

УДК 624.072

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПАСНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ГУСЕНИЧНОЙ НАГРУЗКИ НАД ТРЕУГОЛЬНОЙ ЛИНИЕЙ ВЛИЯНИЯ

канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ  
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается вопрос об определении опасного положения гусеничной нагрузки над треугольной линией влияния. Установлено, что для симметричной треугольной линии влияния при загрузке ее четным числом гусеничных нагрузок частного вида ( $q_i = \text{const}$ ,  $l_i = \text{const}$ ,  $\lambda_i = \text{const}$ ) существует два опасных положения нагрузки. Получены соотношения, позволяющие определять параметры опасного положения системы гусеничных нагрузок общего вида над треугольной линией влияния произвольного несимметричного очертания. Выявлены случаи, когда опасное положение гусеничной нагрузки является не единственным.

**Введение.** Вопрос определения опасного положения различных видов подвижной нагрузки над треугольной линией влияния имеет практическое значение. Такое очертание имеют линии влияния изгибающих моментов, возникающих в поперечных сечениях однопролетной балки, а также линии влияния продольных сил, возникающих в поясах балочных ферм.

Согласно [1] критерием опасного положения системы равномерно распределенных подвижных нагрузок различной интенсивности с заданными неизменными расстояниями между ними (система гусеничных нагрузок) над любыми однозначными линиями влияния являются

$$\sum_{i=1}^n q_i y_i^{\text{лев}} = \sum_{i=1}^n q_i y_i^{\text{прав}}, \quad (1)$$

где  $n$  – число гусеничных нагрузок;  $q_i$  – интенсивность гусеничной нагрузки номера  $i$ ;  $y_i^{\text{лев}}$ ,  $y_i^{\text{прав}}$  – соответственно ординаты линии влияния над левым и правым концами гусеничной нагрузки номера  $i$ .

Критерий (1) получен из условия, что при прохождении системой гусеничных нагрузок через опасное положение первая производная от рассматриваемой величины  $Z$  по координате  $x$  меняет свой знак:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dx} &> 0; \\ \frac{dZ}{dx} &< 0. \end{aligned} \quad (2)$$

**Основная часть.** Математический критерий опасного положения системы гусеничных нагрузок в форме (1) неудобен для практического применения. Опасное положение находится приближенно перебором различных положений нагрузки и приводит к большому числу попыток.

Для треугольной линии влияния произвольного несимметричного очертания некоторой величины  $Z$  выводится математический критерий опасного положения в форме, позволяющей точно определять такое положение для системы гусеничных нагрузок. Рассматривается случай, когда над линией влияния располагается  $n$  гусеничных нагрузок различной интенсивности  $q_i$  с различными длинами участков приложения  $l_i$  и различными неизменными расстояниями  $\lambda_i$ , между нагрузками (рис. 1).

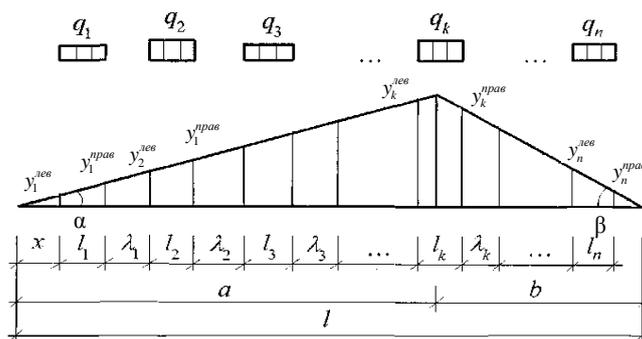


Рис. 1. Схема гусеничных нагрузок

Учитываются случаи, когда часть нагрузки (или нагрузок) выходит за пределы линии влияния. Всегда можно считать, что линия влияния неограниченно простирается влево и вправо от ее действительных границ, но сливается там с осью абсцисс.

Усилие  $Z$  при заданной схеме нагружения линии влияния определяется по формуле:

$$Z = \sum_{i=1}^n q_i \omega_i,$$

которая после преобразований принимает вид:

$$Z = \frac{1}{2} [q_1 l_1 (y_1^{лев} + y_1^{прав}) + \dots + q_k l_k (y_k^{лев} + y_k^{прав}) + \dots + q_n l_n (y_n^{лев} + y_n^{прав})]. \quad (3)$$

Из (3) с учетом соотношений (2) следует, что закон изменения усилия  $Z$  описывается графиком, показанным на рисунке 2.

Продифференцировав (3) по  $x$ , получим

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{2} \left( tg\alpha \sum_{i=1}^k q_i l_i - tg\beta \sum_{i=k+1}^n q_i l_i \right). \quad (4)$$

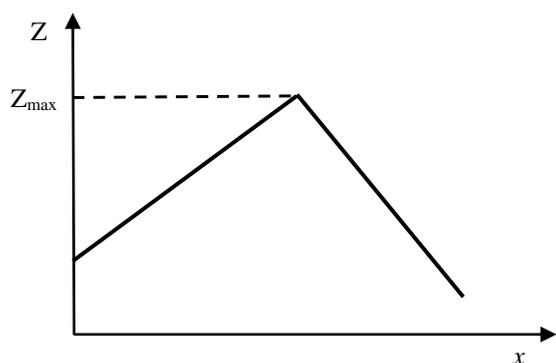


Рис. 2. Первый вариант изменения усилия  $Z$

Из (4) очевидно, что условия (2) выполняются при переходе одной из гусеничных нагрузок через вершину линии влияния. Следовательно, в опасном положении одна из гусеничных нагрузок может располагаться некоторым образом над вершиной линии влияния. По аналогии с задачей об отыскании опасного положения системы движущихся сосредоточенных сил будем называть такую гусеничную нагрузку критической.

Пусть критическая нагрузка имеет номер  $k$ . Для вывода формул, позволяющих находить номер  $k$ , рассмотрим два положения нагрузки. Первое, когда критическая нагрузка располагается над левой ветвью линии влияния, а второе – над правой ветвью. Тогда из (2) с учетом (4) получаются соотношения:

$$kA \cdot tg\alpha - (n-k)B \cdot tg\beta > 0; \quad (5)$$

$$(k-1)C \cdot tg\alpha - (n-k+1)D \cdot tg\beta < 0, \quad (6)$$

где

$$A = \frac{\sum_{i=1}^k q_i l_i}{k}; \quad B = \frac{\sum_{i=k+1}^n q_i l_i}{n-k};$$

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} q_i l_i}{k-1}; \quad D = \frac{\sum_{i=k}^n q_i l_i}{n-k+1};$$

Подставляя в (5) и (6) соотношения

$$tg\alpha = \frac{c}{a}; \quad tg\beta = \frac{c}{b}$$

и решая неравенства относительно  $k$ , получим

$$k > \frac{naB}{aB + bA};$$

$$k > \frac{1 + \frac{aD}{bC}(n+1)}{1 + \frac{aD}{bC}}. \quad (7)$$

Таким образом, гусеничная нагрузка, номер которой удовлетворяет условиям (7), является критической. Заметим, что полученные соотношения (7) позволяют находить номер критической нагрузки, но не позволяют определить точное положение такой нагрузки над вершиной линии и, следовательно, опасное положение всей системы нагрузок.

Числовой характеристикой опасного положения системы гусеничных нагрузок является расстояние от начала координат до первой левой гусеничной нагрузки (см. рис. 1). Из рисунка 1 очевидны следующие соотношения для ординат линии влияния:

- под левыми концами гусеничных нагрузок:

$$y_i^{лев} = \left( x + \sum_{j=1}^{i-1} l_j + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \right) tg\alpha; \quad (i = 1, \dots, k);$$

$$y_i^{лев} = \left( l - \left( x + \sum_{j=1}^{i-1} l_j + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \right) \right) tg\beta; \quad (i = k + 1, \dots, n);$$
(8)

- под правыми концами гусеничных нагрузок:

$$y_i^{прав} = \left( x + \sum_{j=1}^i l_j + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \right) tg\alpha; \quad (i = 1, \dots, k);$$

$$y_i^{прав} = \left( l - \left( x + \sum_{j=1}^i l_j + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \right) \right) tg\beta; \quad (i = k + 1, \dots, n).$$
(9)

Для нахождения величины  $x$  используется условие (1). С учетом расположения критической нагрузки над вершиной линии влияния и соотношений (8), (9) это условие принимает вид:

$$tg\alpha \sum_{i=1}^{k-1} q_i = \left( x + \sum_{j=1}^{i-1} l_j + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \right) + q_k \left( x + \sum_{j=1}^{k-1} l_j + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \right) tg\alpha + tg\beta \sum_{i=k+1}^n q_i \left( l - \left( x + \sum_{j=1}^{i-1} l_j + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \right) \right) =$$

$$tg\alpha \sum_{i=1}^{k-1} q_i = \left( x + \sum_{j=1}^i l_j + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \right) + q_k \left( l - \left( x + \sum_{j=1}^k l_j + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \right) \right) tg\beta + tg\beta \sum_{i=k+1}^n q_i \left( l - \left( x + \sum_{j=1}^i l_j + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \right) \right).$$
(10)

Разрешая (10) относительно  $x$ , получим

$$x = a - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i + \frac{1}{(a+b)q_k} \left( bl_{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} q_i - bl_k \sum_{i=k}^n q_i - q_k \left( al_k + (a+b) \sum_{j=1}^{k-1} l_j \right) \right).$$
(11)

Установлено, что для симметричной треугольной линии влияния при загрузении ее четным числом гусеничных нагрузок частного вида ( $q_i = const$ ,  $l_i = const$ ,  $\lambda_i = const$ ) существует два опасных положения нагрузки. В одном из положений ни одна из гусеничных нагрузок над вершиной линии влияния не располагается. Проверим возможность этого в общем случае.

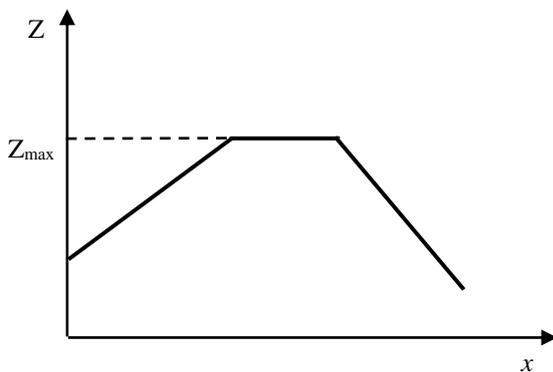


Рис. 3. Второй вариант изменения усилия Z

С учетом соотношений (8), (9) условие (1) принимает вид:

$$tg\alpha \sum_{i=1}^m q_i l_i = tg\beta \sum_{i=m+1}^n q_i l_i,$$
(12)

где  $m$  – число гусеничных нагрузок над левой ветвью линии влияния. Подставляя (12) в (4), получим

$$\frac{dZ}{dx} = 0.$$
(13)

Тогда из (3) с учетом соотношений (2) и (13) следует, что изменение усилия  $Z$  наряду с графиком, изображенным на рисунке 2, может описываться и графиком, представленным на рисунке 3.

Следовательно, для некоторых линий влияния существует участок движения, на котором  $Z$  принимает постоянное наибольшее значение. Параметры таких линий влияния определяются из уравнения (12):

$$\frac{a}{l} = \frac{\sum_{i=1}^m q_i l_i}{\sum_{i=1}^n q_i l_i}.$$
(14)

В частном случае ( $q_i = \text{const}$ ,  $l_i = \text{const}$ ) условие (14) принимает вид:

$$\frac{a}{l} = \frac{m}{n}. \tag{15}$$

На основании (15) построены графики (рис. 4), позволяющие определять параметры этих линий влияния.

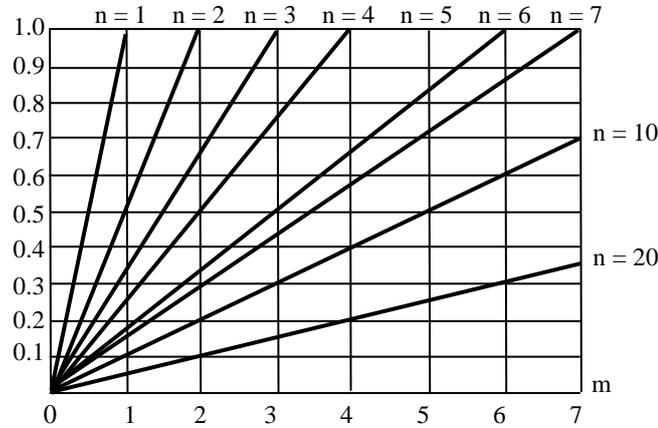


Рис. 4. Параметры линий влияния, имеющих интервал опасных положений

Для линий влияния, удовлетворяющих условиям (14), (15), существует интервал опасных положений и, следовательно, имеются две критические нагрузки. Их номера определяются из следующих соотношений:

$$k \geq \frac{n}{1 + \frac{bA}{aB}}; \tag{16}$$

$$k \leq \frac{1 + \frac{aD}{bC}(n+1)}{1 + \frac{aD}{bC}}.$$

Формулы (16) получены из (7) с учетом (13).

**Заключение.** Полученные формулы (7), (11), (16) позволяют в удобной для практического применения форме находить опасные положения системы гусеничных нагрузок над треугольной линией влияния произвольного несимметричного очертания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович, И.М. Курс строительной механики стержневых систем / И.М. Рабинович. – М.: Госстройиздат, 1954. – 324 с.

Поступила 02.09.2008