УДК 519.854

ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ НА СЕТИ С НЕСКОЛЬКИМИ ИСТОЧНИКАМИ И СТОКАМИ

канд. физ.-мат. наук О.В. ГОЛУБЕВА, Д.С. БОГДАНОВ
(Полоцкий государственный университет)

Приводится точный, полный алгоритм решения прикладной задачи о формировании максимального потока на сети с несколькими источниками и стоками, основанный на доказательстве теоремы Форда – Фалкерсона. На первом этапе предложенной процедуры осуществляется расширение сети за счет виртуальных дополнительных вершин – субисточника и гиперстока; на втором формируется насыщенный поток; на третьем осуществляется перераспределение потока с учетом незадействованных пропускных способностей дуг, не включенных в насыщенные потоки.

На примере конкретной сети с большим количеством вершин аналитически и графически проиллюстрирована эффективность предложенного алгоритма. Актуальность данной тематики обусловлена широким практическим применением теории сетей при проектировании нефте- и газопроводов, линий электропередач, железных и шоссейных дорог, компьютерных сетей, телекоммуникаций и пр.

Введение. Обычно задачу о максимальном потоке рассматривают на сети с одним источником и одним стоком. Подробный алгоритм решения этой задачи, основанный на доказательстве теоремы Форда – Фалкерсона, приведен в работе [1]. Не менее актуальна задача об определении максимального потока на сети с несколькими источниками и стоками.

Приведем основные определения, теоремы и требования к задаче.

Сетью называется связный ориентированный граф без петель, каждой дуге которого поставлено в соответствие некоторое число – пропускная способность дуги $c(A;B)$.

Вершины $I_1, \ldots, I_l$, из которых дуги только выходят, называются источниками. Вершины $T_{l+1}, \ldots, T_m$, которые имеют входящие и исходящие дуги, называются транзитными. Вершины $S_{m+1}, \ldots, S_n$, в которые дуги только входят, называются стоками.

Разрез – множество дуг сети, удаление которых блокирует все пути от источников к стокам. Разрез с наименьшей пропускной способностью называется минимальным.

На сети формулируют задачу о максимальном потоке, в результате решения которой находят максимальную пропускную способность сети $F_{\max}$.

При решении задачи естественно считать, что:

- поток, выходящий из источников, должен быть равным потоку, входящему в стоки;
- поток, входящий в транзитную вершину, должен быть равным потоку, выходящему из нее;
- максимальный поток на пути от источников к стокам определяется той дугой, которая имеет наименьшую пропускную способность из всех дуг, принадлежащих этому пути.

В качестве алгоритма решения используем доказательство теоремы Форда – Фалкерсона: максимальная пропускная способность сети $F_{\max}$ равна пропускной способности минимального разреза $C_{\min}$.

Алгоритм решения задачи о максимальном потоке на сети с одним источником и одним стоком состоит из двух этапов [1]:

- насыщение потока;
- перераспределение потока.

Результаты исследования и их обсуждение. Применить названный алгоритм к сети с несколькими источниками и стоками непосредственно невозможно. Вначале сведем такую сеть к сети с одним источником и одним стоком. Для этого добавим к множеству имеющихся вершин две фиктивные – субисточник I_0 и гиперсток S_{n+1}.

Из субисточника I_0 выпустим по одной фиктивной дуге, соединяющей его с каждым фактическим истоком $I_1, \ldots, I_l$. Пропускная способность каждой такой фиктивной дуги должна быть равной сумме пропускных способностей фактических дуг, исходящих из соответствующего источника. Аналогично поступаем в случае гиперстока S_{n+1}. Из каждого фактического стока $S_{m+1}, \ldots, S_n$ выпустим одну фиктивную дугу, входящую в гиперсток. Ее пропускная способность должна быть равной сумме пропускных способностей фактических дуг, входящих в соответствующий сток. Такое формальное расширение сети не изменяет величину пропускаемого по ней потока, так как эту величину по-прежнему определяют пропускные способности ее исходных дуг.

Таким образом, задача о максимальном потоке на сети с несколькими источниками и стоками сводится к аналогичной задаче для сети с одним источником и одним стоком.

Рассмотрим практический пример, иллюстрирующий предложенную схему решения подобных задач.

Места добычи нефти расположены в трех географических пунктах. Из мест добычи нефть транспортируется на четыре нефтеперерабатывающих завода через пять транзитных пунктов. Совокупность пунктов с соединяющими их трубопроводами изображена на рисунке 1.

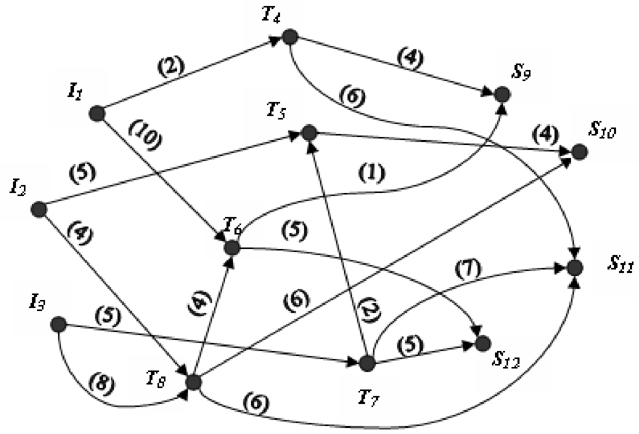

Рис. 1. Совокупность пунктов с соединяющими их трубопроводами

Дуги соответствуют трубопроводам, вершины – отдельным пунктам (местам добычи – I_1, I_2, I_3, станциям перекачки – T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, заводам – S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}). Пропускные способности трубопроводов приписаны дугам сети числами в круглых скобках.

Требуется определить, какое максимальное количество нефти в единицу времени можно транспортировать из мест добычи на нефтеперерабатывающие заводы.

Решим эту задачу в три этапа:

- первый – расширение сети;
- второй – создание насыщенного потока;
- третий – исследование полученного насыщенного потока на максимальность, определение минимального разреза и его пропускной способности, а следовательно и величины максимального потока.

Первый этап. Вводим фиктивную вершину – субисточник I_0. Соединяем I_0 с источником I_1 фиктивной дугой $(I_0;I_1)$ с пропускной способностью

$$c(I_0;I_1)=c(I_1;T_4)+c(I_1;T_6)=2+10=12\,.$$

Далее соединим I_0 с источником I_2 фиктивной дугой $(I_0;I_2)$ с пропускной способностью

$$c(I_0;I_2)=c(I_2;T_5)+c(I_2;T_8)=5+4=9\,.$$

Аналогично получаем фиктивную дугу $(I_0;I_3)$ с пропускной способностью

$$c(I_0;I_3)=c(I_3;T_7)+c(I_3;T_8)=5+8=13\,.$$

Фиктивные дуги на сети обозначим пунктиром (рис. 2). Вводим еще одну фиктивную вершину – гиперсток S_{13}. Фиктивная дуга $(S_9;S_{13})$ имеет пропускную способность

$$c(S_9;S_{13})=c(T_4;S_9)+c(T_6;S_9)=4+1=5\,.$$

Пропускная способность фиктивной дуги $(S_{10};S_{13})$ равна

$$c(S_{10};S_{13})=c(T_5;S_{10})+c(T_8;S_{10})=4+6=10\,.$$

Аналогично,

$$c(S_{11};S_{13})=c(T_4;S_{11})+c(T_7;S_{11})+c(T_8;S_{11})=6+7+6=19\,,$$

$$c(S_{12};S_{13})=c(T_6;S_{12})+c(T_7;S_{12})=5+5=10\,.$$

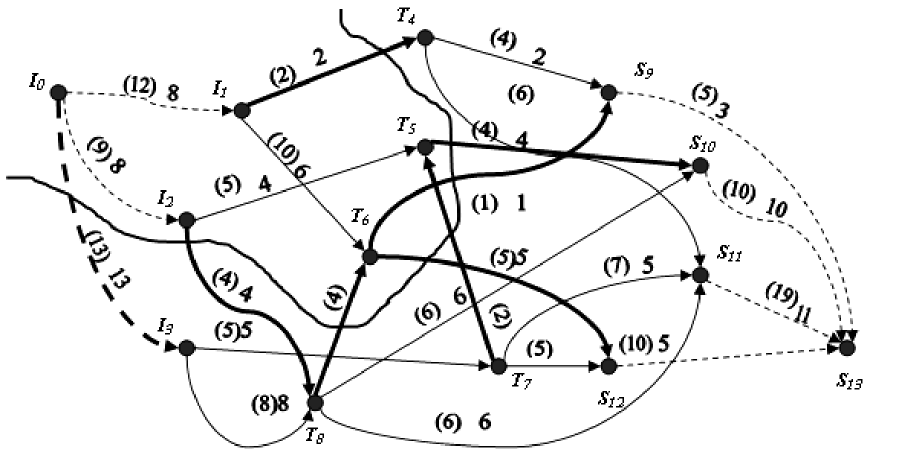

Рис. 2. Сеть с обозначенными пунктиром фиктивными дугами

Второй этап[1]. Формируем начальный поток:

- по пути $I_0 \to I_1 \to T_4 \to S_9 \to S_{13}$ пропускаем поток, равный $\min\{12;\ 2;\ 4;\ 5\} = 2$ единицам;
- по пути $I_0 \to I_1 \to T_6 \to S_9 \to S_{13}$ пропускаем поток, равный $\min\{12-2; 10; 1; 5-2\} = 1$ единице;
- по пути $I_0 \to I_1 \to T_6 \to S_{12} \to S_{13}$ пройдет поток, равный $\min\{12-2-1; 10-1; 5; 10\} = 5$ единицам;
- по пути $I_0 \to I_2 \to T_5 \to S_{10} \to S_{13}$ пустим поток, равный $\min\{9; 5; 4; 10\} = 4$ единицам;
- по пути $I_0 \to I_2 \to T_8 \to S_{10} \to S_{13}$ – поток, равный $\min\{9-4; 4; 6; 10-4\} = 4$ единицам;
- по пути $I_0 \to I_3 \to T_7 \to S_{11} \to S_{13}$ – поток, равный $\min\{13; 5; 7; 19\} = 5$ единицам;
- по пути $I_0 \to I_3 \to T_8 \to S_{10} \to S_{13}$ – поток, равный $\min\{13-5; 8; 6-4; 10-4-4\} = 2$ единицам;
- по пути $I_0 \to I_3 \to T_8 \to S_{11} \to S_{13}$ – поток, равный $\min\{13-5-2; 8-2; 6; 19-5\} = 6$ единицам.

Сформированный поток – насыщенный (на рисунке 2 – числа без скобок), так как каждый путь содержит насыщенную дугу.

Третий этап. Чтобы выяснить, является ли насыщенный поток максимальным, изобразим сеть, на которой отметим все вершины и ненасыщенные дуги (рис. 3). На этой сети разность пропускной способности дуги и проходящего по ней потока обозначим числом в квадратных скобках.

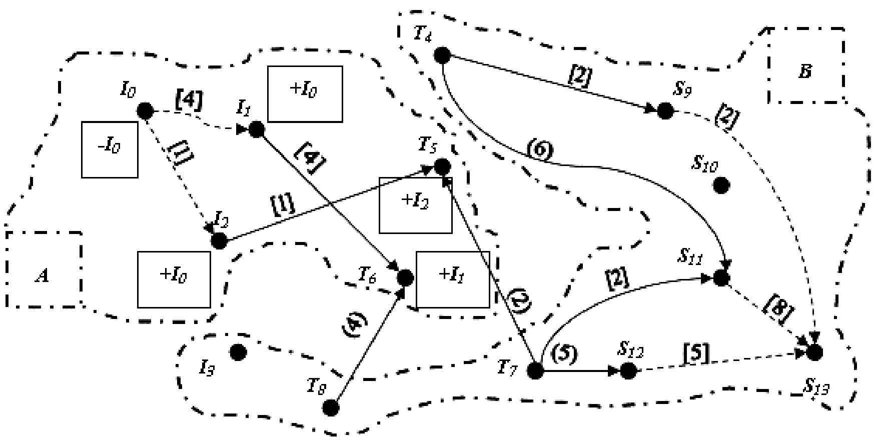

Рис. 3. Сеть со всеми отмеченными вершинами и ненасыщенными дугами

Видим, что вершины I_0 и S_{13} связаны дугами. Выясним, можно ли перераспределить поток и этим его увеличить. Пометим вершины. Вершину I_0 пометим $-I_0$. Смежную ей вершину I_1 пометим $+I_0$, так как эти вершины соединяет ненасыщенная дуга $I_0 \to I_1$. Вершину T_6 помечаем $+I_1$, так как эти вершины

[1] Второй и третий этапы осуществляем в соответствии с алгоритмом, подробно изложенным в [1].

соединяет ненасыщенная дуга $I_1 \to T_6$. Пометка вершины T_8 невозможна, так как дуга $T_6 \leftarrow T_8$, имеющая направление, обратное потоку, пустая. Вершину I_2 помечаем $+I_0$, так как эти вершины соединяет ненасыщенная дуга $I_0 \to I_2$, вершину T_5 помечаем $+I_2$, так как дуга $I_2 \to T_5$ – ненасыщенная. Дальнейшая пометка вершин невозможна, так как дуга $T_5 \leftarrow T_7$, входящая в вершину T_5, пустая.

Вершина S_{13} оказалась непомеченной, поэтому поток на рисунке 2 – максимальный. Найдем его величину $F_{\max}$. Для этого нужно вычислить пропускную способность минимального разреза данной сети $C_{\min}$. Сначала определим дуги, образующие минимальный разрез сети.

Все имеющееся вершины, включая фиктивные, разобьем на два непересекающихся множества:

1) помеченные вершины $A = \{I_0; I_1; I_2; T_5; T_6\}$;

2) непомеченные вершины $B = \{I_3; T_4; T_5; T_7; T_8; S_9; S_{10}; S_{11}; S_{12}; S_{13}\}$ (см. рис. 3).

Минимальный разрез образуют дуги, исходящие из вершин множества A и входящие в вершины множества *B*, а также дуги, исходящие из вершин множества *B* и входящие в вершины множества *A*: $\{(I_0; I_3), (I_1; T_4), (I_2; T_8), (T_5; S_{10}), (T_6; S_9), (T_6; S_{12}), (T_7; T_5), (T_8; T_6)\}$ (на рисунке 2 эти дуги выделены жирными линиями, минимальный разрез обозначен жирной кривой).

Минимальный разрез найден для расширенной сети, в него попала фиктивная дуга $(I_0; I_3)$. Поэтому при вычислении величины максимального потока $F_{\max}$ по исходной сети учитывать поток по дуге $(I_0; I_3)$ не нужно. Также в минимальный разрез попали две дуги с началом в вершинах множества *B* и концом в вершинах множества A: $(T_8; T_6)$, $(T_7; T_5)$. В общем случае при вычислении пропускной способности минимального разреза $C_{\min}$ величина потока, проходящего по таким дугам, берется со знаком «минус». В нашем случае $c(T_8; T_6) = c(T_7; T_5) = 0$.

С учетом вышесказанного имеем:

$$F_{\max} = C_{\min} = 2 + 4 + 4 + 1 + 5 = 16 \text{ (единиц).}$$

Заключение. Рассмотрено формирование максимального потока на сети с несколькими источниками и несколькими стоками в три этапа:

- сведение данной сети к сети с одним источником и одним стоком;
- насыщение потока;
- последующее перераспределение потока.

Задача решена без перебора всех насыщенных путей, что дает возможность применять предложенный алгоритм к сетям с большим количеством вершин, и делает сложность алгоритма степенной, а не показательной. Графическое сопровождение решения позволяет увидеть возможное наличие нескольких минимальных разрезов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубева, О.В. Задача о максимальном потоке на сети / О.В. Голубева, И.П. Кунцевич, М.И. Ефремова // Весн. МДПУ ім. І.П. Шамякіна. Сер. Фізіка-матэматыка. – 2008. – № 1(18). – С. 3 – 9.

Поступила 07.07.2008