

УДК 517.51

Наилучшее приближение ступенчатыми функциями в метрике квадратичного отклонения для плотности распределения Лапласа

Пастухов Ю.Ф., Пастухов А.Ю., Пастухов Д.Ф.

Предложен метод нахождения наилучшего приближения плотности для монотонно-убывающих функций в пространстве ступенчатых функций в метрике квадратичного отклонения на заданном интервале и применен для плотности распределения Лапласа. Работа может быть полезна для специалистов по цифровой обработке сигналов.

1. Наилучшее приближение (квантование) функции в метрике квадратичного отклонения

Определение. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Функция $f_m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (a < b)$ называется m -кусочно-постоянной на $[a, b]$, если $\exists x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1}$ такие что: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < b = x_m$,

$$f_m(x) = y_i = \text{const} \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i), f_m(x_i) = y_i, f_m(x_{i+1}) = y_{i+1}, y_i \neq y_{i+1}, \quad \forall i = \overline{1, m-1}.$$

Множество m -ступенчатых функций (m -уровней) $f_m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (a < b)$ обозначим как $S_m[a, b]$.

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2[a, b]$, $f'(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b]$, $m \in \mathbb{N}$. Для минимизации ошибки квантования требуется в пространстве m -ступенчатых функций найти наилучшее приближение $h_m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ в метрике квадратичного отклонения, такое что $\text{dist} = \|f - h_m\|_{C^2[a, b]} = \min_{f_m \in S_m[a, b]} \|f - f_m\|_{C^2[a, b]}$. С учетом этого, расстояние оценивается как:

$$\text{dist} = \|f - h_m\|_{C^2[a, b]} = \sqrt{\int_a^b (f(x) - h_m(x))^2 dx} = \min_{f_m \in S_m[a, b]} \sqrt{\int_a^b (f(x) - f_m(x))^2 dx} = \min_{f_m \in S_m[a, b]} \|f - f_m\|_{C^2[a, b]}$$

Пусть ступенчатая функция $h_m(x) = y_k$ равна константе на отрезке $x \in (x_{k-1}, x_k)$, $k = \overline{1, m}$, при этом функция ошибки $G(x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, \dots, y_m) = \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - y_k)^2 dx$ описывает квадрат отклонения ступенчатой функции

$h_m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ от функции нормального распределения $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Необходимое условие экстремума функции $G(x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, \dots, y_m)$ описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial G(x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, \dots, y_m)}{\partial x_i} \equiv G_{x_i} = 0, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad G_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} f(B_i) = \frac{1}{2}(C_i + C_{i+1}), \quad i = \overline{1, n-1} \\ f(B_i) = \frac{1}{2}C_n \\ \int_{B_{j-1}}^{B_j} f(x) dx = C_j(B_j - B_{j-1}), \quad j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (2)$$

Для $n+1$ ненулевой ступеньки система (1) имеет вид:

$$\begin{cases} f(B_i) = \frac{1}{2}(C_i + C_{i+1}), \quad i = \overline{1, n} \\ \int_{B_{j-1}}^{B_j} f(x) dx = C_j(B_j - B_{j-1}), \quad j = \overline{1, n+1} \end{cases} \quad (3)$$

И содержит $2n+1$ уравнений и $2n+1$ неизвестных.

В работе при вычислении интегралов был использован алгоритм для составной интегральной квадратурной формулы с 16 порядком погрешности, когда исходный отрезок интегрирования делится на число частей кратное четырнадцати (15 узлов равномерной сетки на каждой части). C_i, x_i, r - соответственно веса, узлы и невязка квадратурной формулы.

$$\int_a^b f(z) dz = \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) + r(f) \quad (4)$$

Интегрируя степенные координатные функции z^{2s} на каноническом отрезке $[-1, 1]$, $n_0 = 14$ число частей, на которое делится отрезок $[-1, 1]$, учитывая симметрию весов относительно центрального узла $z = 0$ получим:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 dz = 2 = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{n/2} C_k \\ \int_{-1}^1 z^{2s} dz = 2 / (2s + 1) = 2 \sum_{k=1}^{n/2} C_k (2k / n_0)^{2s}, s = 1, \overline{n_0 / 2} \end{cases} \quad (5)$$

Для канонического отрезка $[-1,1]$ запишем квадратурную формулу в виде эквивалентном (4)

$$\int_{-1}^1 f(z) dz = \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0} C_i f(x_i) = 7h \sum_{i=0}^{14} C_i f(x_i), \quad \frac{hn_0}{2} = 1, x_i = -1 + ih, i = 0, \overline{n_0} \quad (6)$$

Где h – шаг интегрирования, $n_0 = 14$ число отрезков, на которое делится канонический отрезок $[-1,1]$ и каждая часть из k в составной формуле исходного отрезка $[a,b]$.

А определённый интеграл на отрезке $[a,b]$ отличается от(6) на отрезке $[-1,1]$ длиной интервала в

$k = n / n_0 = \frac{b-a}{2}$ раз, используем замену переменных и формулу(4)

$$x = \frac{b+a}{2} + \left(\frac{b-a}{2} \right) z, a \leq x \leq b, -1 \leq z \leq 1, dx = \left(\frac{b-a}{2} \right) dz = kdz$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(z) \left(\frac{b-a}{2} \right) dz = \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0} C_i f(x_i), \sum_{i=0}^{n_0} C_i = 2, h = \frac{b-a}{n}, hn = b-a, x_i = a + ih, i = 0, \overline{n}$$

Разбивая канонический отрезок $[-1,1]$ $n_0 = 14$ равных частей (из соображений удобства разбиения), используя симметрию весовых коэффициентов, можно получить решение системы уравнений(5) ($n_0 = 14$), в которой 6 неизвестных коэффициентов $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ являются решением системы $n_0 / 2 + 1 = 8$ линейных неоднородных уравнений с 15 алгебраическим порядком точности:

$$\begin{cases} C_0 = \frac{90241897}{2501928000}, C_1 = \frac{44436679}{156370500}, C_2 = -\frac{770720657}{2501928000}, C_3 = \frac{109420087}{78185250}, C_4 = -\frac{6625093363}{2501928000} \\ C_5 = \frac{789382601}{156370500}, C_6 = -\frac{5600756791}{833976000}, C_7 = \frac{101741867}{13030875}, C_8 = \frac{90241897}{1250964000} \end{cases} \quad (7)$$

Проверим на компьютере, что рациональный вид коэффициентов (7)(символьное решение системы (5) для $n_0 = 14$) удовлетворяет с двойной точностью(16 значащих цифр). В таблице 1 в левой части указано точное

значение интеграла $a(s) = \int_{-1}^1 z^s dz, s = 0, \overline{16}$, а справа численное значение правой части уравнений системы (5) –

$b(s)$ с использованием значений весовых коэффициентов (7) (s – показатель степенной функции).

Таблица 1. Сравнение интеграла от координатной степенной функции и квадратурной интегральной формулы

a(0)=2.0000000000000000	b(0)=2.0000000000000009
a(1)=0.0000000000000000	b(1)=0.0000000000000001
a(2)=0.6666666666666666	b(2)=0.6666666666666665
a(3)=0.0000000000000000	b(3)=0.0000000000000000
a(4)=0.4000000000000000	b(4)=0.4000000000000000
a(5)=0.0000000000000000	b(5)=0.0000000000000000
a(6)=0.2857142857142857	b(6)=0.2857142857142856
a(7)=0.0000000000000000	b(7)=0.0000000000000000
a(8)=0.2222222222222222	b(8)=0.2222222222222221
a(9)=0.0000000000000000	b(9)=0.0000000000000000
a(10)=0.1818181818181818	b(10)=0.1818181818181817
a(11)=0.0000000000000000	b(11)=0.0000000000000000
a(12)=0.1538461538461539	b(12)=0.1538461538461538
a(13)=0.0000000000000000	b(13)=0.0000000000000000
a(14)=0.1333333333333333	a(14)=0.1333333333333333
a(15)=0.0000000000000000	b(15)=0.0000000000000000
a(16)=0.1176470588235294	b(16)=0.1179107308149041

Из таблицы 1 видно, что алгебраический порядок точности системы уравнений (5) при $n_0 = 14$ равен 15, а порядок погрешности квадратурной формулы $\int_{-1}^1 f(z)dz = 7h \sum_{i=0}^{14} C_i f(x_i)$, $7h = 1$, $\sum_{i=0}^{14} C_i = 2$, $x_i = -1 + ih$, $i = \overline{0, 14}$ равен 16 (C_i определяются с помощью (7)).

Из (6) для $n_0 = 14$ получим составную формулу:

$$\int_a^b f(z)dz = 7h \sum_{i=0}^n C_i f(x_i), h = \frac{(b-a)}{n}, \sum_{i=0}^{14} C_i = 2, x_i = a + ih, n = 14k \quad (8)$$

в которой весовые коэффициенты C_i определяются алгоритмом (9):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } j = 0 \text{ или } j = n : C_j = \frac{90241897}{2501928000}; \\ \text{если } j \equiv 1 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 13 \pmod{14} : C_j = \frac{44436679}{156370500}; \\ \text{если } j \equiv 2 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 12 \pmod{14} : C_j = -\frac{770720657}{2501928000}; \\ \text{если } j \equiv 3 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 11 \pmod{14} : C_j = \frac{109420087}{78185250}; \\ \text{если } j \equiv 4 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 10 \pmod{14} : C_j = -\frac{6625093363}{2501928000}; \\ \text{если } j \equiv 5 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 9 \pmod{14} : C_j = \frac{789382601}{156370500}; \\ \text{если } j \equiv 6 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 8 \pmod{14} : C_j = -\frac{5600756791}{833976000}; \\ \text{если } j \equiv 7 \pmod{14} : C_j = \frac{101741867}{13030875}; \\ \text{если } j \equiv 0 \pmod{14}, j > 0, j < n : C_j = \frac{90241897}{1250964000} \end{array} \right. \quad (9)$$

Методы точных вычислений в стеганографии описаны также в работах[6-9].

Для исследования рассмотренного алгоритма разработана программа, которая позволяет получать пороговые уровни и ошибку приближения для различного числа n (таблица 2) с учетом интегральных квадратурных формул(8, 9).

Таблица 2. Результаты исследований ошибки приближения плотности распределения Лапласа для различного количества ступеней

n	8	16	32	64	128
G= dist ²	1,032*10 ⁻³	2,72* 10 ⁻⁴	6,78* 10 ⁻⁵	2,01* 10 ⁻⁵	5,05* 10 ⁻⁶
dist	3,21* 10 ⁻²	1,65* 10 ⁻²	8,23* 10 ⁻³	4,48* 10 ⁻³	2,25* 10 ⁻³

На рисунке 1 представлен пример приближения функции плотности распределения Лапласа

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x-\beta|} \text{ при } \alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \text{ на основе предложенного подхода в метрике квадратичного отклонения для числа ступеней а) } m=10 \text{ и б) } m=20. \text{ (на одну сторону).}$$

Полученные значения пороговых уровней для $n=20$ ($m=10$ ступеней): 0 ; 0.075 ; 0.156 ; 0.239 ; 0.331 ; 0.424 ; 0.528 ; 0.635 ; 0.756 ; 0.881 ; 1.025 ; 1.175 ; 1.352 ; 1.541 ; 1.774 ; 2.027 ; 2.365 ; 2.747 ; 3.371 ; 4.160

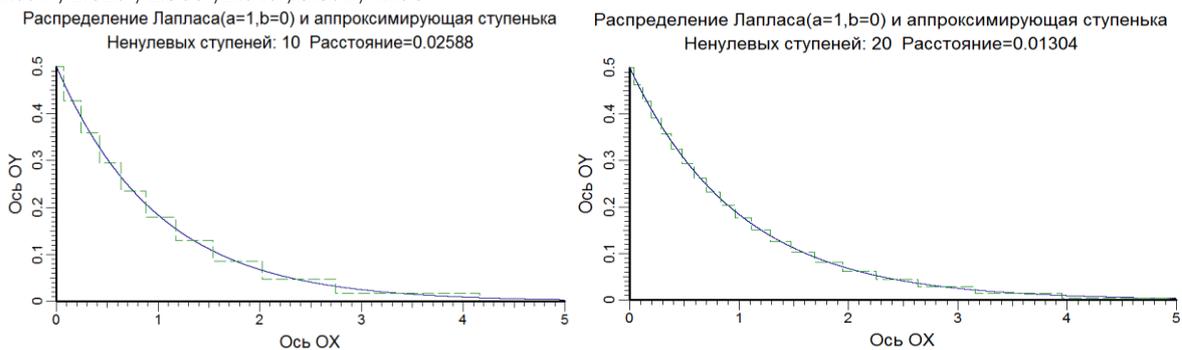


Рис. 1. Результат квантования: а) для m=10; б) для m=20

```

5 Введите число ступенек
10
Введите количество отрезков разбиения для расчета интеграла
По умолчанию количество отрезков разбиения для расчета интеграла=1000
Теперь кол-во отрезков разбиения для расчета интеграла можно вводить и 10000 (с
лед. параметр-количество отрезков подразбиения=100) - время расчета - где-то ми
нут 10-20-30
2000
Введите количество отрезков подразбиения для решения интегрального уравнения
По умолчанию количество отрезков подразбиения для решения интегрального уравне
ия=100
20
Введите количество узлов(кратно 10) для расчета интеграла
10
Начало работы программы:
Время : Год:2020 мес:13 дней:23 час:14 мин:37 сек:5
Прогресс : 100.0000 % Осталось: сут: 0 час: 0 мин: 0 секунд: 0
Время : Год:2020 мес:13 дней:23 час:14 мин:37 сек:25
Оценка приближения к решению = 6.697396927118273E-004
Вывод уровней квантования :
X( 1 )= 0.000000000000000E+000
X( 2 )= 7.500000000000000E-002
X( 3 )= 0.1560844135190609
X( 4 )= 0.23949999999999987
X( 5 )= 0.305122291656441
X( 6 )= 0.4243749999999997
X( 7 )= 0.527969300582422
X( 8 )= 0.6353750000000004
X( 9 )= 0.75578941457246
X( 10 )= 0.88112500000000085
X( 11 )= 1.02454166816698
X( 12 )= 1.1752500000000003
X( 13 )= 1.3327200000000002
X( 14 )= 1.54140000000000083
X( 15 )= 1.77433000000000348
X( 16 )= 2.0207400000000000
X( 17 )= 2.30521400000000056
X( 18 )= 2.7467500000000048
X( 19 )= 3.37136460780236
X( 20 )= 4.159730000000164
Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата ранности f(x) и ступенчатой функции
= 6.697396927118273E-004
Расстояние = 2.697032944865124E-002
    
```

Рис. 3. Уровни квантования плотности распределения Лапласа для $m=10$

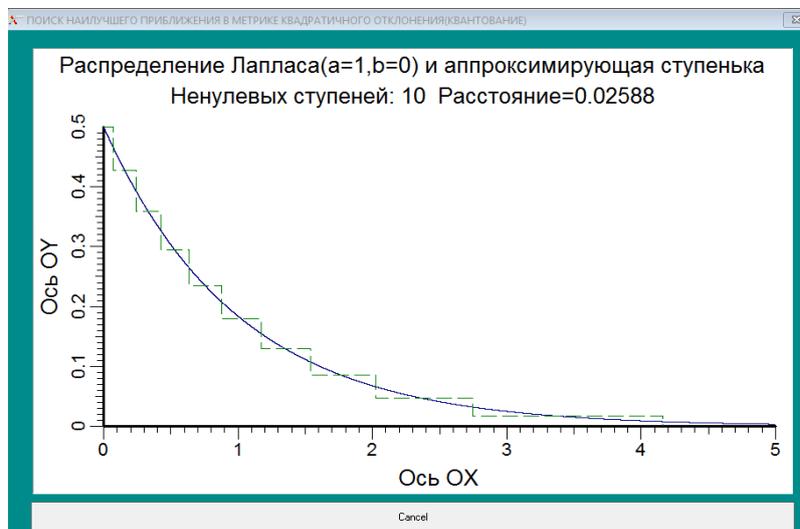


Рис. 3. График уровней квантования: для $m=10$

На рисунке 3 приведен результат работы программы для поиска оптимальных уровней квантования для числа ступеней $m=10$

Литература:

1. Пастухов Ю.Ф. Необходимые условия в обратной вариационной задаче / Ю.Ф. Пастухов // Фундаментальная и прикладная математика, 7:1(2001), 285-288
2. Пастухов Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными // Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2018. - № 4. - С. 194.
3. Пастухов Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2018. - № 12. - С. 75-99.
4. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии. [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. - Новополоцк: ПГУ, 2018. - Режим доступа: <http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094> - Дата доступа: 04.07.2018.
5. Пастухов Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии 2. [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. - Новополоцк: ПГУ, 2019. - Режим доступа: <http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/23288>. - Дата доступа: 26.03.2019.
6. Пастухов Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии (3-е издание) [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. - Новополоцк: ПГУ, 2020. - Режим доступа: <http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/24448>. - Дата доступа: 13.03.2020.
7. Пастухов Ю.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2018. - № 4. - С. 137-153.
8. Пастухов Ю.Ф. Обратная теорема Гамильтона / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2018. - № 12. - С. 86-100.

9. Пастухов Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии // Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, С. В. Чернов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
10. Пастухов, Ю.Ф. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, Голубева О. В. // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
11. Пастухов Ю.Ф. Об интегралах обобщенной энергии на экстремальных системах уравнений Эйлера-Лагранжа [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2020. – Режим доступа: <http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/24421>. – Дата доступа: 26.02.2020.
12. Пастухов, Ю.Ф. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
13. Пастухов, Ю.Ф. Закон преобразования обобщенного импульса / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
14. Пастухов Д.Ф. К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи Дирихле для волнового уравнения на отрезке / Пастухов, Д. Ф.; Пастухов, Ю. Ф.; Волосова, Н. К. // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С.60–74.
15. Пастухов, Д. Ф. Оптимальный параметр аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке / Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф., Волосова Н. К. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – №4. С. 167–186.
16. Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф.Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
17. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Богуш Р.П., Пастухов А.Ю. Определение оптимальных уровней восстановления и квантования плотности нормального распределения в метрике квадратичного отклонения для алгоритма сжатия данных / Пастухов Ю.Ф. // Евразийское Научное Объединение. 2018. Т. 1. № 11(45). С. 16–21.
18. Пастухов Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–173.
19. Пастухов, Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
20. Пастухов Ю. Ф., Пастухов Д. Ф., Богуш Р. П. Квантование функции плотности нормального распределения в метрике квадратичного отклонения. В сборнике: Информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы, инновации (ИКТ-2018) Электронный сборник статей I международной научно-практической конференции, посвященной 50-летию Полоцкого государственного университета. 2018. С. 92–95.
21. Герец, А. Ю. Согласование порядков аппроксимации дифференциального и граничного операторов в краевой задаче для уравнений в частных производных / А. Ю. Герец, А. А. Зеленкевич, Н. А. Гурьева, Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. 2015. №12. С. 102–109.
22. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К. Сборник статей по численным методам. Аппроксимация повышенной точности и устойчивость разностных схем в уравнениях с частными производными: учебное пособие / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Волосова Н.К., Волосов К. А., Волосова А. К. – 3 – е изд., – Новополоцк: ПГУ, 2020. – 156 с. [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. Волосова Н.К., Волосов К. А., Волосова А. К. – Новополоцк: ПГУ, 2020. – Режим доступа: <http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/24447>. – Дата доступа: 13.03.2020.