ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

УДК 514

# Условия сохранения обобщенной энергии на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа

Пастухов Ю.Ф., канд. физ.-мат. наук, доц.;
Пастухов Д.Ф., канд. физ.-мат. наук, доц.
Полоцкий государственный университет
Чернов С.В.
*ОАО «*Конструкторское бюро «Дисплей»*,* Витебск
Пастухов А.Ю.

***Аннотация.*** *В работе рассматриваются свойства функций Гамильтона и Лагранжа в координатно - импульсном пространстве. Основным полученным результатом является свойство сохранения обобщенной энергии ранга n на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка n.Это свойство является достаточным, но не необходимым условием сохранения обобщенной энергии ранга n.*

***Ключевые слова:*** *функция Гамильтона, вариационная задача, расслоённое пространство скоростей, уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, тензор обобщенного импульса, невырожденный гессиан.*

Основные определения.

Пусть $L:T^pX_m \to \Re$, $L(x,\dots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции $L$ в локальных координатах (x) в базе $X_m$ расслоения $T^pX_m$.

**Определение 1.** Система функций $P_n=\{p_k^i(n)\}=\{p_{k,n}^i\}$, $n\in\mathbb{N}$, $k=\overline{0,n}$, $i=\overline{1,m}$

$$p_k^i(n)=p_{k,n}^i(x,\dot{x},\dots,x^{(b(n,p,k))})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)\quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$ называется обобщенным импульсом ранга n

для функции $L:T^pX_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы $X_m$ расслоения $T^pX_m$, где $L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции $L$ при выборе локальных координат $(x)$ в базе $X_m$ расслоения $T^pX_m$.Функция $p_{k,n}^i$ называются $k-ой$ компонентой обобщенного импульса $P_n$ ранга $n$ по $i-$ой координате или импульсами порядка $k$ ($k$ -импульсами)$_k$ по $i-$ой координате обобщенного импульса $P_n$ ранга $n$.

**Определение 2.** Пусть $L:T^pX_m \to \Re$, $L(x,\dots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции $L$ в локальных координатах (x) в базе $X_m$ расслоения $T^pX_m$. Функция

$$H=H(x,\dot{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x})=H_n=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^i\overset{(k)i}{x}=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^iD_t^kx^i=$$

$$=-L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\Big)D_t^kx^i\;,\;\overset{(k)i}{x}=D_t^kx^i, \tag{1}$$

$$p_k^i(n)=p_{k,n}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)\quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m} \tag{2}$$

где $D_t^k$ – оператор k- кратного полного дифференцирования по времени $t$, называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) ранга $n$ этого преобразования двойственной к функции Лагранжа $L:T^pX_m\to\Re$, а также обобщенной энергией системы, состояние которой описывается функцией $L:T^pX_m\to\Re$ в локальной системе координат (x) в базе $X_m$ расслоения $T^pX_m$. Имеет место следующая

**Лемма** Максимальные порядки производной по $t$ $b(n,p,k), a(n,p)$ в выражениях(1),(2) для $p_k^i(n)$, $H$

$$p_k^i(n)=p_{k,n}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)\quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$

www.esa-conference.ru

$$H=H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x})=H_n=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k,n}\overset{(k)i}{x}=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})D^k_t x^i=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\Big)D^k_t x^i,\ \overset{(k)i}{x}=D^k_t x^i$$ , имеют вид:

$$b(n,p,k)=\max(2\min(p,n)-k,\,p)=\begin{cases}1)(p\le n)\begin{cases}2p-k, & k\le p\le n\\ p\ \ , & p\le k\le n\end{cases}\\ 2)(p\ge n),\ \max(2n-k,\,p), \quad p\ge n\end{cases}=\begin{cases}2p-k, & k\le p\le n\\ p\ \ , & p\le k\le n\\ \max(2n-k,\,p), & p\ge n\end{cases}\tag{3}$$

$$a(n,p)=\max_{1\le k\le n}(b(n,p,k),k)=\begin{cases}\max(\max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=p}(2p-k,k),\ \max\limits_{p\le k\le n} p\ )=\max(\max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=p}(2p-k),\ p),\ \textit{при}\ p\le n\\ \max\limits_{1\le k\le\min(n,p)=n}(\max(2n-k,\,p),k)=\max(2n-1,\,p,\,n)\ ,\ \textit{при}\ p\ge n\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\max(2p-1,\,p)=2p-1\ \ ,\ \textit{при}\ \ p\le n\\ \max(2n-1,\,p)\ ,\ \textit{при}\ \ p\ge n\end{cases}\tag{4}$$

Постановка задачи.

Пусть $L:T^pX_m\to\Re$, $L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции $L$ в локальных координатах (x) в базе $X_m$ расслоения $T^pX_m$. Рассмотрим функцию Гамильтона, двойственную к $L:T^pX_m\to\Re$:

$$H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x})=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k)}{x})\overset{(k)i}{x}=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k,n}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k)}{x})D^k_t x^i==-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\Big)D^k_t x^i$$

Рассмотрим следующую задачу: при каких условиях имеет ли место сохранение функции Гамильтона на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа. Докажем, что при $p\le n$ имеет место сохранение функции Гамильтона на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа.

Имеет место следующая важная

**Теорема 1** (о дифференциальной связи импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков ранга n). Пусть $L:T^pX_m\to\Re$ – невырожденная функция Лагранжа.

$$p^k_i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p+n-k)}{x})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\Big)\ \ k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$$ - . Тогда:

$$D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})=\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}-p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x})\tag{5}$$

**Теорема 2** (о связи импульсов $k-ого$ порядка рангов $n$ и $n+1$). Пусть $L:T^pX_m\to\Re$.

$L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции $L:T^pX_m\to\Re$ при выборе локальных координат в базе расслоения $X_m$, $p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\Big)$ $k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$ -импульс k-ого порядка ранга n

$p^i_{k,n+1}=\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D^l_t\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\Big)$ - импульс k-ого порядка ранга n +1. Тогда справедливо:

$$p^i_{k,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n+1,p,k))}{x})=p^k_i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})+(-1)^{n+1-k}D^{n+1-k}_t\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}\Big)\ ,\ i=\overline{1,m}\ ,\ k=\overline{0,n}\tag{6}$$

**Теорема 3** Пусть $L:T^pX_m\to\Re$, $L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции $L$ в локальных координатах (x) в базе $X_m$ расслоения $T^pX_m$.Тогда при $1\le p\le n$ выполняется равенство

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$D_t(H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x}))=-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\bullet\overset{\bullet i}{x}$$

Где $p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{0,\min(n,p)},\ i=\overline{1,m}$ -импульс $k$ -ого порядка ранга $n$

Следствием **теоремы 3** является

**Теорема 4** Пусть $L:T^pX_m\to\Re$, $L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции $L$ в локальных координатах (x) в базе $X_m$ расслоения $T^pX_m$. $1\le p\le n$ Тогда на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа

$$p^i_{k=0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+0)i}{x}})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l)i}{x}})=0$$

, $i=\overline{1,m}$ -импульсы $0-ого$ порядка(функциональная часть системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка $n$

Двойственная к функции Лагранжа функция Гамильтона(обобщенная энергия) сохраняется:

$$D_t(H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x}))=\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\bullet\overset{\bullet i}{x}\equiv 0\Leftrightarrow H(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x})\equiv const \quad (7)$$

Для обобщения **теоремы 3** докажем следующую

**Теорема 5** Пусть . Пусть $L:T^pX_m\to\Re$, $L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции $L$ в локальных координатах (x) в базе $X_m$ расслоения $T^pX_m$. Тогда

$$H_{n+1}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x})=H_{n+1}=H_n+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D^{n+1-k}_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})\cdot\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot\overset{(n+1)i}{x} \quad (8)$$

**Доказательство.**

$$H_{n+1}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x})=H_{n+1}=H_{n+1}(L,x)=H(L,x,n+1)=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x} \quad (9)$$

Учитывая тождество $\sum_{k=1}^{n+1}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+a_{n+1}\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+1}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ik}+\sum_{i=1}^{m}a_{i,n+1}$, преобразуем (9):

$$H_{n+1}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x})=H_{n+1}=H_{n+1}(L,x)=H(L,x,n+1)=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{k=n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x}=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x} \quad (10)$$

**По теореме 2** $p^i_{k,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n+1,p,k))}{x})=p^k_i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})+(-1)^{n+1-k}D^{n+1-k}_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{0,n}$ (11)

Подставим (11) в (10):

$$H_{n+1}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x})=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n+1}\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x}=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(p^k_i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})+(-1)^{n+1-k}D^{n+1-k}_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x}=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^k_i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\overset{(k)i}{x}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{n+1-k}D^{n+1-k}_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x}=H_n(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{n+1-k}D^{n+1-k}_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}\overset{(n+1)i}{x} \quad (12)$$

В (12) было использовано: $H_n(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x})=H_n=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}=$ (13)

**Теорема 5** доказана.

**Теорема 3** сформулирована для $1 \le p \le n$. Обобщением **теоремы 3** для любого $p \in \mathbb{N}$ является

**Теорема 6** Пусть $L : T^p X_m \to \Re$, $L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции $L$ в локальных координатах (x) в базе $X_m$ расслоения $T^p X_m$. Тогда при $p \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$D_t(H_n(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x})) = -\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x} - \sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\bullet \overset{\bullet i}{x} \quad i=\overline{1,m} \tag{14}$$

$$\theta : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad \theta(n) = \begin{cases} 1 \,, & n > 0 \\ 0 \,, & n \le 0 \end{cases} - \textit{тета функция Хевисайда}$$

$$p^i_{k=0,n} = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D^l_t\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}\right) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D^l_t\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) = 0 \;,\; i = \overline{1,m}$$ -импульсы $0-ого$ порядка(функциональная часть системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка $n$

**Доказательство.** Проведем методом математической индукции по $n$.

База индукции $n=1$ $H_n(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x}) = H_n = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}$

$$H_{n=1}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x}) = H_1 = H(L,x,n=1) = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n=1}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n=1}\overset{(k)i}{x} = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m} p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x} = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m} p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x} \tag{15}$$

$$p^i_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \Rightarrow p^i_{k=1,n=1} = p^i_{1,1} = \sum_{l=0}^{1-1}(-1)^l D^l_t\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(0+1)i}{x}} = \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{\square i}{x}}$$

$$p^i_{k=0,n=1} = p^i_{0,1} = \sum_{l=0}^{1-0}(-1)^l D^l_t\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(0+0)i}{x}} + (-1)^1 D^1_t\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(0+1)i}{x}} = \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}} - D_t\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{\square i}{x}}\right)$$

Поэтому $H_1 = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m} p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x} = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{\bullet i}{x}}\overset{(1)i}{x} = -L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{\bullet i}{x}}\overset{\bullet i}{x}$

$$D_t(H_1) = D_t(-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m} p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x}) = -D_t(L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})) + \sum_{i=1}^{m}(D_t(p^i_{1,1})\bullet\overset{\bullet i}{x} + p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x}) \tag{16}$$

По **теореме 1** $D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x}) = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x}) \Rightarrow D_t(p^i_{k=1,n=1}) = D_t(p^i_{1,1}) =$

$$= \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(1-1)i}{x}} - p^i_{(k=1)-1,n=1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n=1,p,(k=1)-1))}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}} - p^i_{0,1} = D_t p^i_{1,1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n=1,p,k=1))}{x}) = D_t p^i_{1,1} \tag{17}$$

Учитывая, что $-D_t(L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}\dfrac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}$ , а также очевидные равенства

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} a_k + a_0 + a_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{ik} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ik} = \sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ik} + \sum_{i=1}^{m} a_{i0} + \sum_{i=1}^{m} a_{i1} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{n} a_{ik} + \sum_{i=1}^{m} a_{i0} + \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \,,\; \sum_{k=n+1}^{p} a_k = \theta(p-n)\sum_{k=n+1}^{p} a_k$$

где $\theta : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad \theta(n) = \begin{cases} 1 \,, & n > 0 \\ 0 \,, & n \le 0 \end{cases} - \textit{тета функция Хевисайда.}$

подставляем (17) в (16) :

$$D_t(H_1) = D_t(-L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{i=1}^{m} p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x}) = -D_t(L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})) + \sum_{i=1}^{m}(D_t(p^i_{1,1})\cdot\overset{\bullet i}{x} + p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x}) =$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$=-D_t(L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x}))+\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}}-p^i_{0,1}\right)\bullet\overset{\bullet i}{x}+p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x}\right)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}}\bullet\overset{\bullet i}{x}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,1}\bullet\overset{\bullet i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x}=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k=0)i}{x}}\overset{(k=1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k=1)i}{x}}\overset{(k=1+1)i}{x}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}}\bullet\overset{\bullet i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,1}\bullet\overset{\bullet i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x}=-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,1}\bullet\overset{\bullet i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k=0)i}{x}}\overset{(k=1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{i}{x}}\bullet\overset{\bullet i}{x}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k=1)i}{x}}\overset{(k=1+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{1,1}\cdot\overset{\bullet\bullet i}{x}=-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,1}\bullet\overset{\bullet i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,1}\bullet\overset{\bullet i}{x}-\theta(p-1)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}$$

База индукции доказана. Индуктивный переход. Пусть утверждение справедливо для $n\in\mathbb{N}$:

$$D_t(H_n(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n,p))}{x}))=-\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\bullet\overset{\bullet i}{x}\quad i=\overline{1,m} \tag{18}$$

Докажем, что $$D_t(H_{n+1}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x}))=-\theta(p-(n+1))\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n+1}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(b(n+1,p,k))}{x})\bullet\overset{\bullet i}{x}\quad i=\overline{1,m} \tag{19}$$

**По теореме 5** $$H_{n+1}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x})=H_{n+1}=H_n+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot\overset{(n+1)i}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_t(H_{n+1}(x,\dot{x}\ldots,\overset{(a(n+1,p))}{x}))=D_t\left(H_n+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot\overset{(n+1)i}{x}\right)=$$

$$=D_t(H_n)+D_t\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot\overset{(n+1)i}{x}\right)=$$

$$=D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t\left(D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot\overset{(k)i}{x}\right)+D_t\left(\sum_{i=1}^{m}p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot\overset{(n+1)i}{x}\right)=$$

$$=D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot\left(D_t^{n+1+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot\overset{(k)i}{x}+D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)D_t\overset{(k)i}{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}\left(D_tp^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot\overset{(n+1)i}{x}+p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})D_t\overset{(n+1)i}{x}\right)= \tag{20}$$

$$p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^lD_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)\Rightarrow p^i_{k=n+1,n+1}=p^i_{n+1,n+1}=\sum_{l=0}^{n+1-(n+1)}(-1)^lD_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)=\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(0+n+1)i}{x}}=\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}$$ По **теореме 1**

$$D_tp^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})=\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}-p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x})\Rightarrow D_t(p^i_{k=n+1,n+1})=D_t(p^i_{n+1,n+1})=\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,\,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x})$$ Поэтому (20):

$$=D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot\left(D_t^{n+1+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot\overset{(k)i}{x}+D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)D_t\overset{(k)i}{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}\left(D_tp^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\cdot\overset{(n+1)i}{x}+p^i_{n+1,n+1}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(b(n,p,k))}{x})D_t\overset{(n+1)i}{x}\right)=$$

$$D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+2-k}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+2-(k+1)}D_t^{n+2-(k+1)}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\overset{(k+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\right)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x}=$$

$$D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+2-k}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\cdot\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{n+2-k}D_t^{n+2-k}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\right)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x}=$$

$$D_t(H_n)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\cdot D_t^{n+2-k}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\cdot \overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{n+1-k}D_t^{n+2-k}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\overset{(k)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\Big)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x}=$$

$$D_t(H_n)+(-1)^{n+1-1}\cdot\sum_{i=1}^{m}D_t^{n+2-1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\cdot \overset{(k=1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\Big)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x}=$$

$$=-\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}\overset{\square i}{x}+\sum_{i=1}^{m}(-1)^n\cdot D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\cdot\overset{\square i}{x}-\sum_{i=1}^{m}D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\overset{(n+1)i}{x}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\Big)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x} \tag{21}$$

По **теореме 2** $p^i_{k,n+1}(x,\dot{x},\dots,\overset{(p+n+1-k)}{x})=p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(p+n-k)}{x})+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)$ , $i=\overline{1,m}$ , $k=\overline{0,n}\Rightarrow$

$$p^i_{0,n+1}(x,\dot{x},\dots,\overset{(p+n+1)}{x})=p^i_{0,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(p+n-0)}{x})+(-1)^{n+1-0}D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\ ,\ i=\overline{1,m}\ ,\ k=\overline{0,n}\Rightarrow p^i_{0,n+1}=p^i_{0,n}+(-1)^{n+1}D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^i_{0,n}=p^i_{0,n+1}-(-1)^{n+1}D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)=p^i_{0,n+1}+(-1)^{n+2}D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big) \tag{22}$$

$$p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^lD_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)\Rightarrow p^i_{k=n+1,n+1}=p^i_{n+1,n+1}=\sum_{l=0}^{n+1-(n+1)}(-1)^lD_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)=\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(0+n+1)i}{x}}=\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}} \tag{23}$$

По **теореме 1** $D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})=\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}-p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x})\Rightarrow$

$$\Rightarrow D_t(p^i_{k=n+1,n+1})=D_t(p^i_{n+1,n+1})=\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,\,n+1}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x})=D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big) \tag{24}$$

Подставляем (39),(41) в (38) $-\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0n}\overset{\bullet i}{x}+\sum_{i=1}^{m}(-1)^n\cdot D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\cdot\overset{\bullet i}{x}-\sum_{i=1}^{m}D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\overset{(n+1)i}{x}+$ :

$$+\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\Big)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x}=-\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\Big(p^i_{0n}-(-1)^n\cdot D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\Big)\overset{\bullet i}{x}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\Big(-D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)+\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}-p^i_{n,n+1}\Big)\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\overset{(n+2)i}{x}=$$

$$=-\theta(p-n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n+1}\overset{\bullet i}{x}=-\theta(p-(n+1))\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+2}^{p}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n+1}\overset{\bullet i}{x}$$

Индуктивный переход доказан. **Теорема 6** доказана. Следствием **теоремы 6** является

**Теорема 7** Пусть $L:T^pX_m\to\Re$ , $L(x,\dots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции $L$ в локальных координатах (x)

Тогда на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа $p^i_{k=0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^lD_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}\Big)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^lD_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\Big)=0$ , $i=\overline{1,m}$

1) при $1\le p\le n$ сохраняется( **Теорема 4**):

$$D_t(H(x,\dot{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x}))=\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\overset{\bullet i}{x}\equiv 0\Leftrightarrow H(x,\dot{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x})\equiv const \tag{25}$$

2) при $p > n \quad D_t(H(x, \dot{x}..., \overset{(a(n,p))}{x})) = \sum_{i=1}^{m} p_{0,n}^{i}(x, \dot{x}..., \overset{(b(n,p,k))}{x}) \overset{\bullet i}{x} \neq 0 \Leftrightarrow H(x, \dot{x}..., \overset{(a(n,p))}{x}) \neq const$ (26)

**Литература:**

1. Дубровин В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: УРСС, 1994.

2.Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.

3. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.

4.Козлов А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2006. – № 3. – С. 63–64.

5.Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.

6. Закон преобразования обобщенного импульса / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.

7.Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.

8. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.

9. Пастухов Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.

10. Пастухов Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.

11. Пастухов Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.

12. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии (3-е издание)[Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2020. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/24448. – Дата доступа: 13.03.2020.

13. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика,7:1(2001), 285-288

14. Пастухов, Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.

15. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии 2 [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/23288. – Дата доступа: 26.03.2019.

16. Пастухов, Ю.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 137-153.

17. Пастухов, Ю.Ф. Обратная теорема Гамильтона / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 86-100.

18. Пастухов Д.Ф. К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи Дирихле для волнового уравнения на отрезке/ Пастухов, Д. Ф.; Пастухов, Ю. Ф.; Волосова, Н. К. // Вестник Полоцкого университета.Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С.60–74.

19. Пастухов Д.Ф. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 167–186.

20. Пастухов, Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф.Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.