УДК 517.9:519.2

ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

д-р техн. наук, доц. С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук Н.А. ГУРЬЕВА
(Полоцкий государственный университет)

Предложена новая идеология поиска и исследования решений уравнений математической физики. Исходя из сути решаемой задачи вводится квазистационарная плотность вероятности некоторой случайной величины, связанной с искомой функцией. Асимптотика дифференциальной функции распределения устанавливается вариационно (из условия экстремальности энтропии). При этом параметры распределения получаются методом моментов с помощью самого уравнения, а также связанных с ним начальных (граничных) условий. В качестве примера рассмотрена диффузия в бесконечной трубке. Показано, как погрешность при замене точного решения его асимптотическим выражением связана с эксцессом функции распределения.

Как правило, уравнения математической физики описывают процессы молекулярной природы, в основе которых лежат так называемые явления переноса (вещества, энергии, импульса и т.п.). Именно по этой причине уравнение теплопроводности в математическом плане ничем не отличается от уравнения диффузии. Ограничившись для простоты одномерным случаем, запишем последнее в виде:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где $n(x,t)$ – объемная концентрация переносимой субстанции (примеси); t – время; x – координата; D – коэффициент диффузии.

Будучи по существу квантовыми объектами, молекулы в результате многочисленных столкновений «забывают» о своих начальных условиях. Это позволяет, соответствующим образом нормировав $n(x,t)$, ввести дифференциальную функцию распределения молекул (частиц) примеси по координатам

$$f(x,t) = \frac{n(x,t)}{N}, \qquad (2)$$

где

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} n(x,t)dx \qquad (3)$$

равно общему числу диффундирующих молекул в трубке, параллельной оси *OX*, с единичной площадью поперечного сечения. Заметим, что размерность $[N] = \text{м}^{-2}$, при этом $[f(x,t)] = \text{м}^{-1}$, как и должно быть.

Введенная вместо $n(x,t)$ новая неизвестная функция $f(x,t)$ вероятностно характеризует положение каждой отдельной молекулы. И только их огромное количество, в соответствии с законом больших чисел, приводит к достоверному прогнозу эволюции $n(x,t)$, что находит свое формальное отражение в справедливости теорем существования и единственности решения (1) при наличии соответствующего начального

$$f(x,0) = g(x), \qquad (4)$$

а в случае необходимости – и граничных условий [1].

Идеология уравнений математической физики никак не учитывает вероятностный смысл $f(x,t)$, что существенно обедняет арсенал методов поиска и исследования решений задачи (1) – (4).

Между тем интерпретация $f(x,t)$ как плотности вероятности позволяет подключить дополнительный мощный ресурс в виде основных теорем теории вероятностей (Ляпунова, Лапласа, Чебышева и др.) и теории информации. В частности, в ряде случаев вид $f(x,t)$ может быть установлен вариационно (из условия экстремальности энтропии [2]), после чего с помощью (1) – (4) останется лишь определить зависимость от времени соответствующих параметров распределения. Покажем, как это делается.

Вначале рассмотрим задачу о расползании однородного концентрационного пятна

$$g(x)=\begin{cases}1/l, & x\in[-l/2,l/2];\\ 0, & x\notin[-l/2,l/2].\end{cases} \tag{5}$$

Зависимость (5) описывает равновесное состояние, ибо максимуму энтропии на отрезке отвечает равномерное распределение случайной величины [2]. Поэтому использование (5) в начальном условии (4) вполне естественно. Далее, в результате диффузионного перемешивания частицы примеси все дальше выходят за пределы отрезка $[-l/2,l/2]$. В результате формируется квазистационарное распределение плотности вероятности $f(x,t)$ на всей числовой оси. Со временем оно эволюционирует в нормальное

$$f(x,t)\approx f_0(x,t)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)}e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}},\quad (t>>l^2/D), \tag{6}$$

обеспечивающее максимум энтропии в новых условиях [2].

Матожидание в (6) равно нулю в силу симметрии задачи. Для получения среднеквадратического отклонения $\sigma(t)$ воспользуемся соотношениями (1), (2):

$$\left(\sigma(t)^2\right)'=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx=D\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}dx.$$

Двукратное интегрирование по частям, с учетом асимптотики (6) и условия нормировки (2), (3) дает

$$\left(\sigma(t)^2\right)'=2D,$$

или

$$\sigma(t)^2=2Dt+l^2/12. \tag{7}$$

Константа интегрирования в (7) найдена с помощью начального условия (4), (5) и определения дисперсии.

Чтобы оценить погрешность приближенного равенства в (6) и убедиться в справедливости фигурирующего там неравенства сосчитаем эксцесс $f(x,t)$:

$$E(t)=\frac{\mu_4(t)}{\sigma(t)^4}-3,$$

где $\mu_4(t)$ – центральный момент 4-го порядка[1]. Действуя, как и при вычислении $\sigma(t)$, получим

$$\mu_4(t)'=D\int_{-\infty}^{\infty}x^4\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}dx=12D\sigma(t)^2.$$

Отсюда, с учетом (7)

$$\mu_4(t)=12D^2t^2+Dl^2t+l^4/80, \tag{8}$$

где

$$l^4/80=\mu_4(0)=\frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2}x^4dx$$

есть константа интегрирования (см. (4), (5)).

---

[1] В данном случае он совпадает с начальным, так как математическое ожидание рано нулю.

Подставив (7) и (8) в выражение для $E(t)$, найдем

$$E(t) = -\frac{l^4}{120\sigma(t)^4} = O\left(\eta(0,t)\right), \tag{9}$$

где $|\eta(x,t)|$ – относительная погрешность, вносимая при замене $f(x,t)$ нормальным законом (6), и использована о-символика с малым параметром l^2/Dt.

Видно (см. (7)), что $E(t)$ тем меньше, чем сильнее фигурирующее в (6) неравенство. Если $l=0$, распределение становится нормальным сразу:

$$n(x,t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \equiv \varphi(x,t)N . \tag{10}$$

Чтобы N при этом отличалось от нуля, $n(x,0)$ в соответствии с (3), (5) должна обращаться в бесконечность при $x=0$, что согласуется с одним из представлений для δ-функции Дирака [3].

$$n(x,0) = \lim_{t\to 0} n(x,t) = \delta(x)N . \tag{11}$$

Используем (10) для решения (1) – (4) в общем виде (не конкретизируя $g(x)$). Рассмотрим участок $[l, l+dl]$ на числовой оси. В начальный момент ему (внутри упомянутой трубки) принадлежит

$$dN(l) = n(l,0)dl$$

молекул примеси. Заменив в (10) N на dN и x на $x-l$, запишем под знаком интеграла вклад в $n(x,t)$ рассматриваемого участка[2]

$$n(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(l,0)}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-l)^2}{4Dt}} dl \tag{12}$$

Решение (12) с точностью до замены $\xi = l - x$ совпадает с полученным в [1] методом Фурье. Формально такая замена ничего не меняет, но вуалирует теоретико-вероятностный смысл подынтегрального выражения.

В том, что (12) обращает (1) в тождество, можно убедиться и непосредственно, выполнив дифференцирование абсолютно сходящегося интеграла по параметрам x и t. Что касается начального условия, то с учетом (10), (11) из (12) очевидно следует

$$n(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} n(l,0)\delta(x-l)\,dl \equiv n(x,0) .$$

Вернемся теперь к начальному условию (5). С учетом (2), (4) из (12) следует

$$n(x,t) = \frac{N}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-l)^2}{4Dt}} dl = \frac{N}{l}\left[\Phi(x+l/2,t) - \Phi(x-l/2,t)\right], \tag{13}$$

где

$$\Phi(x,t) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x,t)\,dx$$

есть интегральная функция распределения, отвечающая нормальному закону (10).

---

[2] Интегрирование выполнено с учетом линейности (1).

Осуществив в (13) разложение по степеням $l/2$, получим

$$\frac{n(x,t)}{N}=f(x,t)=\varphi(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(l/2)^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\partial^{2n}\varphi(x,t)}{\partial x^{2n}}. \tag{14}$$

Видно, что при $l=0$ возвращаемся к (10), как это и должно быть. В противном случае в качестве нулевого приближения в (14) следует использовать функцию $f_0(x,t)$, определяемую равенствами (6), (7). Поправка $\Delta(x,t)=\left(f(x,t)-f_0(x,t)\right)l$ в силу симметрии задачи – четная функция x, т.е. экстремальная при $x=0$ (рис. 1). Видно, что экстремум абсолютный, т.е. значение $\Delta(x,t)$ в данной точке может быть использовано для оценки погрешности (6).

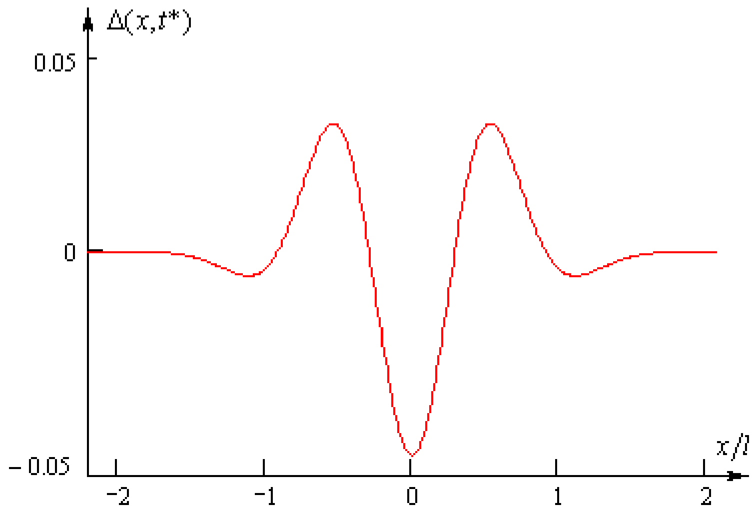

Рис. 1. Отклонение плотности вероятности
от ее асимптотического выражения в момент времени t^* (см. (19))

Вычислив несколько фигурирующих в (14) производных и положив $x=0$, найдем

$$f(0,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\left[1+\frac{(l/2)^2}{3!}\left(-\frac{1}{2Dt}\right)+\frac{(l/2)^4}{5!}\frac{3}{(2Dt)^2}-...\right]. \tag{15}$$

Чтобы сравнить $f_0(0,t)$ с правой частью (15), подставим (7) в (6), положим $x=0$ и выполним разложение по степеням l:

$$f_0(0,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(2Dt+l^2/12)}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{l^2}{24Dt}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{l^2}{24Dt}\right)^2-...\right]. \tag{16}$$

И, наконец, вычтя нулевое приближение (16) из точного выражения (15), получим, пренебрегая высшими порядками по l^2/Dt

$$\eta(0,t)=\frac{f(0,t)-f_0(0,t)}{f(0,t)}\approx-\frac{1}{960}\left(\frac{l^2}{2Dt}\right)^2. \tag{17}$$

Последний результат согласуется с полученным ранее вероятностными методами (см. (9), (7)). Из (9), (7), (17) следует числовое значение коэффициента пропорциональности

$$\eta(0,t)\approx\frac{1}{8}E(t), \qquad t>>\frac{l^2}{D}. \tag{18}$$

Согласно (17) большими могут считаться времена

$$t \geq \frac{l^2}{20D} \equiv t^*, \tag{19}$$

что обеспечивает малость $\eta(0,t)$ при замене $f(x,t)$ нормальным законом (6), (7).

Рисунок 2 иллюстрирует, как равномерное распределение на отрезке, по мере осуществления (19), трансформируется в нормальное на всей числовой оси. Интересно, что моменту t^* отвечает примерно двукратное увеличение дисперсии (см. (7)).

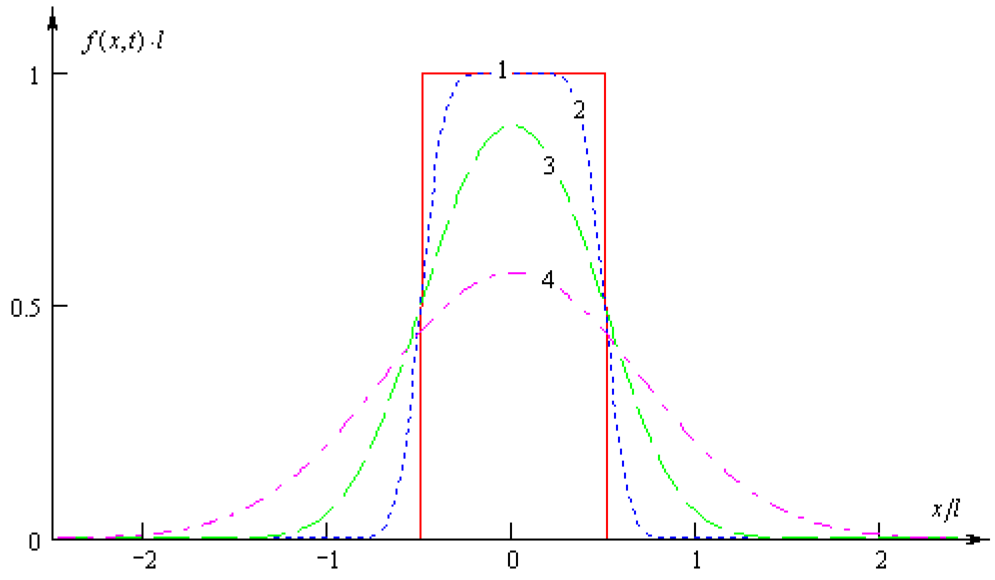

Рис. 2 Диффузионное «расползание» однородного концентрационного пятна:
1 – t = 0; 2 – t = 0,1t^*; 3 – t = t^*; 4 – t = 4t^*

Заключение. В работе предложена новая идеология поиска и исследования решений уравнений математической физики. Исходя из сути решаемой задачи неизвестная функция заменяется плотностью вероятности некоторой случайной величины. Параметры ее распределения получаются методом моментов с помощью самого уравнения, а также связанных с ним начальных (граничных) условий. В качестве примера рассмотрена диффузия в бесконечной трубке. Показано, что погрешность при замене точного решения его асимптотическим выражением пропорциональна эксцессу функции распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров, Я.С. Высшая математика / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
2. Ехилевский, С.Г. Динамика сорбции активированными углями и закон возрастания энтропии / С.Г. Ехилевский // Вестн. Полоц. гос ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2006. – № 10. – С. 174 – 180.
3. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979.

Поступила 12.05.2008