УДК 512.542

ПРИВОДИМЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ФОРМАЦИИ Н-ДЕФЕКТА 2

канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. АНИСЬКОВ
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений называется формацией. Формация называется локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран. Формация называется 2-кратно локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран, все непустые значения которого являются локальными формациями. Пусть H *– непустой класс групп,* Φ *– некоторая локальная формация. Если решетка локальных формаций, заключенных между* Φ *и* $\Phi \cap \mathrm{H}$ *имеет конечную длину* n*, то число* n *называют* Н*-дефектом формации* Φ*. Когда* Н*-дефект достаточно мал, то он позволяет изучать свойства формации* Φ*. В данной работе описываются локальные формации, порождаемые объединением своих собственных локальных подформаций, которые имеют* Н*-дефект 2 в случае, если* H *– произвольная 2-кратно локальная формация. Полученные результаты могут быть использованы при полном описании локальных формаций, имеющих* Н*-дефект 2 для большинства известных классов групп* H.

Введение. Будем рассматривать только конечные группы. Все используемые определения и обозначения стандартны и при необходимости их можно найти в [1, 2]. Определим только некоторые понятия, которые для данной работы являются главными.

Класс групп Φ называется *формацией*, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и всегда из $G/N_1 \in \Phi$ и $G/N_2 \in \Phi$, где $N_1 \cap N_2 = 1$, следует, что $G \in \Phi$.

Локальным экраном называется такое отображение f класса Γ всех групп во множество всех формаций групп, что выполняются следующие условия:

1) $f(1) = \Gamma$;
2) $f(A) = f(B)$ для любого простого p и любых неединичных p-групп A и B;
3) $f(G) = \bigcap_{p\in\pi(G)} f(p)$ для любой неединичной группы G.

Главный фактор H/K группы G называется *f-центральным*, если $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(H/K)$.

Локальный экран *f* называется *локальным экраном формации* Φ, если Φ – класс всех групп с *f*-центральными главными факторами. Формация, обладающая хотя бы одним локальным экраном, называется *локальной*.

Понятие локального экрана оказывается весьма эффективным в вопросах конструирования и классификации локальных формаций. Прежде всего, локальные экраны позволяют конструировать локальные формации с заданными свойствами. Другим важным качеством является то обстоятельство, что локальные экраны позволяют изучать свойства локальных формаций.

Локальная формация называется *2-кратно локальной*, если она обладает таким локальным экраном, все непустые значения которого – локальные формации. Многие известные локальные формации являются 2-кратно локальными.

Если локальная формация Φ не входит в класс Н, а все ее собственные локальные подформации в классе H содержатся, то Φ называется *минимальной локальной не* Н*-формацией*.

Проблема изучения минимальных локальных не Н-формаций была поставлена Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп в 1978 году. Теория минимальных локальных не Н-формаций разрабатывалась А.Н. Скибой. Им были описаны минимальные локальные не Н-формации для почти всех известных классов групп. При дальнейшей разработке формационно-критических методов, в работе [3] им было введено понятие H-дефекта локальной формации. Если решетка локальных формаций, заключенных между Φ и $\Phi \cap \mathrm{H}$ имеет конечную длину *n*, то число *n* называют Н-*дефектом* формации Φ.

Локальная формация называется *приводимой,* если она может быть представлена в виде объединения своих собственных локальных подформаций в решетке локальных формаций. Если же такое объединение невозможно, то формация называется *неприводимой*.

Через *form*X обозначают формацию, порожденную некоторым множеством X, а через *lform*X обозначают локальную формацию, порожденную X. При этом удобно пользоваться обозначением $\Phi \vee_l \mathrm{M} = lform\{\Phi \cup \mathrm{M}\}$.

Пусть Н – некоторый непустой класс групп. Группу G будем называть Н-*группой*, если $G \in \mathrm{H}$ и не Н-*группой* в противном случае. Аналогично, если некоторая формация (подформация) Ф входит в некоторый непустой класс групп Н, то будем называть ее Н-*формацией* (Н-*подформацией*) и *не* Н-*формацией* (*не* Н-*подформацией*) в противном случае.

Минимальные локальные не Н-формации являются локальными формациями Н-дефекта 1. Однако не всякая локальная формация Н-дефекта 1 является минимальной локальной не Н-формацией. Представление о соотношении между этими типами локальных формаций дают следующая лемма и следствие из нее.

ЛЕММА 1. Всякая минимальная локальная не Н-формация является неприводимой.

СЛЕДСТВИЕ. Формация является минимальной локальной не Н-формацией тогда и только тогда, когда она является неприводимой локальной формацией с Н-дефектом 1.

Таким образом, неприводимая локальная формация H-дефекта n не может содержать максимальных локальных подформаций с таким же дефектом. Если же локальная формация H-дефекта n является приводимой, то она может и содержать в качестве максимальных локальные подформации с таким же дефектом.

Приводимые локальные формации с H-дефектом 1 и 2 в случае, если H – формация всех нильпотентных групп и разрешимая формация всех p-разложимых групп были описаны А.Н. Скибой в работах [3] и [4] соответственно. В дальнейшем было замечено, что некоторые свойства локальных формаций с H-дефектом 1 являются общими для некоторых классов H [5]. Эти наблюдения окончательно оформились в [6], усиление основного результата которой и является целью настоящей работы.

Используемые результаты. Сформулируем предварительно некоторые известные результаты, которые понадобятся нам для доказательства.

Пусть Ф и Н – локальные формации, $\mathrm{H} \subseteq \Phi$. Тогда, если найдутся такие локальные формации $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n$, что $\mathrm{H} = \Phi_n$, формация Φ_1 является максимальной локальной подформацией формации Φ, а формация Φ_i является максимальной локальной подформацией формации Φ_{i-1} $(i = 2, 3, \dots, n)$, то согласно [2] будем писать $|\Phi : \mathrm{H}|_l = n$. Если же $\mathrm{H} = \Phi$, то положим $|\Phi : \mathrm{H}|_l = 0$.

ЛЕММА 2 [2]. Пусть Φ и H – локальные формации. Тогда, если n – H-дефект формации Φ, то $n = |\Phi : \Phi \cap \mathrm{H}|_l$.

ЛЕММА 3 [2]. Пусть М, Ф, Н – локальные формации, причем $\mathrm{M} \subseteq \Phi$. Тогда, если m и n – H-дефекты формаций М и Н соответственно, то $m \le n$.

ЛЕММА 4 [2]. Пусть М, Ф, Х, Н – локальные формации, причем $\Phi = \mathrm{M} \vee_l \mathrm{X}$. Тогда, если m, r, t – H-дефекты формаций $\mathrm{M}, \mathrm{X}, \Phi$ соответственно, то $t \le m + r$.

ЛЕММА 5 [6]. Пусть H – некоторая 2-кратно локальная формация и пусть $\Phi = \mathrm{M} \vee_l \mathrm{H}_1$, где H_1 – минимальная локальная не H-формация, а M – некоторая локальная подформация формации H. Тогда в формации Φ не существует минимальных локальных не H-подформаций, отличных от H_1.

ТЕОРЕМА 1 [6]. Тогда и только тогда H-дефект локальной формации Φ равен 1, когда $\Phi = \mathrm{M} \vee_l \mathrm{H}_1$, где M – некоторая локальная подформация формации H, а H_1 – минимальная локальная не H-формация. Причем выполняются следующие условия:

1) всякая локальная, не входящая в H подформация Φ_1 формации Φ имеет вид $\mathrm{H}_1 \vee_l (\Phi_1 \cap \mathrm{H})$;

2) всякая локальная, входящая в H подформация формации Φ входит в формацию $\mathrm{M} \vee_l (\mathrm{H} \cap \mathrm{H}_1)$.

ТЕОРЕМА 2 [7]. Пусть Φ – некоторая локальная формация, а H – некоторая 2-кратно локальная формация. Если Φ не содержится целиком в H, то в Φ существует хотя бы одна минимальная локальная не H-формация.

Основная часть

ТЕОРЕМА 3. Пусть H – некоторая 2-кратно локальная формация. Пусть всякая неразрешимая H-группа локальной формации Φ порождает локальную формацию конечной длины. Тогда и только тогда Φ – приводимая локальная формация с H-дефектом 2, когда выполняется одно из следующих условий:

1) $\Phi = \mathrm{M} \vee_l \mathrm{H}_1 \vee_l \mathrm{H}_2$, где M – некоторая локальная H-формация, а H_1 и H_2 – различные минимальные локальные не H-формации;

2) $\Phi = \mathrm{M} \vee_l \mathrm{H}_1$, где M – некоторая локальная H-формация, а H_1 – неприводимая локальная формация H-дефекта 2.

Доказательство. Необходимость. Ввиду леммы 2 в формации Φ существует такая максимальная локальная подформация Φ_1, что H-дефект формации Φ_1 равен 1. Поэтому, согласно теореме 1,

$\Phi = \mathrm{M} \vee_l \mathrm{H}_1$, где M – некоторая локальная подформация формации H, а H_1 – минимальная локальная не H-подформация формации Φ. Предположим, что в формации Φ существует минимальная локальная не H-подформация H_2 такая, что $\mathrm{H}_1 \neq \mathrm{H}_2$. Ввиду леммы 5, $\mathrm{H}_2 \not\subset \Phi_1$. Следовательно, поскольку формация Φ является по условию приводимой и Φ_1 – ее максимальная локальная подформация, то $\Phi = \mathrm{M} \vee_l \mathrm{H}_1 \vee_l \mathrm{H}_2$ и формация Φ удовлетворяет условию 1) теоремы.

Пусть теперь в формации Φ не существует минимальных локальных не H-подформаций, отличных от формации H_1. Пусть G – некоторая группа из $\Phi \setminus \Phi_1$. Поскольку формация Φ приводима и Φ_1 – ее максимальная подформация, то $\Phi = (lformG) \vee_l \Phi_1$. Понятно, что $lformG \not\subset \mathrm{H}$. Следовательно, по теореме 2, в $lformG$ найдется по крайней мере одна минимальная локальная не H-формация. Но мы рассматриваем случай, когда такая формация одна и это формация H_1. Поэтому $\mathrm{H}_1 \subseteq lformG$ и $\Phi = (lformG) \vee_l \mathrm{M}$. По леммам 3 и 4, H-дефект формации $lformG$ равен 2. Предположим, что формация $lformG$ неприводима. В этом случае формация Φ удовлетворяет условию 2) и теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда формация $lformG$ приводима. Тогда, по лемме 2, у нее существует такая максимальная локальная подформация Φ_2, что ее H -дефект равен 1. Снова воспользовавшись теоремой 1, получим, что $\Phi_2 = \mathrm{H}_1 \vee_l \mathrm{M}_1$, где M_1 – некоторая локальная, входящая в H подформация формации Φ_2. Пусть G_1 – некоторая группа из $(lformG) \setminus \Phi_2$. Поскольку $lformG$ – приводимая локальная формация и Φ_1 – ее максимальная локальная подформация, то $lformG_1 = lformG$. Следовательно, $\Phi = (lformG_1) \vee_l \mathrm{M}_1$ и ввиду леммы 2, формация $lformG_1$ имеет H-дефект 2. Если формация $lformG_1$ является неприводимой, то формация Φ удовлетворяет условию 2) теоремы. Если же формация $lformG_1$ приводима, то, рассуждая аналогично, найдем группу G_2 и т.д. Если на каком-либо этапе мы получим локальную формацию $lformG_i$, которая является неприводимой, то докажем тем самым, что формация Φ удовлетворяет условию 2) теоремы. Предположим, что нам не удалось найти указанную группу. Тогда у нас получится цепь приводимых локальных формаций с H-дефектом 2:

$$lformG_1 \supset lformG_2 \supset lformG_3 \supset \ldots . \tag{1}$$

Согласно [8], формация, порожденная разрешимой группой, содержит лишь конечное число подформаций. Учитывая это и условие теоремы, в любом случае получаем, что конечна цепь

$$\mathrm{M}_1 \supset \mathrm{M}_2 \supset \ldots \supset \mathrm{M}_t = \mathrm{M}_1 \cap \mathrm{H}_1 \supset \mathrm{M}_{t+1} \supset \ldots \supset \mathrm{M}_n = \mathrm{E},$$

где для любого $i \in \{2,3,\ldots,n\}$, формация M_i является максимальной локальной подформацией формации M_{i-1}. Следовательно, воспользовавшись решеточным изоморфизмом $(\mathrm{M}_1 \vee_l \mathrm{H}_1)/_l\, \mathrm{H}_1 \approx \mathrm{M}_1 /_l (\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{H}_1)$, получаем так же конечность цепи

$$\Phi_2 = \mathrm{M}_1 \vee_l \mathrm{H}_1 \supset \Phi_3 \supset \ldots \supset \Phi_s = \mathrm{H}_1, \tag{2}$$

где для любого $i \in \{3,4,\ldots,\}$ формация Φ_i является максимальной локальной подформацией формации Φ_{i-1}.

Поскольку H_1 – единственная минимальная локальная не H-подформация формации Φ, то всякая локальная формация из цепи (1) содержит H_1. Кроме того, Φ_2 – максимальная локальная подформация формации $lformG$. Следовательно, поскольку конечна цепь (2), то ввиду модулярности решетки локальных формаций, найдется такое натуральное число m, что формация H_1 является максимальной локальной подформацией формации $lformG_m$. Очевидно, что в формации $lformG_m$ не существует максимальных локальных подформаций с H-дефектом 2.

Предположим, что в формации $lformG_m$ содержатся максимальные локальные подформации, отличные от H_1. Пусть $\{\mathrm{H}_i \mid i \in I\}$ – множество всех максимальных локальных подформаций формации $lformG_m$. Ввиду замеченного выше, все они имеют H-дефект 1. По теореме 1, для любого $i \in I$ всякая формация H_i имеет вид $\mathrm{M}_i \vee_l \mathrm{H}_1$, где M_i – некоторые локальные, входящие в H подформации формаций H_i. Ввиду предположения, локальная формация $lformG_m$ приводима. Следовательно,

$$lformG_m = lform\{\textstyle\bigcup_{i\in I}(\mathrm{M}_i \vee_l \mathrm{H}_1)\} = lform\{\textstyle\bigcup_{i\in I}(lform(\mathrm{M}_i \cup \mathrm{H}_1))\} =$$

$$lform\{\textstyle\bigcup_{i\in I}(\mathrm{M}_i \cup \mathrm{H}_1)\} = lform\{(\textstyle\bigcup_{i\in I}\mathrm{M}_i) \cup \mathrm{H}_1\} = (lform(\textstyle\bigcup_{i\in I}\mathrm{M}_i)) \vee_l \mathrm{H}_1 = \bar{\mathrm{M}} \vee_l \mathrm{H}_1.$$

Поскольку при этом очевидно, что $\bar{M}$ – некоторая локальная, входящая в H подформация формации $lformG_m$, то H-дефект формации $lformG_m$ равен 1. Приходим к противоречию с нашим предположением о том, что H_1 – единственная максимальная локальная подформация формации $lformG_m$. Поэтому формация $lformG_m$ неприводима. Следовательно, в полученной выше цепи (1) обязательно найдется неприводимая локальная формация и поэтому формация Φ удовлетворяет условию 2) теоремы. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть формация Φ удовлетворяет условию 1) теоремы, т.е. $\Phi = M \vee_l H_1 \vee_l H_2$, где M – некоторая локальная формация, входящая в H, а H_1 и H_2 – различные минимальные локальные не H-формации. Очевидно, что H-дефект формации M равен 0, а формации H_1 и H_2 имеют обе H-дефект равный 1. Обозначим H-дефект формации Φ через t. Ясно, что $t > 0$. Если предположить, что $t = 1$, то согласно теореме 1,

$$\Phi = M_1 \vee_l H_3 = M \vee_l H_1 \vee_l H_2,$$

где M_1 – некоторая локальная, входящая в H подформация формации Φ, а H_3 – некоторая минимальная локальная не H-формация. Но тогда, согласно лемме 5, приходим к противоречию с тем, что H_1 и H_2 – различные минимальные локальные не H-формации. Следовательно, остается заключить, что $t = 2$. Это, кстати, не противоречит лемме 4, согласно которой $t \le 1+1+0$. Пусть теперь формация Φ удовлетворяет условию 2) теоремы, т.е. $\Phi = M \vee_l H_1$, где M – некоторая локальная формация, входящая в H, а H_1 – неприводимая локальная формация с H-дефектом 2. Если предположить, что H-дефект формации Φ равен 1, то, используя лемму 3, получим противоречие с тем, что формация H_1 имеет H-дефект равный 2. Следовательно, остается заключить, что H-дефект формации Φ равен 2. Теорема доказана.

Заключение. Полное описание локальных формаций с заданным H-дефектом делится на рассмотрение 2 случаев: приводимого и неприводимого. Неприводимый случай предусматривает описание однопорожденных локальных формаций, т.е. формаций, которые представимы в виде $lformG$, где G – некоторая группа. Доказанная в работе теорема дает описание приводимого случая для почти всех известных классов групп. Поэтому она может использоваться для полного описания локальных формаций с заданным H-дефектом для различных классов групп H.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
3. Скиба, А.Н. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 / А.Н. Скиба, Е.А. Таргонский // Мат. заметки. – 1987. – Т. 41, № 4. – С. 490 – 499.
4. Скиба, А.Н. О локальных формациях с ограниченным p-разложимым дефектом / А.Н. Скиба // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 4. – С. 63 – 69.
5. Аниськов, В.В. Некоторые общие свойства локальных формаций с заданным X-дефектом / В.В. Аниськов. – Гомель, 1994. – 14 с. – (Препринт/ Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 20).
6. Аниськов, В.В. О приводимых локальных формациях с заданным Н-дефектом / В.В. Аниськов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 65 – 68.
7. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.
8. Bryant, R.M. The formation generated by a finite group / R.M. Bryant, R.A. Bryce, B. Hartley // Bull. Austral. Math. Soc. – 1970. – Vol. 2, № 3. – P. 374 – 357.

Поступила 30.06.2008