И НЕТРАДИЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

Д.В. УСОВ, канд. техн. наук В.В. ЯЛТЫХОВ
(Полоцкий государственный университет);
канд. техн. наук П.М. ЛЕВДАНСКИЙ
(Лезром, Минск)

Для уравнивания результатов особо точных, в том числе и периодических, измерений применяют, как правило, строгие классические методы математической обработки. В результате анализа геодезических измерений может быть установлен характер распределения ошибок, отличный от нормального закона. По этой причине в дополнение к классическим методам математической обработки могут применяться новые подходы к уравнивательным вычислениям.

Рассматривается применение метода многокритериальной (многостепенной) оптимизации для обработки нивелирных сетей. Применение данного метода уравнивания раскрывается с точки зрения математической обработки как традиционным методом – методом наименьших квадратов, так и нетрадиционным – методом Lp-оценок. Приведены формулы для обоих случаев использования метода многокритериальной оптимизации. Рассмотрена многокритериальная обработка свободных и нуль-свободных геодезических построений. Приведен пример многокритериального уравнивания двух циклов наблюдений за осадками инженерных сооружений, выполнена оценка точности и сравнительный анализ полученных результатов.

Введение. Применение отличных от метода наименьших квадратов способов уравнивания все чаще привлекает внимание исследователей. Например, в работе [1] рассматривается метод Lp-оценок, предусматривающий обработку наблюдений с учетом закона распределения погрешностей измерений путем соответствующего выбора показателя степени n . Метод Lp-оценок включает в себя методы наименьших квадратов (МНК) при $n = 2,0$, наименьших модулей (МНМ) при $n = 1,0$, равномерных (чебышевских) приближений, но возможно применение различных степеней на отрезке $1,0 \leq n \leq 4,0$. Получаемые в этих случаях оценки совпадают с оценками метода максимального правдоподобия при распределении Лапласа. Недостатком такого подхода к уравниванию является то, что назначается для всех измерений одинаковая степень n . Так, избирая метод наименьших модулей для уравнивания геодезических сетей, мы получаем, что погрешности измерений подчиняются одному, отличному от нормального, закону распределения при $n = 1,0$. Более гибким является способ многостепенной оптимизации, когда, например, для одних измерений назначают степень $n = 2,0$, а для других наблюдений – степень $n = 1,0$.

1. Многокритериальная оптимизация в рамках метода наименьших квадратов при проектировании нивелирных сетей. Многокритериальное уравнивание нивелирных сетей с поиском оптимальных весов измерений можно выполнить традиционными методами при условиях:

$$V^T P_k V = \min; \quad (1)$$

$$\Phi_2(X) = \min(\max M). \quad (2)$$

Для этого применяют известные формулы метода наименьших квадратов (МНК):

$$\delta x = -(A^T P_k A)^{-1} A^T P_k L; \quad (3)$$

$$P_{k,i} = \left| p_i + \frac{p_i}{5} K_i \right|; \quad (4)$$

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \quad (5)$$

где $P_{k,i} > 1$, $(-5 \leq K \leq 20)$ – коэффициент для i -го измерения, подбираемый под условием минимума целевой функции $\Phi_2(X)$, в которой M – ошибка положения определяемого пункта:

$$M = \mu_j \sqrt{Q_{ii}}. \quad (6)$$

$$\mu_j = \sqrt{\frac{V^T P_k V}{r}}, \quad (7)$$

где j – номер приближения ($1 \leq j \leq 20$). Поиск K_i осуществляется в j -м приближении для каждого измерения в отдельности методом релаксации из трех вариантов: K_i , $K_i + 1$ и $K_i - 1$. Если N – количество измерений, то формулы (3) – (7) будут применяться $3jN$ раз.

Результаты вычислений для примера (рисунок) [2, с. 254] методом МНК без поиска P_k [3] и с поиском P_k приведены в таблице 1.

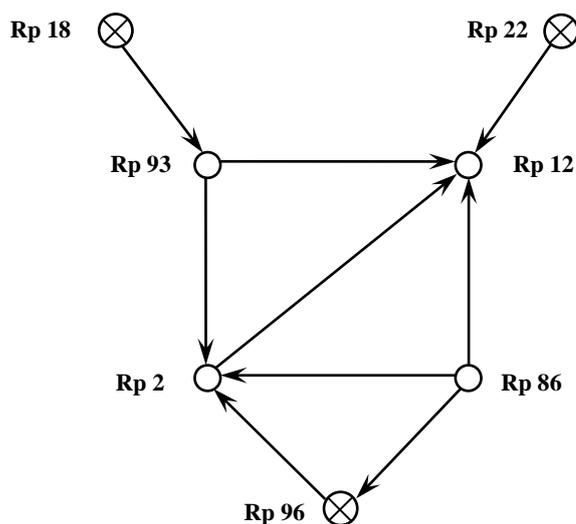


Схема нивелирной сети

Таблица 1

Оценка точности положения пунктов, полученная методом МНК и многокритериальной обработки (в скобках)

№ репера	Свободная сеть с исходным пунктом Rp 18 m_H , мм	Нуль-свободная сеть относительно средней плоскости m_H , мм	Нуль-свободная сеть относительно исходных пунктов m_H , мм
μ	0,319 (0,106)	0,391 (0,106)	0,391 (0,106)
93	73 (10)	52 (7)	65 (9)
2	92 (15)	44 (8)	64 (11)
12	96 (18)	47 (12)	63 (13)
86	105 (21)	60 (15)	78 (19)
22	122 (21)	92 (16)	83 (14)
96	108 (21)	68 (16)	72 (14)
18	0 (0)	92 (11)	83 (11)

Если для каждого измерения отыскивается степень n , то вместо (1) используется целевая функция

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^N P_i |L_i(X)|^{n_i} \quad (8)$$

и применяется нетрадиционный подход уравнивания, основанный на нелинейном программировании [4].

Результаты оценки точности в этом методе приведены в таблице 2.

Таблица 2

Оценка точности положения пунктов, полученная методом МНК и нетрадиционной обработки (в скобках)

№ репера	Свободная сеть с исходным пунктом Rp 18 m_H , мм	Нуль-свободная сеть относительно средней плоскости m_H , мм	Нуль-свободная сеть относительно исходных пунктов m_H , мм
μ	0,319 (0,319)	0,391 (0,319)	0,391 (0,319)
93	73 (50)	52 (41)	65 (58)
2	92 (58)	44 (34)	64 (62)
12	96 (58)	47 (44)	63 (74)
86	105 (97)	60 (69)	78 (100)
22	122 (83)	92 (76)	83 (65)
96	108 (100)	68 (89)	72 (72)
18	0 (0)	92 (39)	83 (44)

По сравнению с таблицей 1, где при вычислении весов используется формула (4) с подбором коэффициента K , в таблице 2 с применением формулы (5) и вычислением степеней n эффект многокритериальной оптимизации ниже.

2. Многокритериальное уравнивание нивелирных сетей. В таблице 2 представлена многокритериальная обработка свободной и нуль-свободной нивелирной сети, ниже рассмотрим теоретический вопрос уравнивания нивелирных сетей на примере обработки циклов наблюдений за осадками инженерных сооружений.

При многокритериальном уравнивании измерений выполняются минимизацию целевой функции

$$\hat{O}(H) = \sum_{i=1}^N P_i |L_i(H)|^{n_i}, \quad (9)$$

где H – вектор отметок определяемых пунктов; $P_i = \left(\frac{c_i}{\sigma_i}\right)^{n_i}$ – веса измеренных превышений, при этом

$c^2 = \frac{n^n \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}$ находится с использованием гамма-функции; $L(H) = h^{\text{выч.}} - h^{\text{изм.}}$ – свободный член линейного параметрического уравнения; n_i – показатель степени ($1,0 \leq n_i \leq 3,0$).

Степени n_i для каждого измерения будут индивидуальными и отыскиваются под условием минимакса с использованием целевой функции

$$\Phi(H) = \min(\max(m_H)), \quad (10)$$

где m_H – ошибка положения (ошибка какого-либо пункта из всех пунктов нивелирной сети).

Минимум функции (9) будем отыскивать методом Ньютона:

$$H^{yp.} = H_0 - (\nabla^2 \Phi(H))^{-1} \nabla \Phi(H), \quad (11)$$

где $G = \nabla^2 \Phi(H)$ – матрица Гессе; $\nabla \Phi(H)$ – градиент целевой функции.

Вместо (11) можно записать:

$$H^{yp.} = H_0 - \frac{1}{n_{cp.} - 1} (A^T DA)^{-1} A^T DL, \quad (12)$$

где $n_{\bar{n}d.}$ – среднее значение степеней для всех измерений; A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; D – весовая матрица; L – вектор свободных членов параметрических уравнений.

Если бы степени для всех измерений были бы одинаковыми, то

$$D = Pdiag(|V|)^{n-2}. \quad (13)$$

Но для каждого измерения нами используется своя степень и по этой причине величину D вычислить нельзя. Нетрудно доказать, что обратная матрица весов равна

$$Q = FP^{-1}F^T = n_{cp.}^2 (n_{cp.} - 1)^2 F^* P^{-1} (F^*)^T, \quad (14)$$

$$F = (A^T DA)^{-1} A^T D = n_{cp.} (n_{cp.} - 1) F^*, \quad (15)$$

при этом

$$F = n_{cp.} (n_{cp.} - 1) G^{-1} A^T D, \quad (16)$$

что невозможно вычислить из-за незнания D .

Но матрицу F можно найти численно по формуле:

$$F = \frac{H_{\delta_i} - H_{yp.}}{\delta_i}, \quad (17)$$

где H_{δ} – уравненный вектор отметок после искажения i -го измерения на величину δ .

Вычислив по формуле (14) Q , выполним оценку точности, используя следующие формулы:

$$\frac{1}{P_f} = fQf^T; \quad (18)$$

$$m_H = \mu \sqrt{\frac{1}{P_f}}; \quad (19)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T PV}{r}}. \quad (20)$$

Поиск минимума функции (10) осуществим методом релаксации, изменяя степени на величину $n \pm 0,1$ с последующей оценкой точности по формуле (19).

Приведем пример многокритериального уравнивания нивелирной сети, показанной на рисунке для двух циклов наблюдений с обработкой свободного и нуль-свободного геодезического построения [3, 5]. Результаты уравнивательных вычислений приведем в таблице 3.

Таблица 3

Результаты измерений и степени, полученные при многокритериальной оптимизации

№ п/п	Превышения	Цикл 1		Цикл 2		Разность циклов 1 – 2	
		h, м	n	h, м	n	h, м	n
1	18 – 93	6,1250	2,3	6,1070	2,3	-0,0180	1,9
2	93 – 12	8,3200	2,0	8,3270	2,0	0,0070	2,1
3	22 – 12	5,5800	1,8	5,5870	1,8	0,0070	1,9
4	93 – 2	1,3680	2,0	1,3777	2,0	0,0097	2,1
5	86 – 2	4,6940	2,0	4,7014	2,0	0,0074	2,0
6	86 – 12	11,6520	2,0	11,6507	2,0	-0,0013	2,0
7	96 – 2	-0,9050	2,0	-0,8993	2,0	0,0057	2,0
8	2 – 12	6,9440	2,0	6,9456	2,0	0,0016	2,0
9	86 – 96	5,5850	2,0	5,6007	2,0	0,0157	2,0

В таблицах 4 – 6 указаны следующие сведения:

- колонки 2, 3 – результаты уравнивания и оценки точности свободной сети с исходным пунктом Рр 96 при $n = 2,0$ для всех измерений;
- колонка 4 – оценка точности свободной нивелирной сети с исходным пунктом Рр 96 в случае многокритериальной оптимизации с нахождением степеней n , указанных в таблице 3;
- колонки 5, 6 – результаты уравнивания и оценки точности для нуль-свободной нивелирной сети от средней плоскости и в случае многокритериальной оптимизации;
- колонки 7, 8 – результаты уравнивания и оценки точности для нуль-свободной нивелирной сети относительно исходных пунктов и в случае многокритериальной оптимизации.

Таблица 4

Многокритериальная оптимизация первого цикла измерений

№ пункта	Н, м	мн, мм	мн, мм	Н, м	мн, мм	Н, м	мн, мм
1	2	3	4	5	6	7	8
2	190,9909	9,9	7,7	0,6193	3,3	190,9910	6,2
12	197,9412	13,0	7,9	7,5697	3,3	197,9414	6,4
86	186,2979	13,2	11,5	-4,0736	7,7	186,2981	11,0
93	189,6223	9,4	7,7	-0,7493	4,4	189,6224	5,6
18	183,4973	10,3	10,9	-6,8743	7,6	183,4974	8,2
22	192,3612	13,4	7,5	1,9897	8,8	192,3614	6,8
96	191,8900	0,0	0,0	1,5185	5,7	191,8902	4,0

Таблица 5

Многокритериальная оптимизация второго цикла измерений

№ пункта	Н, м	мн, мм	мн, мм	Н, м	мн, мм	Н, м	мн, мм
1	2	3	4	5	6	7	8
2	190,9910	1,9	1,5	0,6227	0,6	190,9917	1,2
12	197,9384	2,5	1,5	7,5701	0,6	197,9391	1,2
86	186,2890	2,6	2,2	-4,0793	1,5	186,2896	2,1
93	189,6126	1,8	1,5	-0,7557	0,9	189,6133	1,1
18	183,5056	2,0	2,1	-6,8627	1,5	183,5063	1,6
22	192,3514	2,6	1,5	1,9831	1,7	192,3521	1,3
96	191,8900	0,0	0,0	1,5217	1,1	191,8907	0,8

Таблица 6

Многокритериальная оптимизация разностей циклов измерений

№ пункта	Н, м	мн, мм	мн, мм	Н, м	мн, мм	Н, м	мн, мм
1	2	3	4	5	6	7	8
2	0,0001	9,6	8,8	0,0034	5,1	0,0006	8,9
12	-0,0029	12,8	5,4	0,0004	1,9	-0,0024	4,8
86	-0,0090	12,3	10,1	-0,0057	6,8	-0,0085	10,7
93	-0,0097	10,1	5,4	-0,0064	2,9	-0,0092	5,7
18	0,0083	10,7	8,3	0,0116	7,6	0,0088	6,3
22	-0,0099	13,1	9,6	-0,0066	8,6	-0,0094	6,9
96	0,0000	0,0	0,0	0,0033	4,7	0,0005	4,3

По данным таблиц 4 – 6 можно сделать следующие выводы:

1) величины отметок H , указанные в колонках 2, 5 и 7, будут близкими к их соответствующим значениям, найденным без многокритериальной оптимизации. По этой причине мы не стали указывать отметки перед колонкой 4;

2) результаты оценки точности при изменении степени n принимают другие и меньшие значения после многокритериальной оптимизации;

3) при обработке разностей эпох наблюдений следует уравнивать по разностям измерений, чтобы получить адекватную оценку точности.

3. Многокритериальная оптимизация осадок сооружений. При реализации многостепенной оптимизации используется целевая функция (8). Приведем формулу функции еще раз [3]:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^N P_i |L_i(X)|^{n_i}, \quad (21)$$

где X – вектор координат определяемых пунктов; N – количество измерений; $L(X)$ – свободный член параметрического уравнивания; P – вес результата измерений, вычисляемый для каждого n_i по формуле:

$$P = \left(\frac{c}{\sigma} \right)^n, \quad (22)$$

c находится из выражения:

$$c = \left[\frac{n^{\frac{2}{n}} \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

с использованием гамма-функции.

Минимум критериальной функции (21) можно отыскать различными методами нелинейного программирования, предусматривая случаи, когда для каждого измерения берется своя оптимальная степень n_i под условием минимума некоторой другой целевой функции. В результате используются два и более критерия оптимальности решения, что соответствует многокритериальному уравниванию.

Область применения многокритериальной оптимизации может быть обширной. Этим способом возможно уравнивание любых локальных геодезических сетей при числе определяемых пунктов не более десяти, т.е. в тех случаях, когда из-за малости выборки трудно установить закон распределения погрешностей измеренных величин и можно принять любые, даже индивидуальные, для каждого измерения степени.

Сравним результаты уравнивания по методу наименьших квадратов с многокритериальным методом на примере, взятом из таблицы 1. В качестве дополнительного критерия примем минимаксный случай:

$$\Phi_2(X) = \min(\max M), \quad (24)$$

где M – ошибка отметок определяемых пунктов сети.

Для определения осадок сооружений необходим целый комплекс мероприятий. Ключевым звеном являются результаты повторных нивелирных измерений, называемые эпохами. В зависимости от решаемой задачи эпохи могут содержать месячные, трехмесячные, полугодовые и годовые циклы. Задача этого исследования состоит в обработке эпох наблюдений с целью определения осадок сооружений.

Предположим, что из двух эпох наблюдения нам известны уравненные отметки пунктов. Их разность характеризует осадку сооружений. Уравнивание выполняется как с применением исходных пунктов, так и без (нуль-свободная нивелирная сеть). До недавнего времени уравнивали нуль-свободную сеть, используя превышения, выполненные в каждой эпохе. Современный подход заключается в том, что за измеренные величины берут не превышения, а разности превышений между эпохами.

Преимущество этого подхода заключается в следующем:

1) вместо того чтобы уравнивать сеть дважды по эпохам, уравнивание по разностям выполняется один раз. Это обстоятельство не является решающим, поскольку само уравнивание сети, как правило, занимает мало машинного времени;

2) при уравнивании нуль-свободных нивелирных и плановых сетей актуальной проблемой является выбор начальных координат (отметок определяемых пунктов). В ряде работ доказывается, что от начальных отметок зависят результаты уравнивания нуль-свободных сетей. Но если принимать в уравнивании разности эпох, начальные отметки общеизвестны и они равны нулю, что позволяет давать однозначные решения при уравнивании;

3) без уравнивания разности превышений трудно иным способом дать оценку точности как этих разностей, так и величину осадок. Это обстоятельство является решающим в защиту уравнивания разностей эпох.

Методы сравним между собой на одном примере нивелирной сети (см. рисунок), где показана данная сеть.

В таблице 3 приведены разности циклов измерений по линиям нивелирования, которые будем использовать при уравнивании.

В дальнейших расчетах примем, что все разности равноточные (это упрощает вычисление, не нарушая строгости решения задачи).

В таблице 7 приведены сведения о степенях измерений, полученных методом релаксации для свободной нивелирной сети с исходным пунктом Рр 96 (см. табл. 7, колонки 3, 4). В таблице 7 по методике, изложенной в [6], приведены результаты многокритериального уравнивания и оценки точности осадок реперов.

Сравнивая таблицу 7 (колонки 3 – 8) с таблицей 8 (колонки 6 – 9) приходим к выводу: при многокритериальном уравнивании значения H практически не изменялись, а результаты оценки точности уменьшились в 1,2 раза.

Таблица 7

Сведения о степенях для измерений, полученных по программе NIWA4

№ п/п	Номер пункта K_1	Номер пункта K_2	Степень n
1	2	3	4
1	18	93	1,8
2	93	12	2,0
3	22	12	1,9
4	93	2	2,0
5	86	2	2,0
6	86	12	2,0
7	96	2	2,0
8	2	12	2,0
9	86	96	2,0

Таблица 8

Многокритериальное уравнивание по программе NIWA4

№ репера	Сеть свободная		Нуль-свободная сеть относительно исходных пунктов		Нуль-свободная сеть относительно средней плоскости	
	3	4	5	6	7	8
2	-0,0009	5,7	0,0007	5,7	0,0034	2,8
12	-0,0046	6,8	-0,0030	6,2	-0,0003	3,2
86	-0,0092	8,4	-0,0076	8,4	-0,0048	5,2
93	-0,0111	3,7	-0,0095	4,5	-0,0068	2,6
18	0,0069	7,8	0,0085	6,1	0,0112	8,2
22	-0,0116	7,6	-0,0100	6,0	-0,0073	5,9
96	0,0000	0,0	0,0016	3,3	0,0044	3,9

Таблица 9

Результаты уравнивания нивелирной сети по программе NIWA2

№ репера	Исходный пункт 18	Исходный пункт 22	Исходный пункт 96	Начальные значения осадок, м	m_n , мм	Осадки от средней плоскости, м	m_n , мм
	3	4	5	6	7	8	9
2	-0,0077	0,0108	-0,0008	0,0008	6,1	0,0035	4,2
12	-0,0115	0,0070	-0,0046	-0,0031	5,7	-0,0003	4,1
86	-0,0161	0,0024	-0,0092	-0,0076	6,9	-0,0048	5,1
93	-0,0180	0,0005	-0,0111	-0,0095	6,2	-0,0067	4,9
18	0,0000	0,0185	0,0069	0,0085	8,0	0,0113	8,8
22	-0,0185	0,0000	-0,0116	-0,0101	7,6	-0,0073	8,4
96	-0,0069	0,0116	0,0000	0,0016	6,8	0,0044	6,3

В колонках 6 и 8 таблицы 9 приведены осадки, полученные при уравнивании нуль-свободной геодезической сети относительно исходных пунктов и относительно средней плоскости. Результаты близки к результатам уравнивания в колонках 5 и 7 таблицы 8.

В таблице 9 приведена оценка точности (см. колонки 7 и 9), соответствующая степеням, показанным в таблице 2 (колонка 4).

По результатам исследований можно сделать следующие **выводы**:

- 1) формулы (3) – (7) рекомендуется применять для определения оптимальных значений весов измерений;
- 2) по результатам таблиц 4 – 6 видно, что применение формул (9) – (20) позволяет осуществить многокритериальную оптимизацию любых нивелирных сетей;
- 3) степени, приведенные в таблице 3, незначительно изменили оценку точности разности циклов наблюдений, приведенных в таблицах 4 – 6;
- 4) программа NIWA4 определила степени, указанные в колонке 4 таблицы 7, которые отличаются от степеней для разностей циклов (см. табл. 3) незначительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркузе, Ю.И. Вычисление и уравнивание геодезических сетей / Ю.И. Маркузе, Е.Г. Бойко, В.В. Голубев; под ред. Ю.И. Маркузе. – М.: Картгеоцентр-Геодезиздат, 1994. – 431 с.
2. Большаков, В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев; под ред. В.Д. Большакова. – М.: Недра, 1977. – 367 с.
3. Мицкевич, В.И. О вычислении начальных координат пунктов для последующего уравнивания нуль-свободных геодезических сетей / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский, В.Г. Стержанов // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2001. – № 2(4). – С. 35 – 36.
4. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 1999. – 5 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99, № 681. – ГД 99.
5. Левданский, П.М. Уравнивание и оценка точности нуль-свободных сетей нивелирования и GPS-построений, минуя регуляризацию / П.М. Левданский, Н.С. Сырова, А.П. Присяжнюк // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2001. – № 3(5). – С. 22 – 23.
6. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 1999. – 5 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99, № 681. – ГД 99.

Поступила 06.04.2009