УДК 517.6:517.958

О КОНЕЧНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

Н.К. Волосова (аспирант Московского государственного технического университета МГТУ им. Н.Э. Баумана);

к. ф.-м. н., доц. Д.Ф. Пастухов, к. ф.-м. н., доц. Ю.Ф. Пастухов

(*Полоцкий государственный университет*);

К.А. Волосов, профессор, д.ф. - м.н. (МИИТ), А.К. Волосова, к.ф.- м.н. (ООО "Трамплин"), г. Москва

Предложен конечный алгоритм прогонки в матричной форме с шестым порядком погрешности для решения уравнения Пуассона на произвольном прямоугольнике. Аналитическим примером и программой, использующей данный алгоритм, подтвержден шестой порядок погрешности. В теореме 1 доказана монотонность матриц с диагональным преобладанием, у которых элементы главной диагонали отрицательны (положительны), а недиагональные положительны (отрицательны). В теореме 2 получена верхняя оценка бесконечной нормы обратной к монотонной матрице. В теореме 3 получены достаточные условия корректности предложенного алгоритма. Показано что быстродействие данного алгоритма в 70 раз больше быстродействия алгоритма решения уравнения Пуассона на прямоугольнике методом простой итерации с той же формулой аппроксимации с шестым порядком погрешности.

Ключевые слова: *метод прогонки в блочной форме, диагональные матрицы, монотонные матрицы, уравнения математической физики, численные методы, уравнение Пуассона, трансляция аналитического решения в численное.*

Введение. Матрицы и матричные уравнения специального типа применяются во многих разделах прикладной математики. В квантовой механике динамика частиц со спином определяется матрицами кватернионов (полукватернионов)[1,2]. Уравнение Пуассона на прямоугольнике (параллелепипеде) можно решить методом прогонки[3,4,5,6,10,12,13,19]. Алгебраический метод прогонки, совместно с формулой простой итерации[5] является приближенным методом, так как число итераций не ограничено, но имея формулу аппроксимации уравнения Пуассона с шестым порядком погрешности можно значительно снизить погрешность и время вычислений[5]. В данной работе рассмотрен метод прогонки в матричной форме для численного решения уравнения Пуассона за конечное число арифметических операций. Идея работы частично основана на идее статьи[10], а также модификации краевых столбцов и строк в матрице правой части уравнения Пуассона с шестым порядком аппроксимации[5]. Однако в работе [10] и в данной работе возможно обобщение задачи, то есть решать уравнение Пуассона на прямоугольной сетке $n_1 \times n_2$ с квадратными ячейками $h_1 = h_2 = h$,однако, матрицы коэффициентов A,B по-прежнему квадратные $n_1 \times n_1$. Этот эффект мы навали эффектом прямоугольной шахты, в которой перемещается квадратная кабина лифта(квадратные матрицы A,B $n_1 \times n_1$) в направлении n_2 ,минимальное перемещение $h_1 = h_2 = h$ (перемещение поперек шахты не разрешается). Возможны ситуации $n_1 > n_2, n_1 < n_2$ - длина шахты как больше размера кабины, так и меньше. Получены достаточные условия корректности предложенного алгоритма, теоремы 1,2,3. Метод можно использовать в численных задачах математической физики[15,16,17], а также в двумерных задачах гидродинамики, система уравнений которых содержит уравнение Пуассона от функции тока, где правая часть – функция вихря $\Delta\psi = -\omega$ [20].

Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольнике с неизвестной функцией $u(x, y)$ с неоднородными граничными условиями $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(x), \varphi_4(x), x \in [a,b], y \in [c,d]$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \ (x, y) \in D = (a,b) \times (c,d) \\ u(a, y) = \varphi_1(y), u(b, y) = \varphi_2(y), u(x,c) = \varphi_3(x), u(x,d) = \varphi_4(x), x \in [a,b], y \in [c,d] \end{cases} \quad (1$$

Дифференциальной задаче (1) сопоставим разностную задачу(2), в которой два параметра h_1, h_2 - шаги равномерной сетки по координатным осям x,y соответственно[4,стр.102]

$$\begin{cases} L_{h_1h_2}u_{h_1h_2} = f_{h_1h_2},\ (x_{h_1}, y_{h_2}) \in D_{h_1h_2} : x_{h_1} \equiv x_n = a + nh_1, n = \overline{1, n_1 - 1}, y_{h_2} \equiv y_m = c + mh_2, m = \overline{1, n_2 - 1} \\ l_{h_1h_2}u_{h_1h_2}\big|_{\Gamma_{h_1h_2}} = \varphi_{h_1h_2}, (x_{h_1}, y_{h_2}) \in \Gamma_{h_1h_2} : x_{h_1} \equiv x_n = a + nh_1, n = \overline{0, n_1}, y_{h_2} \equiv y_m = c + mh_2, m = \overline{0, n_2}, h_1 = \dfrac{b-a}{n_1}, h_2 = \dfrac{d-c}{n_2} \end{cases} \quad (2)$$

$u_{h_1h_2}$ -неизвестная сеточная функция, решение задачи(2). Отметим, что максимальный порядок аппроксимации разностной задачей(2) дифференциальной задачи(1) зависит от вида разностного оператора $L_{h_1h_2}$, то есть, прежде всего, от числа узлов в шаблоне и симметрии шаблона. Можно получить шестой порядок аппроксимации задачи(1) задачей(2)на девятиточечном шаблоне с равными шагами сетки[5,6] $h_1 = h_2 = h$. Для упрощения будем также полагать $n_1=n_2=N$. Краевой разностный оператор $l_{h_1h_2} \equiv 1$ в задаче Дирихле(2) - единичный. Из работы[5, стр.73](формула(32)) запишем разностное уравнение(2) с шестым порядком погрешности для девятиточечного шаблона с центральным узлом $u_{m,n}$:

$$\frac{1}{h^2}\left(\frac{-10}{3}u_{m,n} + \frac{2}{3}\left(u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}\right) + \frac{1}{6}\left(u_{m-1,n-1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n+1}\right)\right) = f + \frac{h^2}{12}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) +$$

$$+ h^4\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}\right) + \frac{1}{90} f_{xxyy}^{(4)}\right) + O\left(h^6\right), \qquad n = \overline{1, n_1 - 1}, m = \overline{1, n_2 - 1} \quad (3)$$

Покажем, что разностное уравнение(3) можно получить из рекуррентного вида разностного матричного уравнения второго порядка. Определим матрицы A,B

$$A = \left\|a_{m,n}\right\| = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & 0\dots & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3}\ 0\dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\dots & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0\dots & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix}, B = \left\|b_{m,n}\right\| = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0\dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}\ 0\dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\dots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0\dots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$a_{m,n} = \begin{cases} -\dfrac{10}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \\ \dfrac{2}{3}, m = n + 1 \vee m = n - 1 \\ 0, m \geq n + 2 \vee m \leq n - 2 \end{cases}, \qquad b_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \\ \dfrac{1}{6}, m = n + 1 \vee m = n - 1 \\ 0, m \geq n + 2 \vee m \leq n - 2 \end{cases} \quad (4)$$

Где A,B - квадратные симметрические трехдиагональные матрицы Теплица ранга $n_1 - 1$. Перепишем уравнение(3) в эквивалентном виде

$$\frac{-10}{3}u_{m,n} + \frac{2}{3}\left(u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}\right) + \frac{1}{6}\left(u_{m-1,n-1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n+1}\right) = F_{m,n} \equiv f_{m,n}h^2 + \frac{h^4}{12}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) +$$

$$+ h^6\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}\right) + \frac{1}{90} f_{xxyy}^{(4)}\right) + O\left(h^8\right), \qquad m = \overline{1, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \quad (5)$$

Если u_{m-1}, u_m, u_{m+1} вектор – строки матрицы решения ранга $(n_2 - 1) \times (n_1 - 1)$, то уравнение(5) эквивалентно уравнению(6)

$$Bu_{m-1}^T + Au_m^T + Bu_{m+1}^T = F_m^T \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n_1-1} b_{s,k}u^T{}_{k,m-1} + \sum_{k=1}^{n_1-1} a_{s,k}u^T{}_{k,m} + \sum_{k=1}^{n_1-1} b_{s,k}u^T{}_{k,m+1} = F^T{}_{s,m}, \overline{s = 2, n_1 - 2}, m = \overline{2, n_2 - 2} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} b_{s,k}u_{m-1,k} + \sum_{k=1}^{n_1-1} a_{s,k}u_{m,k} + \sum_{k=1}^{n_1-1} b_{s,k}u_{m+1,k} = F_{m,s} \Leftrightarrow b_{s,s-1}u_{m-1,s-1} + b_{s,s}u_{m-1,s} + b_{s,s+1}u_{m-1,s+1} +$$

$$+ a_{s,s-1}u_{m,s-1} + a_{s,s}u_{m,s} + a_{s,s+1}u_{m,s+1} + b_{s,s-1}u_{m+1,s-1} + b_{s,s}u_{m+1,s} + b_{s,s+1}u_{m+1,s+1} = F_{m,s}, \overline{s=2,n_1-2}, m=\overline{2,n_2-2} \quad (6)$$

Учитывая(4) при s=n, из (6)получим

$\frac{1}{6}u_{m-1,n-1} + \frac{2}{3}u_{m-1,n} + \frac{1}{6}u_{m-1,n+1} + \frac{2}{3}u_{m,n-1} - \frac{10}{3}u_{m,n} + \frac{2}{3}u_{m,n+1} + \frac{1}{6}u_{m+1,n-1} + \frac{2}{3}u_{m+1,n} + \frac{1}{6}u_{m+1,n+1} = F_{m,n}$, Группируя слагаемые с одинаковыми коэффициентами в последнем уравнении, имеем

$$-\frac{10}{3}u_{m,n} + \frac{2}{3}\left(u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}\right) + \frac{1}{6}\left(u_{m-1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n-1} + u_{m+1,n+1}\right) = F_{m,n}, \overline{n=2,n_1-2}, m=\overline{2,n_2-2}$$

где $F_{m,n} = fh^2 + \frac{h^4}{12}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) + h^6\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}\right) + \frac{1}{90} f_{xxyy}^{(4)}\right) + O\left(h^8\right)\Big|_{x=x_n, y=y_m}$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению (5) на внутренних узлах. Уравнение $Bu_{n-1}^T + Au_n^T + Bu_{n+1}^T = F_n^T$ при $n = 1.n_2 - 1$ имеет смысл, если положить $Au_1^T + Bu_2^T = F_1^T, Bu_{n_2-2}^T + Au_{n_2-1}^T = F_{n_2-1}^T$. В результате запишем систему матричных уравнений, в которой матрицы A, B определены формулой(4).

$$\begin{cases} Au_1^T + Bu_2^T = \overline{F_1^T} \\ Bu_{m-1}^T + Au_m^T + Bu_{m+1}^T = \overline{F_m^T}, m = \overline{2,n_2-2} \\ Bu_{n_2-2}^T + Au_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T} \end{cases} \quad (7)$$

Черта в системе уравнений (7) означает, что правая часть формулы(7), вообще говоря, не совпадает с правой частью формулы(5) в граничных узлах. В системе уравнений(7) квадратная матрица решений $u_{m,n}$ имеет ранг$(n_2-1)(n_1-1)$,её можно расширить до ранга $(n_2+1)(n_1+1)$, используя граничные условия из постановки задачи(1), то есть

$$u_{m,0} = \varphi_{1,m}, u_{m,n_1} = \varphi_{2,m}, u_{0,n} = \varphi_{3,n}, u_{n_2,n} = \varphi_{4,n}, m = \overline{0,n_2}, n = \overline{0,n_1} \quad (8)$$

С учетом системы уравнений (7), краевых условий(8), формула(5) имеет теперь смысл при всех $m = \overline{1,n_2-1}, n = \overline{1,n_1-1}$. Рассмотрим первое уравнение системы(7) в угловом узле равномерной сетки с индексами(m=s=1,n=1):

$$a_{1,1}u_{1,1} + a_{1,2}u_{1,2} + b_{1,1}u_{2,1} + b_{1.2}u_{2,2} = F_{1,1} \Leftrightarrow \frac{-10}{3}u_{1,1} + \frac{2}{3}u_{1,2} + \frac{2}{3}u_{2,1} + \frac{1}{6}u_{2,2} = \frac{-10}{3}u_{1,1} + \frac{2}{3}\left(u_{2,1} + u_{1,2}\right) + \frac{1}{6}u_{2,2} = \overline{F_{1,1}} \quad (9)$$

В правой части уравнения(9) стоит черта, так как правая часть(9) отличается от уравнения(5):

$$\frac{-10}{3}u_{1,1} + \frac{2}{3}\left(u_{2,1} + u_{1,2} + u_{1,0} + u_{0,1}\right) + \frac{1}{6}\left(u_{2,2} + u_{0,2} + u_{2,0} + u_{0,0}\right) = \overline{F_{1,1}} + \frac{2}{3}\left(u_{1,0} + u_{0,1}\right) + \frac{1}{6}\left(u_{0,2} + u_{2,0} + u_{0,0}\right) \equiv F_{1,1} \Leftrightarrow$$

$\overline{F_{1,1}} \equiv F - \frac{2}{3}\left(u_{1,0} + u_{0,1}\right) - \frac{1}{6}\left(u_{0,2} + u_{2,0} + u_{0,0}\right)$, аналогично, для трех остальных узлов имеем

$$
\begin{cases}
\frac{-10}{3}u_{1,n_1-1}+\frac{2}{3}\left(u_{2,n_1-1}+u_{1,n_1-2}+u_{1,n_1}+u_{0,n_1-1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{2,n_1-2}+u_{0,n_1-2}+u_{2,n_1}+u_{0,n_1}\right)=F_{1,n_1-1}\\
\overline{F_{1,n_1-1}}\equiv F_{1,n_1-1}-\frac{2}{3}\left(u_{1,n_1}+u_{0,n_1-1}\right)-\frac{1}{6}\left(u_{0,n_1-2}+u_{2,n_1}+u_{0,n_1}\right)\\
\frac{-10}{3}u_{n_2-1,1}+\frac{2}{3}\left(u_{n_2-2,1}+u_{n_2-1,2}+u_{n_2-1,0}+u_{n_2,1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{n_2-2,2}+u_{n_2,2}+u_{n_2-2,0}+u_{n_2,0}\right)=F_{n_2-1,1}\\
\overline{F_{n_2-1,1}}\equiv F_{n_2-1,1}-\frac{2}{3}\left(u_{n_2-1,0}+u_{n_2,1}\right)-\frac{1}{6}\left(u_{n_2,2}+u_{n_2-2,0}+u_{n_2,0}\right)\\
\frac{-10}{3}u_{n_2-1,n_1-1}+\frac{2}{3}\left(u_{n_2-2,n_1-1}+u_{n_2-1,n_1-2}+u_{n_2-1,n_2}+u_{n_2,n_1-1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{n_2-2,n_1-2}+u_{n_2,n_1-2}+u_{n_2-2,n_1}+u_{n_2,n_1}\right)=F_{n_2-1,n_1-1}\\
\overline{F_{n_2-1,n_1-1}}\equiv F_{n_2-1,n_1-1}-\frac{2}{3}\left(u_{n_2-1,n_1}+u_{n_2,n_1-1}\right)-\frac{1}{6}\left(u_{n_2,n_1-2}+u_{n_2-2,n_1}+u_{n_2,n_1}\right)\\
\frac{-10}{3}u_{1,1}+\frac{2}{3}\left(u_{2,1}+u_{1,2}+u_{1,0}+u_{0,1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{2,2}+u_{0,2}+u_{2,0}+u_{0,0}\right)=F_{1,1}\\
\overline{F_{1,1}}\equiv F_{1,1}-\frac{2}{3}\left(u_{1,0}+u_{0,1}\right)-\frac{1}{6}\left(u_{0,2}+u_{2,0}+u_{0,0}\right)
\end{cases}
$$

(10)где $F_{m,n}=fh^2+\frac{h^4}{12}\left(f_{xx}+f_{yy}\right)+h^6\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)}+f_y^{(4)}\right)+\frac{1}{90}f_{xxyy}^{(4)}\right)+O\left(h^8\right)\Big|_{x=x_n,\,y=y_m}$

Рассмотрим первое уравнение системы(7) для узла с координатами (m= 2,n= s=1), из(6) имеем:

$$
b_{s,s-1}u_{m-1,s-1}+b_{s,s}u_{m-1,s}+b_{s,s+1}u_{m-1,s+1}+a_{s,s-1}u_{m,s-1}+a_{s,s}u_{m,s}+a_{s,s+1}u_{m,s+1}+b_{s,s-1}u_{m+1,s-1}+b_{s,s}u_{m+1,s}+b_{s,s+1}u_{m+1,s+1}=F_{m,s}\Leftrightarrow
$$
$$
b_{1,1}u_{1,1}+b_{1,2}u_{1,2}+a_{1,1}u_{2,1}+a_{1,2}u_{2,2}+b_{1,1}u_{3,1}+b_{1,2}u_{3,2}=\overline{F_{2,1}}\Leftrightarrow\frac{2}{3}u_{1,1}+\frac{1}{6}u_{1,2}-\frac{10}{3}u_{2,1}+\frac{2}{3}u_{2,2}+\frac{2}{3}u_{3,1}+\frac{1}{6}u_{3,2}=\overline{F_{2,1}}\Leftrightarrow
$$
$$
-\frac{10}{3}u_{2,1}+\frac{2}{3}\left(u_{1,1}+u_{2,2}+u_{3,1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{1,2}+u_{3,2}\right)=\overline{F_{2,1}}
$$

Добавляя тождественно несколько слагаемых к левой и правой части последнего уравнения до полноты формулы(5), получим

$$
-\frac{10}{3}u_{2,1}+\frac{2}{3}\left(u_{1,1}+u_{2,2}+u_{3,1}+u_{2,0}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{1,0}+u_{3,2}+u_{1,2}+u_{3,0}\right)=\overline{F_{2,1}}+\frac{2}{3}u_{2,0}+\frac{1}{6}\left(u_{1,0}+u_{3,0}\right)\equiv F_{2,1}\tag{11}
$$

Аналогично формуле(11) для узла(m=2,n=s=1) для всех граничных узлов(m=1,n=1,…,n_1-1), (m=n_2-1,n=1,…,n_1-1), (m=1,…,n_2-1,n=1), (m=1,…,n_2-1,n=n_1-1) имеем

$$
\begin{cases}
-\frac{10}{3}u_{1,n}+\frac{2}{3}\left(u_{1,n-1}+u_{2,n}+u_{1,n+1}+u_{0,n}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{2,n-1}+u_{2,n+1}+u_{0,n-1}+u_{0,n+1}\right)=F_{1,n},n=\overline{2,n_1-2}\\
\overline{F_{1,n}}=F_{1,n}-\frac{2}{3}u_{0,n}-\frac{1}{6}\left(u_{0,n-1}+u_{0,n+1}\right),n=\overline{2,n_1-2}\\
-\frac{10}{3}u_{n_2-1,n}+\frac{2}{3}\left(u_{n_2-1,n-1}+u_{n_2-2,n}+u_{n_2-1,n+1}+u_{n_2,n}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{n_2-2,n-1}+u_{n_2-2,n+1}+u_{n_2,n-1}+u_{n_2,n+1}\right)=F_{n_2-1,n},n=\overline{2,n_1-2}\\
\overline{F_{n_2-1,n}}=F_{n_2-1,n}-\frac{2}{3}u_{n_2,n}-\frac{1}{6}\left(u_{n_2,n-1}+u_{n_2,n+1}\right),n=\overline{2,n_1-2}\\
-\frac{10}{3}u_{m,1}+\frac{2}{3}\left(u_{m-1,1}+u_{m,2}+u_{m+1,1}+u_{m,0}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{m-1,2}+u_{m+1,2}+u_{m-1,0}+u_{m+1,0}\right)=F_{m,1},m=\overline{2,n_2-2}\\
\overline{F_{m,1}}=F_{m,1}-\frac{2}{3}u_{m,0}-\frac{1}{6}\left(u_{m-1,0}+u_{m+1,0}\right),m=\overline{2,n_2-2}\\
-\frac{10}{3}u_{m,n_1-1}+\frac{2}{3}\left(u_{m-1,n_1-1}+u_{m,n_1-2}+u_{m+1,n_1-1}+u_{m,n_1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{m-1,n_1-2}+u_{m+1,n_1-2}+u_{m-1,n_1}+u_{m+1,n_1}\right)=F_{m,n_1-1},m=\overline{2,n_2-2}\\
\overline{F_{m,n_1-1}}=F_{m,n_1-1}-\frac{2}{3}u_{m,n_1}-\frac{1}{6}\left(u_{m-1,n_1}+u_{m+1,n_1}\right),m=\overline{2,n_2-2}\\
\overline{F_{m,n}}=F_{m,n},\ \forall m\in\overline{2,n_2-2},n\in\overline{2,n_1-2}
\end{cases}\tag{12}
$$

где $F_{m,n} = fh^2 + \frac{h^4}{12}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) + h^6\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}\right) + \frac{1}{90} f_{xxyy}^{(4)}\right) + O\left(h^8\right)\Big|_{x=x_n, y=y_m}$

Таким образом, запись уравнений системы(7) с матрицами A,B, определенных формулой(4) во внутренних узлах(m=2,…,n_2-2,n=2,…,n_1-2), не отличается от формулы(5) – аппроксимации уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности. А во внутренних узлах следует использовать формулы(10) в четырех угловых граничных узлах или формулы(12) в граничных узлах на четырех отрезках.

Будем искать решение рекуррентно заданной системы матричных уравнений (7) в виде(13)

$$\begin{cases} u_m^T = \lambda_m u_{m+1}^T + \nu_m, m = \overline{1, n_2 - 2} \\ u_{N-1}^T = \nu_{N-1}, m = n_2 - 1 \end{cases} \tag{13}$$

Как следует из теории размерностей[7], в формуле(7) u_m^T, ν_m -векторы ранга $n_1 - 1$, а коэффициенты прогонки $\lambda_m, m = \overline{1, n_2 - 2}$ представляют собой квадратные матрицы ранга $n_1 - 1$.Где в(13) u_m^T обозначает вектор-столбец – траспонированная строка с индексом m матрицы решения(n_2-1)(n_1-1).

Из первого уравнения системы(7) имеем

$$u_1^T = -A^{-1}Bu_2^T + A^{-1}\overline{F_1^T} \Leftrightarrow \lambda_1 = -A^{-1}B, \nu_1 = A^{-1}\overline{F_1^T} \tag{14}$$

Где $\overline{F_1^T}$ обозначает вектор-столбец – траспонированная строка с индексом m=1 матрицы правой части F уравнения Пуассона. Как следует из (13) $u_{m-1}^T = \lambda_{m-1}u_m^T + \nu_{m-1},$ преобразуем второе уравнение системы(13)

$$Bu_{m-1}^T + Au_m^T + Bu_{m+1}^T = \overline{F_m^T} \Leftrightarrow B\left(\lambda_{m-1}u_m^T + \nu_{n-1}\right) + Au_m^T + Bu_{m+1}^T = \overline{F_m^T}, \left(B\lambda_{m-1} + A\right)u_m^T = -Bu_{m+1}^T + \overline{F_m^T} - B\nu_{m-1} \Leftrightarrow$$

$$\left(B\lambda_{m-1} + A\right)u_m^T = -\left(B\lambda_{m-1} + A\right)^{-1}Bu_{m+1}^T + \left(B\lambda_{m-1} + A\right)^{-1}\left(\overline{F_m^T} - B\nu_{m-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\lambda_m = -\left(B\lambda_{m-1} + A\right)^{-1}B, \nu_m = \left(B\lambda_{m-1} + A\right)^{-1}\left(\overline{F_m^T} - B\nu_{m-1}\right), m = \overline{2, n_2 - 2} \tag{15}$$

Используя последнее уравнение системы(5), форму решения(13), найдем последнюю строку матрицы решения $u_{n_2-1}^T$,имеем

$$Bu_{n_2-2}^T + Au_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T}, u_{n_2-2}^T = \lambda_{n_2-2}u_{n_2-1}^T + \nu_{n_2-2} \Leftrightarrow B\left(\lambda_{n_2-2}u_{n_2-1}^T + \nu_{n_2-2}\right) + Au_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T} \Leftrightarrow$$

$$\left(B\lambda_{n_2-2} + A\right)u_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T} - B\nu_{n_2-2} \Leftrightarrow u_{n_2-1}^T = \left(B\lambda_{n_2-2} + A\right)^{-1}\left(\overline{F_{n_2-1}^T} - B\nu_{n_2-2}\right) \tag{16}$$

В силу второго уравнения(13) получим

$$\nu_{n_2-1} = u_{n_2-1}^T \tag{17}$$

Формулы(14),(15) назовем матричными формулами прогонки вперед, а формулы

(17),(13) матричными формулами прогонки назад

$$u_m^T = \lambda_m u_{m+1}^T + \nu_m, m = \overline{n_2 - 2, 1} \tag{18}$$

Опишем построенный нами алгоритм решения уравнения Пуассона за конечное число арифметических операций матричным методом прогонки (в математических традициях мехмата МГУ[3,стр.587-588]).

1. По формуле $F^{T}{}_{m,n} = fh^2 + \frac{h^4}{12}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) + h^6\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}\right) + \frac{1}{90} f_{xxyy}^{(4)}\right) + O\left(h^8\right)\Big|_{x=x_n, y=y_m}$ вычислить правую часть уравнения Пуассона во всех внутренних узлах равномерной сетки прямоугольника(m=1,…,n_2-1;n=1,…,n_1-1). Краевые условия задачи(1) задают граничные условия матрицы решения $u_{m,0} = \varphi_{1,m}, u_{m,n_1} = \varphi_{2,m}, u_{0,n} = \varphi_{3,n}, u_{n_2,n} = \varphi_{4,n}, m = \overline{0,n_2}, n = \overline{0,n_1}$ (формула(8)).

2. Поправить правые части системы уравнений (7)(модифицировать правые части системы уравнений (7)) по формулам (10), (12) в узлах прямоугольного контура соседнего с граничным контуром, то есть найти $\overline{F_{m,n}}$ по величинам $F_{m,n}$ пункта 1.

3. Найти матричные коэффициенты прогонки вперед по формулам(14),(15) $m = \overline{1, n_2 - 2}$.

4. Найти вектор-строку $u^T_{n_2-1}$ по формуле(16).

5. Найти остальные строки матрицы - решения u_m^T по формулам(18) $m = \overline{n_2 - 2,1}$.

Решим пример на классе элементарных функций, методы решения аналогичных примеров описаны в учебнике по уравнениям математической физики[9]:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin(2x)\sin(3y), (x,y) \in (0,2\pi)\times(0,3\pi) \\ u(0,y) = u(2\pi,y) = \sin(y), y \in [0,3\pi] \\ u(x,0) = u(x,3\pi) = \sin(x), x \in [0,2\pi] \end{cases} \qquad (19)$$

Проведем линейную редукцию примера(19), положив $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y)$, где

$$1)\begin{cases} u_{1xx}(x,y) + u_{1yy}(x,y) = \sin(2x)\sin(3y), (x,y) \in (0,2\pi)\times(0,3\pi) \\ u_1(0,y) = u_1(2\pi,y) = 0, y \in [0,3\pi] \\ u_1(x,0) = u_1(x,3\pi) = 0, x \in [0,2\pi] \end{cases}$$

Решение последней системы ищем в виде $u_1(x,y) = A\sin(2x)\sin(3y)$. При этом краевые условия второе и третье уравнение системы 1) выполняются автоматически. Подставим $u_1(x,y)$ в первое уравнения системы

$$u_{1xx}(x,y) + u_{1yy}(x,y) = \sin(2x)\sin(3y) \Leftrightarrow -A(4+9)\sin(2x)\sin(3y) = \sin(2x)\sin(3y) \Leftrightarrow A = -\frac{1}{13},$$

тогда $u_1(x,y) = -\frac{1}{13}\sin(2x)\sin(3y)$.

$$2)\begin{cases} u_{2xx}(x,y) + u_{2yy}(x,y) = 0, (x,y) \in (0,2\pi)\times(0,3\pi) \\ u_2(0,y) = u_2(2\pi,y) = \sin(y), y \in [0,3\pi] \\ u_2(x,0) = u_2(x,3\pi) = 0, x \in [0,2\pi] \end{cases}$$

Ищем решение 2) в виде $u_2(x,y) = f(x)\sin(y)$, автоматически удовлетворяющее краевому условию-третьему уравнению в системе 2). Подставим $u_2(x,y)$ в первое и второе уравнения системы 2):

$$\begin{cases} \left(f''(x) - f(x)\right)\sin(y) = 0 \\ u_2(0,y) = u_2(2\pi,y) = \sin(y) \Leftrightarrow f(0)\sin(y) = f(2\pi)\sin(y) = \sin(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) - f(x) = 0 \\ f(0) = f(2\pi) = 1 \end{cases}$$

Общее решение однородного обыкновенного дифференциального уравнения в краевой задаче ищем в виде:

$$f(x) = A\,\mathrm{sh}(x) + B\,\mathrm{ch}(x),\ f(0) = 1 \Leftrightarrow A\cdot 0 + B\cdot 1 = 1, B = 1;\ f(2\pi) = 1 \Leftrightarrow A\cdot \mathrm{sh}(2\pi) + \mathrm{ch}(2\pi) = 1, A = \frac{1-\mathrm{ch}(2\pi)}{\mathrm{sh}(2\pi)},$$

Где: $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\ \forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Тогда $u_2(x,y) = f(x)\sin(y) = \left(A\,\mathrm{sh}(x) + B\,\mathrm{ch}(x)\right)\sin(y) = \left(\left(\dfrac{1-\mathrm{ch}(2\pi)}{\mathrm{sh}(2\pi)}\right)\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x)\right)\sin(y)$.

$$3)\begin{cases} u_{3xx}(x,y) + u_{3yy}(x,y) = 0, (x,y) \in (0,2\pi)\times(0,3\pi) \\ u_3(0,y) = u_3(2\pi,y) = 0, y \in [0,3\pi] \\ u_2(x,0) = u_2(x,3\pi) = \sin(x), x \in [0,2\pi] \end{cases}$$

Ищем решение 3) в виде $u_3(x,y) = f(y)\sin(x)$, автоматически удовлетворяющее краевому условию-второму уравнению в системе 3). Подставим $u_3(x,y)$ в первое и третье уравнения системы 3):

$$\begin{cases} \left(f''(y) - f(y)\right)\sin(x) = 0 \\ u_3(x,0) = u_3(x,3\pi) = \sin(x) \Leftrightarrow f(0)\sin(x) = f(3\pi)\sin(x) = \sin(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(y) - f(y) = 0 \\ f(0) = f(3\pi) = 1 \end{cases}$$

Но последние две краевые задачи отличаются друг от друга заменой переменных $x \leftrightarrow y$, поэтому и решения задач 2) и 3) отличаются только заменой переменных $x \leftrightarrow y$ и краевыми условиями $f(2\pi) = 1 \leftrightarrow f(3\pi) = 1$:

$$u_3(x,y) = f(y)\sin(x) = \left(A\,\mathrm{sh}(y) + B\,\mathrm{ch}(y)\right)\sin(x) = \left(\left(\frac{1-\mathrm{ch}(3\pi)}{\mathrm{sh}(3\pi)}\right)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{ch}(y)\right)\sin(x)$$

Тогда решение исходного примера(19) имеет вид:

$$u(x,y) = -\frac{1}{13}\sin(2x)\sin(3y) + \left(\left(\frac{1-\mathrm{ch}(2\pi)}{\mathrm{sh}(2\pi)}\right)\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x)\right)\sin(y) + \left(\left(\frac{1-\mathrm{ch}(3\pi)}{\mathrm{sh}(3\pi)}\right)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{ch}(y)\right)\sin(x) \quad (20)$$

Программа, написанная нами на языке FORTRAN[20] с использованием алгоритма(8),(10),(12),(14),(15),(16),(18) возвращает численное решение $u_{m,n}(numerical)$, которое сравнивается с точным решением $u(x,y)(exact)$ в таблице 1.

Таблица 1. Сравнение численного решения $u_{m,n}(numerical)$ полученного алгоритмом(8),(10),(12),(14),(15),(16),(18) с точным решением $u(x,y)(exact)$.

$y = c + h_2 \cdot m$	$x = a + h_1 \cdot n$	$u(x,y)(exact)$	$u_{m,n}(numerical)$
1.25663706143	**0.000000000000E+000**	**0.951056516295**	**0.951056516295**
2.51327412287	**0.000000000000E+000**	**0.587785252292**	**0.587785252292**
3.76991118430	**0.000000000000E+000**	**-0.587785252292**	**-0.587785252292**

5.02654824574	0.000000000000E+000	-0.951056516295	-0.951056516295
6.28318530717	0.000000000000E+000	-2.4492127076E-016	-0.44921270764E-016
7.53982236861	0.000000000000E+000	0.951056516295	0.951056516295
8.79645943005	0.000000000000E+000	0.587785252292	0.587785252292
0.000000000000E+000	1.25663706143	0.951056516295	0.951056516295
1.25663706143	1.25663706143	0.573907707085	0.573907707086
2.51327412287	1.25663706143	0.205804929549	0.205804929546
3.76991118430	1.25663706143	-0.102572841154	-0.102572841152
5.02654824574	1.25663706143	-0.285044176197	-0.285044176199
6.28318530717	1.25663706143	4.28714624319E-002	4.287146243183E-002
7.53982236861	1.25663706143	0.447878357634	0.447878357636
8.79645943005	1.25663706143	0.635305917351	0.635305917348
0.000000000000E+000	2.51327412287	0.587785252292	0.587785252292
1.25663706143	2.51327412287	0.223220476438	0.223220476435
2.51327412287	2.51327412287	0.178820392472	0.178820392476
3.76991118430	2.51327412287	-0.115019453114	-0.115019453119
5.02654824574	2.51327412287	-4.4692996239E-002	-4.46929962365E-002
6.28318530717	2.51327412287	2.64960209303E-002	2.64960209302E-002
7.53982236861550	2.51327412287183	0.145330054898079	0.145330054895151
8.79645943005	2.51327412287	0.444266601135	0.444266601139
0.000000000000E+000	3.76991118430	-0.587785252292	-0.587785252292
1.25663706143	3.76991118430	-2.5661795207E-002	-2.5661795204E-002
2.51327412287	3.76991118430	-5.6722412698E-002	-5.6722412703E-002
3.76991118430	3.76991118430	-7.0785266586E-003	-7.0785266539E-003
5.02654824574	3.76991118430	-0.152865684991	-0.152865684994
6.28318530717	3.76991118430	-2.6496020930E-002	-2.6496020930E-002
7.53982236861	3.76991118430	5.22286263330E-002	5.22286263358E-002
8.79645943005	3.76991118430	-0.322168621361	-0.322168621366
0.000000000000E+000	5.02654824574	-0.951056516295	-0.951056516295
1.25663706143	5.02654824574	-2.1099959942E-002	-2.1099959944E-002

2.51327412287	**5.02654824574**	**0.135849047429**	**0.135849047432**
3.76991118430	**5.02654824574**	**-0.239081135823**	**-0.239081135826**
5.02654824574	**5.02654824574**	**-0.267763570945**	**-0.267763570943**
6.28318530717	**5.02654824574**	**-4.2871462431E-002**	**-4.2871462431E-002**
7.53982236861	**5.02654824574**	**0.104929389507**	**0.104929389505**
8.79645943005	**5.02654824574**	**-0.293651940372**	**-0.293651940369**
0.000000000000E+000	**6.28318530717**	**-2.4492127076E-016**	**0.000000000000E+000**
1.25663706143	**6.28318530717**	**0.951056516295**	**0.951056516295**
2.51327412287	**6.28318530717**	**0.587785252292**	**0.587785252292**
3.76991118430	**6.28318530717**	**-0.587785252292**	**-0.587785252292**
5.02654824574	**6.28318530717**	**-0.951056516295**	**-0.951056516295**
6.28318530717	**6.28318530717**	**-2.5596176402E-016**	**-2.44921270764E-016**
7.53982236861	**6.28318530717**	**0.951056516295**	**0.951056516295**
8.79645943005	**6.28318530717**	**0.587785252292**	**0.587785252292**

Замечание 1. Сравнение третьего и четвертого столбцов таблицы 1 показывает совпадение точного $u(x,y)(exact)$ и численного решения $u_{m,n}(numerical)$ в 11 значащих цифрах. Программа вычисляет норму Чебышева разности между точным и численным решениями

$$\left\| u_{m,n}(numerical) - \left(u(exact)\right)_{m,n} \right\|_C^{n_1,n_2} = \max_{m=0,n_1;n=0,n_2} \left| u_{m,n}(numerical) - \left(u(exact)\right)_{m,n} \right| = 5.3980153680299 \cdot 10^{-12},$$ с

параметрами $n_1 = 250, n_2 = 375$ (число интервалов деления стороны квадрата $b - a = 2\pi, d - c = 3\pi$) квадратной равномерной сетки. Известно также, что все другие функциональные нормы в численных методах не превышают нормы Чебышева в пространстве равномерно непрерывных функций[3,4,8].

Отметим, что в нашей задаче появляется проблема *трансляции аналитического решения в численное*. Решение (20) с учетом относительной погрешности $10^{-16} - 10^{-15}$ в компиляторе с двойной точностью[18] имеет абсолютную ошибку $\left(\mathrm{ch}(2\pi) + \mathrm{ch}(3\pi)\right) \cdot 10^{-15} \approx 6.436 \cdot 10^{-12} > 5.398 \cdot 10^{-12}$. Видно, что ошибка трансляции аналитического решения в численное решение превышает даже невязку задачи(1)-(2) по норме Чебышева.

Замечание 2. Математики Новосибирской математической школы придерживаются мнения, что тестовые примеры в численных алгоритмах должны быть экстремальными в некотором смысле [15]. Поэтому в примере (19) выбрана быстро осциллирующая правая часть уравнения $f(x,y) = \sin(2x)\sin(3y)$.

Замечание 3. Определим порядок погрешности алгоритма (8),(10),(12),(14),(15),(16),(18) совместно с формулой(5). Программа возвращает значение нормы Чебышева $\left\| u_{m,n}(numerical) - \left(u(exact)\right)_{m,n} \right\|_C^{n_1=50,n_2=75} = 8.145 \cdot 10^{-8}$, а при числе интервалов вдвое больше имеем $\left\| u_{m,n}(numerical) - \left(u(exact)\right)_{m,n} \right\|_C^{n_1=100,n_2=150} = 1.2658 \cdot 10^{-9}$,тогда порядок погрешности алгоритма равен $p = 6$:

$$\left\| u_{m,n}(numerical) - \left(u(exact)\right)_{m,n} \right\|_C^{n_1=50,n_2=75} / \left\| u_{m,n}(numerical) - \left(u(exact)\right)_{m,n} \right\|_C^{n_1=100,n_2=150} = 8.145 \cdot 10^{-8} / 1.2658 \cdot 10^{-9} \approx$$

$\approx 64{,}35 \approx 2^6 \Leftrightarrow p = 6$. То есть порядок погрешности алгоритма не может превышать порядка погрешности аппроксимации уравнения Пуассона формулой(3) равного шести.

Замечание 4. В работе[5] методами простой итерации и скалярной прогонки с числом итераций m=1800 ($n_1 = n_2 = 111$) с правой частью $f(x, y) = \sin(2x)\sin(3y)$ программа возвращает норму Чебышева (для краевых условий $u(0, y) = u(\pi, y) = \sin(y), y \in [0, \pi], u(x,0) = u(x, \pi) = \sin(x), x \in [0, \pi]$) для уравнения Пуассона равной $\left\| u_{m,n}(numerical) - \left(u(exact)\right)_{m,n} \right\|_C^{n_1=111, n_2=111} = 2.428 \cdot 10^{-11}$ за время $\Delta t = 58.2$ с. В то время как в данной работе норма невязки и время равны $\left\| u_{m,n}(numerical) - \left(u(exact)\right)_{m,n} \right\|_C^{n_1=111, n_2=111} = 1.06 \cdot 10^{-11}$ $\Delta t = 0{,}87$ с соответственно.

Отметим, что, как частный случай, из предложенного нами алгоритма можно получить матричный алгоритм, описанный в общих чертах в [3,стр. 584-585],авторы Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. придумали специальный термин ”метод прогонки в блочной форме”. Там уравнение Пуассона решается на прямоугольнике с пятиточечным шаблоном “крест” со вторым порядком погрешности. Заметим, что в[3,стр. 584-585] решается уравнение Пуассона на квадрате с одинаковым числом интервалов сетки. Мы обобщили их алгоритм для решения уравнения Пуассона на прямоугольнике. Матрицы A,B имеют вид

$$a_{m,n} = \begin{cases} -4, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \\ 1, m = n + 1 \vee m = n - 1 \\ 0, |m - n| \geq 2 \end{cases}, \qquad b_{m,n} = \begin{cases} 1, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \\ 0, m \neq n \end{cases} \tag{21}$$

То есть, матрица B представляет собой единичную матрицу ранга N-1. Вместо разностного уравнения(5) в[3] приводится уравнение

$$u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1} - 4u_{m,n} = F_{m,n} \equiv f_{m,n} h^2 \tag{22}$$

Формулы(7) по-прежнему остаются в силе
$$\begin{cases} Au_1^T + Bu_2^T = \overline{F_1^T} \\ Bu_{m-1}^T + Au_m^T + Bu_{m+1}^T = \overline{F_n^T}, m = \overline{2, n_2 - 2} \\ Bu_{n_2-2}^T + Au_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T} \end{cases} \tag{23}$$

В (23) матрицы A,B определяются формулами(21). Граничные поправки(10),(12)переходят в

$$\begin{cases} u_{2,n_1-1} + u_{1,n_1-2} + u_{1,n_1} + u_{0,n_1-1} - 4u_{1,n_1-1} = h^2 f_{1,n_1-1} \equiv F_{1,n_1-1} \\ \overline{F_{1,n_1-1}} \equiv F_{1,n_1-1} - \left(u_{1,n_1} + u_{0,n_1-1}\right) \\ u_{n_2-2,1} + u_{n_2-1,2} + u_{n_2-1,0} + u_{n_2,1} - 4u_{n_2-1,1} = h^2 f_{n_2-1,1} \equiv F_{n_2-1,1} \\ \overline{F_{n_2-1,1}} \equiv F_{n_2-1,1} - \left(u_{n_2-1,0} + u_{n_2,1}\right) \\ u_{n_2-2,n_1-1} + u_{n_2-1,n_1-2} + u_{n_2-1,n_1} + u_{n_2,n_1-1} - 4u_{n_2-1,n_1-1} = h^2 f_{n_2-1,n_1-1} \equiv F_{n_2-1,n_1-1} \\ \overline{F_{n_2-1,n_1-1}} \equiv F_{n_2-1,n_1-1} - \left(u_{n_2-1,n_1} + u_{n_2,n_1-1}\right) \\ u_{2,1} + u_{1,2} + u_{1,0} + u_{0,1} - 4u_{1,1} = h^2 f_{1,1} \equiv F_{1,1} \\ \overline{F_{1,1}} \equiv F_{1,1} - \left(u_{1,0} + u_{0,1}\right) \end{cases} \tag{24}$$

$$
\begin{cases}
u_{1,n-1}+u_{2,n}+u_{1,n+1}+u_{0,n}-4u_{1,n}=h^2 f_{1,n}\equiv F_{1,n}, n=\overline{2,n_1-2}\\
\overline{F_{1,n}}=F_{1,n}-u_{0,n}, n=\overline{2,n_1-2}\\
u_{n_2-1,n-1}+u_{n_2-2,n}+u_{n_2-1,n+1}+u_{n_2,n}-4u_{n_2-1,n}=h^2 f_{n_2-1,n}\equiv F_{n_2-1,n}, n=\overline{2,n_1-2}\\
\overline{F_{n_2-1,n}}=F_{n_2-1,n}-u_{n_2,n}, n=\overline{2,n_1-2}\\
u_{m-1,1}+u_{m,2}+u_{m+1,1}+u_{m,0}-4u_{m,1}=h^2 f_{m,1}\equiv F_{m,1}, m=\overline{2,n_2-2}\\
\overline{F_{m,1}}=F_{m,1}-u_{m,0}, m=\overline{2,n_2-2}\\
u_{m-1,n_1-1}+u_{m,n_1-2}+u_{m+1,n_1-1}+u_{m,n_1}-4u_{m,n_1-1}=h^2 f_{m,n_1-1}\equiv F_{m,n_1-1}, m=\overline{2,n_2-2}\\
\overline{F_{m,n_1-1}}=F_{m,n_1-1}-u_{m,n_1}, m=\overline{2,n_2-2}\\
\overline{F_{m,n}}=F_{m,n},\ \forall m\in\overline{2,n_2-2}, n\in\overline{2,n_1-2}
\end{cases}
\tag{25}
$$

Формулы(14),(15),(16),(17),(18) по-прежнему остаются в силе для матриц A,B, определенных в(22):

$$\lambda_1=-A^{-1}, \nu_1=A^{-1}\overline{F_1^T}, \lambda_m=-(\lambda_{m-1}+A)^{-1}, \nu_m=(\lambda_{m-1}+A)^{-1}\left(\overline{F_m^T}-\nu_{m-1}\right), m=\overline{2,n_2-2} \tag{26}$$

$$u_{n_2-1}^T=(\lambda_{n_2-2}+A)^{-1}\left(\overline{F_{n_2-1}^T}-\nu_{n_2-2}\right), \nu_{n_2-1}=u_{n_2-1}^T \tag{27}$$

$$u_m^T=\lambda_m u_{m+1}^T+\nu_m, m=\overline{n_2-2,1} \tag{28}$$

Программа с использованием алгоритма(22)-(29) и условий примера(19) на квадрате со стороной π возвращает норму невязки Чебышева $\left\|u_{m,n}(numerical)-(u(exact))_{m,n}\right\|_C^{n_1=111,n_2=111}=1.027\cdot 10^{-4}$ за время $\Delta t=0{,}312$ с.

Сравнивая полученные результаты программой (**Замечание 3**)) в алгоритмах (21)-(28) и в (8),(10),(12),(14),(15),(16),(18) при одних и тех же параметрах и режимах программы(Release), видно, что быстродействие алгоритмов сопоставимо, но в алгоритме(8),(10),(12),(14),(15),(16),(18) норма невязки меньше в 10^7 раз!

Определение 1. Векторной нормой Чебышева $\|x\|_C\equiv\|x\|_\infty, x\in R^{n_1-1}$ называют величину $\|x\|_C=\max\limits_{i=\overline{1,n_1-1}}|x_i|$.

Определение 2. Бесконечной нормой $\|A\|_\infty$ квадратной матрицы $\|a_{i,j}\|\in R^{(n_2-1)\times(n_1-1)}$ называется число $\|A\|_\infty=\max\limits_{i=\overline{1,n_2-1}}\sum\limits_{j=1}^{n_1-1}|a_{i,j}|$.

Определение 3. Говорят, что матричная норма $\|A\|_X$ согласована с векторной нормой $\|x\|_X$, если $\forall x\in R^{(n_1-1)\cdot}, \|Ax\|_X\le\|A\|_X\|x\|_X$

Лемма. Матричная норма $\|A\|_\infty$ согласована с векторной нормой $\|x\|_\infty$.

Доказательство. $\|Ax\|_\infty=\max\limits_{i=\overline{1,n_2-1}}\left|\sum\limits_{j=1}^{n_1-1}a_{i,j}x_j\right|\le\max\limits_{i=\overline{1,n_2-1}}\sum\limits_{j=1}^{n_1-1}|a_{i,j}|\max\limits_{k=\overline{1,n_1-1}}|x_k|=\|A\|_\infty\|x\|_\infty$. **Лемма** доказана.

Определение 4. Говорят, что матрица A монотонна, если обратная к ней матрица имеет неположительные (неотрицательные) элементы [8].

Например, матрица A, определенная формулой(4), является монотонной, а матрица B нет.

Численный эксперимент показывает, что матрица обратная к А,определенной формулой(4) является монотонной для различных рангов, то есть все элементы матрицы A^{-1} неположительные. Оказывается, что все матрицы с диагональным преобладанием элементов, у которых диагональные элементы и недиагональные имеют противоположные знаки[8], являются монотонными**.**

Теорема 1. Невырожденная матрица со строгим диагональным преобладанием элементов, у которой диагональные элементы отрицательны(положительны) а недиагональные элементы положительны(отрицательны),является монотонной.

Доказательство для определенности проведем для матриц с отрицательными диагональными элементами и положительными недиагональными элементами.

База индукции(n=2).

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}, a_{1,1} < 0, |a_{1,1}| > |a_{1,2}|, a_{2,2} < 0, |a_{2,1}| < |a_{2,2}|, \Delta = a_{2,2}a_{1,1} - a_{1,2}a_{2,1} > 0, A_{11} = a_{2,2} < 0,$$

$$A_{22} = a_{1,1} < 0, A_{12} = -a_{2,1} < 0, A_{21} = -a_{1,2} < 0, sign(a_{2,1} + a_{2,2}) = sign(a_{2,2}) = -1, sign(a_{1,1} + a_{1,2}) = sign(a_{1,1}) = -1$$

$$sign(\Delta_n) = (-1)^n = (-1)^2 = sign(a_{2,2}a_{1,1} - a_{1,2}a_{2,1}) = 1, a_{m,n}^{-1} = \frac{A_{n,m}}{\Delta} < 0, \forall m,n = 1,2$$

Видим, что A_2 монотонная, так как все элементы обратной матрицы отрицательны. Кроме того, диагональные алгебраические дополнения прямой матрицы- равносильно диагональные элементы обратной матрицы больше по модулю недиагональных. База индукции проверена.

Индуктивный переход. Пусть A_{n-1} - монотонная, знак диагонального минора $sign(\Delta_{n-1}) = (-1)^{n-1}$, все диагональные миноры по модулю больше недиагональных миноров.

Если $a_{m,n}, A_{m,n}$ соответственно элемент и его алгебраическое дополнение, то[11,стр.32]

$$\begin{cases} a_{m,1}A_{m,1} + a_{m,2}A_{m,2} + ..a_{m,m}A_{m,m} + ...+ a_{m,n}A_{m,n} = \Delta_n \\ a_{m,1}A_{s,1} + a_{m,2}A_{s,2} + ..a_{m,m}A_{s,m} + ...+ a_{m,n}A_{s,n} = 0, \forall s \neq n \end{cases} \tag{30}$$

Так как $sign(\Delta_n) = sign(a_{m,1}A_{m,1} + a_{m,2}A_{m,2} + ..a_{m,m}A_{m,m} + ...+ a_{m,n}A_{m,n}) = sign(a_{m,m}A_{m,m}) = (-1)\cdot(-1)^{n-1} = (-1)^n$

Выражая из формулы(30) диагональное алгебраическое дополнение, получим

$$sign(a_{m,1}A_{m,1} + a_{m,2}A_{m,2} + ..a_{m,m}A_{m,m} + ...+ a_{m,n}A_{m,n}) = sign(a_{m,m}A_{m,m}) = sign(a_{m,m})\cdot sign(A_{m,m}) = sign(\Delta_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sign(A_{m,m}) = sign(\Delta_n) sign(a_{m,m}) = (-1)^n(-1) = (-1)^{n+1}, a_{m,m} < 0 \forall m = \overline{1,n}, a_{m,m}^{-1} = \frac{A_{m,m}}{\Delta_n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sign(a_{m,m}^{-1}) = sign\left(\frac{A_{m,m}}{\Delta_n}\right) = sign(A_{m,m}) sign(\Delta_n) = (-1)^{n+1}(-1)^n = -1$$

Из второго уравнения(30) имеем $\sum_{k=1}^{n} a_{m,k}A_{s,k} = a_{m,1}A_{s,1} + a_{m,2}A_{s,2} + ..a_{m,m}A_{s,m} + ...+ a_{m,n}A_{s,n} = 0 (m \neq s) \Leftrightarrow$

$$a_{m,m}A_{s,m}=-\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n}a_{m,k}A_{s,k}\Leftrightarrow sign\left(a_{m,m}A_{s,m}\right)=sign\left(-\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n}a_{m,k}A_{s,k}\right)=-sign\left(a_{m,s}A_{s,s}\right)=-sign\left(A_{s,s}\right)=(-1)^{n}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sign\left(a_{m,m}A_{s,m}\right)=(-1)^{n}\Leftrightarrow sign\left(a_{m,m}\right)sign\left(A_{s,m}\right)=(-1)^{n},sign\left(A_{s,m}\right)=(-1)^{n}sign\left(a_{m,m}\right)=(-1)^{n}\cdot(-1)=(-1)^{n+1}$$

$$sign\left(a_{s,m}^{-1}\right)=sign\left(\frac{A_{m,s}}{\Delta_n}\right)=sign\left(A_{m,s}\right)sign\left(\Delta_n\right)=sign\left(A_{s,m}\right)sign\left(\Delta_n\right)=(-1)^{n+1}(-1)^{n}=-1$$

Кроме того диагональные миноры по модулю больше недиагональных, так как их главная диагональ состоит из чисел, каждое из которых имеет диагональное преобладание в своей строке. **Индуктивный переход Теоремы 1** доказан**.**

Теорема 2. Невырожденная квадратная матрица со строгим диагональным преобладанием, у которой диагональные элементы отрицательны (положительны) а недиагональные элементы положительны(отрицательны), имеет верхнюю оценку бесконечной нормы для обратной матрицы

$$r_m(A)=\left|a_{m,m}\right|-\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N-1}\left|a_{m,n}\right|,\underset{*}{R}\equiv\min_{m=1,N-1}\left(\left|a_{m,m}\right|-\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N-1}\left|a_{m,n}\right|\right)=\min_{m=1,N-1}r_m(A)>0,\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}\leq\frac{1}{\underset{*}{R}}$$

Доказательство: Элемент единичной матрицы ранга N-1

$$e_{m,n}\equiv\delta_{m,n}=\sum_{k=1}^{N-1}a_{m,k}^{-1}a_{k,n}=a_{m,1}^{-1}a_{1,n}+a_{m,2}^{-1}a_{2,n}+\ldots+a_{m,N-1}^{-1}a_{N-1,n}=\delta_{m,n},\forall m,n=\overline{1,N-1}$$

Просуммируем каждое слагаемое в последней сумме по индексу столбца n=1,…,N-1

$$\sum_{n=1}^{N-1}e_{m,n}=\sum_{n=1}^{N-1}\delta_{m,n}=1=\sum_{k=1}^{N-1}a_{m,k}^{-1}\sum_{n=1}^{N-1}a_{k,n}=a_{m,1}^{-1}\sum_{n=1}^{N-1}a_{1,n}+a_{m,2}^{-1}\sum_{n=1}^{N-1}a_{2,n}+\ldots+a_{m,N-1}^{-1}\sum_{n=1}^{N-1}a_{N-1,n}=1,\forall m=\overline{1,N-1}$$

По условию **Теоремы 2** диагональные и недиагональные элементы матрицы A имеют разные знаки

$$\sum_{n=1}^{N-1}a_{m,n}=-\left(\left|a_{m,m}\right|-\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N-1}\left|a_{m,n}\right|\right)\equiv-r_m(A),-a_{m,1}^{-1}r_1(A)-a_{m,2}^{-1}r_2(A)-\ldots-a_{m,N-1}^{-1}r_{N-1}(A)=1,a_{m,n}^{-1}\leq 0,\forall m,n\in\overline{1,N-1}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\left|a_{m,1}^{-1}\right|r_1(A)+\left|a_{m,2}^{-1}\right|r_2(A)+\ldots+\left|a_{m,N-1}^{-1}\right|r_{N-1}(A)=1$,обозначим индекс строки матрицы обратной к A, сумма модулей элементов которой максимальна $i_0:\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}=\left|a_{i_0,1}^{-1}\right|+\left|a_{i_0,2}^{-1}\right|+\ldots+\left|a_{i_0,N-1}^{-1}\right|>0$, но и для строки с номером i_0 верно

$$\left(\left|a_{i_0,1}^{-1}\right|+\left|a_{i_0,2}^{-1}\right|+\ldots+\left|a_{i_0,N-1}^{-1}\right|\right)\min_{m=1,N-1}r_m(A)\leq\left|a_{i_0,1}^{-1}\right|r_1(A)+\left|a_{i_0,2}^{-1}\right|r_2(A)+\ldots+\left|a_{i_0,N-1}^{-1}\right|r_{N-1}(A)=1,\min_{m=1,N-1}r_m(A)>0\Leftrightarrow$$

$$\left(\left|a_{i_0,1}^{-1}\right|+\left|a_{i_0,2}^{-1}\right|+\ldots+\left|a_{i_0,N-1}^{-1}\right|\right)\min_{m=1,N-1}r_m(A)=\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}\min_{m=1,N-1}r_m(A)\leq 1\Leftrightarrow\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}\leq\frac{1}{\min_{m=1,N-1}r_m(A)}=\frac{1}{\underset{*}{R}}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3(достаточные условия устойчивости алгоритма (8)-(18)). Пусть выполнены условия:

1)Трехдиагональные квадратные Теплица матрицы A,B симметрические ранга $n_1 - 1$ $a_{n,n+1} = a_{n-1,n}, b_{n,n+1} = b_{n-1,n}, \forall n = \overline{2, n_1 - 2}$.

2)Матрица А монотонная с отрицательными диагональными элементами и положительными недиагональными элементами, B положительная матрица $a_{n-1,n} \cdot a_{n,n} < 0, b_{n,m} > 0, \forall n = \overline{2, n_1 - 2}, \forall |n-m| \le 1$.

3) $\underset{*}{R} \equiv \min\limits_{m=1,n_1-1} \left(|a_{m,m}| - \sum\limits_{\substack{n=1 \\ n \ne m}}^{n_1-1} |a_{m,n}| \right) = \min\limits_{m=1,n_1-1} r_m(A) = |a_{m,m}| - 2|a_{m,m-1}| \ge 2\|B\|_\infty, |a_{m,m}| \ge \frac{10}{3}\|B\|_\infty, |a_{m,m-1}| \le \frac{2}{3}\|B\|_\infty$

4) $\exists \max\limits_{m=1,n_2-1} \left\|\overline{F_m^T}\right\|_\infty \equiv \left\|\overline{F^T}\right\|_\infty = \max\limits_{m=1,n_2-1} \sum\limits_{n=1}^{n_1-1} |f_{m,n}| < +\infty$

Тогда:

1) $\|\lambda_m\|_\infty \le 1, \forall m = \overline{1, n_2 - 1}$

2)формулы прогонки (14),(15),(16) корректны, то есть

$$\|v_m\|_\infty \le m \frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty} < \infty, m = \overline{1, n_2 - 1}, \left\|u_{n_2-2}^T\right\|_\infty \le (2n_2 - 3) \frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty} < +\infty$$

Замечание 6. Нормы матриц A,B, определенных формулой (4), удовлетворяют условию 2) и условию 3) **Теоремы 2**

$$|a_{m,m}| \ge \frac{10}{3}\|B\|_\infty \Leftrightarrow \left(\frac{10}{3} \ge \frac{10}{3}\right); |a_{m,m-1}| \le \frac{2\|B\|_\infty}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le \frac{2}{3}, \|B\|_\infty = \frac{2}{3} + 2\frac{1}{6} = 1$$

$$|a_{m,m}| - 2|a_{m,m-1}| \ge 2\|B\|_\infty \Leftrightarrow \left|\frac{-10}{3}\right| - 2\frac{2}{3} = 2 \ge 2$$

Доказательство проведем по индукции. Если матрица А симметрическая, то обратная матрица A^{-1} также симметрическая. Матрицы A+B и A-B удовлетворяют Теореме 1(применима Теорема 2), так как имеют строгое диагональное преобладание элементов, а знаки диагональных и недиагональных элементов противоположны. Имеем оценку согласно[4,стр.57].

$$\|\lambda_1\|_\infty = \left\|-A^{-1}B\right\|_\infty \le \left\|A^{-1}\right\|_\infty \|B\|_\infty$$

Напомним, что по условию **Теоремы 3** А- трехдиагональная симметрическая матрица Теплица.

1)Для **базы индукции** при k=1, используя **Теорему 2,** имеем

$$\|\lambda_1\|_\infty = \left\|-A^{-1}B\right\|_\infty \le \left\|A^{-1}\right\|_\infty \|B\|_\infty \overset{T2}{\le} \frac{1}{\underset{*}{R}}\|B\|_\infty = \frac{\|B\|_\infty}{|a_{m,m}| - 2|a_{m,m-1}|} \overset{3)}{\le} \frac{\|B\|_\infty}{2\|B\|_\infty} = \frac{1}{2} \le 1$$

$$\|v_1\|_\infty = \left\|A^{-1}\overline{F_1^T}\right\|_\infty \le \left\|A^{-1}\right\|_\infty \left\|\overline{F_1^T}\right\|_\infty \le \frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{2\|B\|_\infty} \le \frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty}$$

База индукции проверена.

Индуктивный переход. Пусть верно $\|\lambda_k\| \le 1, \forall k = \overline{1, m-1}$. Тогда имеем

$$\underset{*}{R}(A-B) \ge \underset{*}{R}(B\lambda_{m-1}+A) \ge \underset{*}{R}(B+A) \Leftrightarrow |a_{n,n}-b_{n,n}| - 2|a_{n,n-1}-b_{n,n-1}| \ge \underset{*}{R}(B\lambda_{m-1}+A) \ge |a_{n,n}+b_{n,n}| - 2|a_{n,n-1}+b_{n,n-1}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a_{n,n}| + |b_{n,n}| - 2(|a_{n,n-1}| - |b_{n,n-1}|) \ge \underset{*}{R}(B\lambda_{m-1}+A) \ge |a_{n,n}| - |b_{n,n}| - 2(|a_{n,n-1}| + |b_{n,n-1}|)$$

$$\|\lambda_m\|_\infty = \left\| -(B\lambda_{m-1}+A)^{-1} B \right\|_\infty \le \frac{\|B\|_\infty}{\underset{*}{R}(B\lambda_{m-1}+A)} \le \frac{\|B\|_\infty}{|a_{n,n}| - |b_{n,n}| - 2(|a_{n,n-1}| + |b_{n,n-1}|)} = \frac{\|B\|_\infty}{|a_{n,n}| - 2|a_{n,n-1}| - \|B\|_\infty} \overset{3)}{\le} \frac{\|B\|_\infty}{2\|B\|_\infty - \|B\|_\infty} = 1$$

Первая часть **теоремы 1** доказана $\forall k = \overline{1,m} \subset \overline{1, n_2-2}$.

2)Обозначим $\max\limits_{m=1,n_2-1} \left\|\overline{F_m^T}\right\|_\infty \equiv \left\|\overline{F^T}\right\|_\infty = \left\|F^T\right\|_\infty = \max\limits_{m=1,n_2-1} \sum\limits_{n=1}^{n_1-1} |f_{m,n}|$. Так как $\|\lambda_m\|_\infty \le 1, \forall m = \overline{1, n_2-2}.$

База индукции: $\|v_1\|_\infty = \left\|A^{-1}\overline{F_1^T}\right\|_\infty \le \|A^{-1}\|_\infty \left\|\overline{F_1^T}\right\|_\infty \le \dfrac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{2\|B\|_\infty} \le \dfrac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty}$ проверена.

Индуктивный переход. Пусть $\|v_k\|_\infty < \infty, \forall k = \overline{1, n_2-1}$,тогда

$$\|v_m\|_\infty = \left\|(B\lambda_{m-1}+A)^{-1}\left(\overline{F_m^T} - Bv_{m-1}\right)\right\|_\infty \le \left\|(B\lambda_{m-1}+A)^{-1}\right\|_\infty \left\|\left(\overline{F_m^T} - Bv_{m-1}\right)\right\|_\infty \le \frac{\left\|\left(\overline{F_m^T} - Bv_{m-1}\right)\right\|_\infty}{\underset{*}{R}(B\lambda_{m-1}+A)} \le \frac{\left\|\overline{F_m^T}\right\|_\infty + \|B\|_\infty \|v_{m-1}\|_\infty}{\|B\|_\infty} \le$$

$$\frac{\left\|\overline{F_m^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|v_{m-1}\|_\infty \le \frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|v_{m-1}\|_\infty \le 2\frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|v_{m-2}\|_\infty \le \ldots \le (m-1)\frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|v_1\|_\infty \le m\frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty} < +\infty \qquad (31)$$

$$\left\|u_{n_2-1}^T\right\|_\infty = \|v_{n_2-1}\|_\infty = \left\|(B\lambda_{n_2-2}+A)^{-1}\left(\overline{F_{n_2-1}^T} - Bv_{n_2-2}\right)\right\|_\infty \le \left\|(B\lambda_{n_2-2}+A)^{-1}\right\|_\infty \left\|\overline{F_{n_2-1}^T} - Bv_{n_2-2}\right\|_\infty \le \frac{\left\|\overline{F_{n_2-1}^T}\right\|_\infty + \|B\|_\infty \|v_{n_2-2}\|_\infty}{\|B\|_\infty} \le$$

$$\frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|v_{n_2-2}\|_\infty \le (n_2-1)\frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty} < +\infty\ . \qquad (32)$$

По формуле(18) имеем

$$\left\|u_{n_2-2}^T\right\|_\infty = \left\|\lambda_{n_2-2}u_{n_2-1}^T + v_{n_2-2}\right\|_\infty \le \|\lambda_{n_2-2}\|_\infty \left\|u_{n_2-1}^T\right\|_\infty + \|v_{n_2-2}\|_\infty \le \left\|u_{n_2-1}^T\right\|_\infty + \|v_{n_2-2}\|_\infty = (n_2-1)\frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty} + (n_2-2)\frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty} = (2n_2-3)\frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty} < +\infty \quad (33)$$

Теорема 3 доказана.

В программе, написанной на FORTRAN, все массивы и функции заданы с двойной точностью, использован пример (19) с известным аналитическим решением(20). Для вычисления обратных матриц с двойной точностью в алгоритме(8),(10),(12),(14),(15),(16),(18) использована библиотека msImsl [18] с вызовом подпрограммы

```
program puasson;

integer(8),parameter::n1=250,n2=(n1*3)/2,n11=n1-1,n22=n2-1;integer(8)::i,j,k,kk;
```

```
real(8)::a,b,c,d,pi,h,h1,h2,x,y;real(8)::delta(0:n2,0:n1),max,res(0:n2,0:n1);real(8)::c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8;

real(8)::nu(n22,n11),lamda(n22,n11,n11),u(0:n2,0:n1),ff(n22,n11),aa1(n11,n11),bb(n11,n11),aa(n11,n11),cc(n11,n11),u1(n22,n11);

real(8)::cch,ssh,a1,a2,b1,b2,f,t1,t2,f1,f2,f3,hh2,hh3,hh4,bb1(n11,n11);cch(x)=(dexp(x)+dexp(-x))/2d0;

ssh(x)=(dexp(x)-dexp(-x))/2d0;a1(x,y)=dsin(y);a2(x,y)=dsin(y);b1(x,y)=dsin(x);b2(x,y)=dsin(x);

f(x,y)=dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y);f1(x,y)=-13d0*dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y)/12d0;

f2(x,y)=97d0*dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y)/360d0;f3(x,y)=4d-1*dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y);max=-1000d0;pi=2d0*dasin(1d0);

a=0d0;b=2d0*pi;c=0d0;d=3d0*pi;h1=(b-a)/dfloat(n1);h2=(d-c)/dfloat(n2);call cpu_time(t1);

print*,"h1=",h1,"h2=",h2;do i=1,n11;do j=1,n11;if(j==i)then;aa(i,j)=-10d0/3d0;bb(i,j)=2d0/3d0;

elseif(j==i+1.or. j==i-1)then;aa(i,j)=2d0/3d0;bb(i,j)=1d0/6d0;else;aa(i,j)=0d0;bb(i,j)=0d0;

endif;enddo;enddo;do j=0,n1,1;x=a+h1*dfloat(j);u(0,j)=b1(x,c);u(n2,j)=b2(x,d);enddo;

do     i=0,n2,1;y=c+h2*dfloat(i);u(i,0)=a1(a,y);u(i,n1)=a2(b,y);enddo;hh2=h1*h1;hh3=hh2*hh2;hh4=hh3*hh2;do j=2,n11-1,1;

 x=a+h1*dfloat(j);ff(1,j)=(f(x,c+h2)*hh2+f1(x,c+h2)*hh3+(f2(x,c+h2)+f3(x,c+h2))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(0,j-1)+u(0,j+1))-(2d0/3d0)*u(0,j);

ff(n22,j)=(f(x,d-h2)*hh2+f1(x,d-h2)*hh3+(f2(x,d-h2)+f3(x,d-h2))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(n2,j-1)+u(n2,j+1))-(2d0/3d0)*u(n2,j);

enddo;do i=2,n22-1,1;y=c+h2*dfloat(i);

ff(i,1)=(f(a+h1,y)*hh2+f1(a+h1,y)*hh3+(f2(a+h1,y)+f3(a+h1,y))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(i+1,0)+u(i-1,0))-(2d0/3d0)*u(i,0);

ff(i,n11)=(f(b-h1,y)*hh2+f1(b-h1,y)*hh3+(f2(b-h1,y)+f3(b-h1,y))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(i+1,n1)+u(i-1,n1))-(2d0/3d0)*u(i,n1);

enddo;

ff(1,1)=(f(a+h1,c+h1)*hh2+f1(a+h1,c+h1)*hh3+(f2(a+h1,c+h1)+f3(a+h1,c+h1))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(0,0)+u(2,0)+u(0,2))-(2d0/3d0)*(u(1,0)+u(0,1));

 ff(n22,1)=(f(a+h1,d-h1)*hh2+f1(a+h1,d-h1)*hh3+(f2(a+h1,d-h1)+f3(a+h1,d-h1))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(n2,0)+u(n2,2)+u(n2-2,0))-(2d0/3d0)*(u(n2-1,0)+u(n2,1));

ff(1,n11)=(f(b-h1,c+h2)*hh2+f1(b-h1,c+h2)*hh3+(f2(b-h1,c+h2)+f3(b-h1,c+h2))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(0,n1)+u(2,n1)+u(0,n1-2))-(2d0/3d0)*(u(0,n1-1)+u(1,n1));

ff(n22,n11)=(f(b-h1,d-h2)*hh2+f1(b-h1,d-h2)*hh3+(f2(b-h1,d-h2)+f3(b-h1,d-h2))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(n2,n1)+u(n2-2,n1)+u(n2,n1-2))-(2d0/3d0)*(u(n2,n1-1)+u(n2-1,n1));

do i=2,n2-2;do j=2,n1-2;x=a+h1*dfloat(j);y=c+h2*dfloat(i);ff(i,j)=(f(x,y)*hh2+f1(x,y)*hh3+(f2(x,y)+f3(x,y))*hh4);

enddo;enddo;call obr(n11,aa,aa1);lamda(1,1:n11,1:n11)=-matmul(aa1(1:n11,1:n11),bb(1:n11,1:n11));

nu(1,1:n11)=matmul(aa1(1:n11,1:n11),ff(1,1:n11));do i=2,n22-1;

bb1(1:n11,1:n11)=matmul(bb(1:n11,1:n11),lamda(i-1,1:n11,1:n11))+aa(1:n11,1:n11);call obr(n11,bb1,aa1);

lamda(i,1:n11,1:n11)=-matmul(aa1(1:n11,1:n11),bb(1:n11,1:n11));

nu(i,1:n11)=matmul(aa1(1:n11,1:n11),(ff(i,1:n11)-matmul(bb(1:n11,1:n11),nu(i-1,1:n11))));enddo;
```

```
bb1(1:n11,1:n11)=matmul(bb(1:n11,1:n11),lamda(n22-1,1:n11,1:n11))+aa(1:n11,1:n11);call obr(n11,bb1,aa1);

u1(n22,1:n11)=matmul(aa1(1:n11,1:n11),(ff(n22,1:n11)-matmul(bb(1:n11,1:n11),nu(n22-1,1:n11))));do i=n22-1,1,-1;

u1(i,1:n11)=matmul(lamda(i,1:n11,1:n11),u1(i+1,1:n11))+nu(i,1:n11);enddo;do i=1,n22;do j=1,n11;u(i,j)=u1(i,j);

enddo;enddo;max=-1d3;open(2, file='2.txt');do j=0,n1;do i=0,n2;x=a+h1*dfloat(j);y=c+h2*dfloat(i);

c1= dsin(y)*(cch(x)+ssh(x)*(1d0-cch(2d0*pi))/ssh(2d0*pi));c2= dsin(x)*(cch(y)+ssh(y)*(1d0-cch(3d0*pi))/ssh(3d0*pi));

c3= -dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y)/13d0;res(i,j)=c1+c2+c3;delta(i,j)= u(i,j)- res(i,j);if( delta(i,j)<=0d0)then;

delta(i,j)=-delta(i,j);endif;if( delta(i,j)>max)then;max=delta(i,j);endif;if(mod(i,50)==0.and.mod(j,50)==0)then;

2 write(2,*),y,x;3 write(2,*),res(i,j),u(i,j);endif;enddo;enddo;print*,"norma C =",max,"num=";

call cpu_time(t2);print*,"t2-t1=",t2-t1;pause;end program puasson;

subroutine obr(n11,bb,aa1);use msimsl;integer(8)::n11,Lda,Ldainv;real(8)::ainv(n11,n11) ,bb(n11,n11),aa1(n11,n11);

Lda=n11;Ldainv=n11;call dLinrg(n11,bb,n11,ainv,n11);aa1(:,:)=ainv(:,:);

end subroutine;
```

В работе получены результаты:

1) Предложен алгоритм прогонки в матричной форме для решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности формулы(8),(10),(12),(14),(15),(16),(18) за конечное число арифметических операций.
2) Показано, что данный алгоритм переходит, как частный случай, в известный алгоритм прогонки в матричной форме (Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.)со вторым порядком погрешности формулы(22)-(29).
3) Примером(19) и программой, написанной на FORTRAN, показано, что алгоритм(8),(10),(12),(14),(15),(16),(18) имеет шестой порядок погрешности для решения уравнения Пуассона на прямоугольнике и выполняется за конечное число элементарных операций.
4) В теореме 1 доказана монотонность матриц с диагональным преобладанием, у которых элементы главной диагонали отрицательны (положительны), а недиагональные положительны (отрицательны).
5) В теореме 2 получена верхняя оценка бесконечной нормы обратной к монотонной матрице.
6) В теореме 3 получены достаточные условия корректности алгоритма(8),(10),(12),(14),(15),(16),(18).
7) Быстродействие приведенного алгоритма в десятки раз превышает быстродействие алгоритма для решения уравнения Пуассона на прямоугольнике методом простой итерации с той же формулой аппроксимации с шестым порядком погрешности и меньшей относительной погрешностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов А.А. Преобразование подобия на множестве полукватернионов / А.А. Козлов, К.С. Суравнева, И.Л.Жалейко // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 115–123.
2. Козлов А.А. Множество полуоктав / А.А. Козлов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 75–85.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы/Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 7-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний,2011.- 636 с.: ил. – (Классический университетский учебник).
4. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: БИНОМ, 2010. – 240 с.
5. Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.

6. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности// Евразийское Научное Объединение. – 2019. № 6-1 (52). С. 4-11.
7. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерностей.- М.:Наука,1973,577 С.
8. Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л. Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам/ Ю.С. Волков, В.Л. Мирошниченко//Сибирский математический журнал. Т.50. – 2009. – №6. – С. 1249 – 1254 .
9. Пикулин В.П. Практический курс по уравнениям математической физики: учеб. пособие / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М.: Наука, 1995. – 224 с.
10. Волосова Н.К. Векторный аналог метода прогонки для решения трех- и пятидиагональных матричных уравнений/ Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 101–115.
11. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра/ В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк //Главная редакция физико-математической литературы ”Наука”. – 1978 . – 304 С.
12. Пастухов Д.Ф. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 60–74.
13. Пастухов Д.Ф. К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи Дирихле для волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 167–186.
14. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры/ С.К. Годунов. – Новосибирск: Научная книга,1997.407 с.
15. Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR-кода в стеганографии/ С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов //Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.
16. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии/ Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова //Мир транспорта. – 2019. Т.17. № 3(82). С. 16-39.
17. Волосова Н.К. Применение преобразования Радона в стеганографии//LXXI Международная конференция “Герценовские чтения”. Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена. – СПб, 2018. – 234-238.
18. Бартеньев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL: Ч.1. – М.:ДИАЛОГ – МИФИ, 2001. – 437 с.
19. Пастухов Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона в параллелепипеде с шестым порядком погрешности/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–174.
20. A. Salih. Streamfunction - Vorticity Formulation//Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach 2013-.

ON FINITE METHODS FOR SOLVING THE POISSON EQUATION ON A RECTANGLE WITH THE DIRIHLET BOUNDARY CONDITIO

N. VOLOSOVA, D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV, K. VOLOSOV, A. VOLOSOVA

The Offered algorithm chain in matrix form with sixth rather inaccuracy for decision of the equation of the Poisson on rectangle for final number arithmetical operation. The Analytical example and program, using given algorithm, is confirmed sixth order to inaccuracy. Monotonicity of the matrixes is proved In theorem 1 with diagonal prevalence, beside which elements main diagonal negative(positive), but not diagonal positive(negative). In theorem 2 are received upper estimation of the endless rate inverse to monotonous matrix. In theorem 3 are received sufficient conditions to correctness of the offered algorithm. It Is Shown that speed given algorithm in groups of ten times greater speeds of the algorithm for decision of the equation of the Poisson on rectangle by method iteration idle time with the same formula of the aproximations to sixth rather inaccuracy and relative inaccuracy of the calculations.

The Keywords: method chain in block form, diagonal matrixes, monotonous matrixes, equations mathematical physicists, numerical methods.