УДК 519.534

ОПИСАНИЕ КОНГРУЭНЦИЙ КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА НА ПОЛУГРУППЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

М.И. НАУМИК
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Изучается мультипликативная полугруппа линейных отношений, т.е. полугруппа частичных многозначных линейных преобразований векторного пространства над телом. При исследовании любой полугруппы в первую очередь возникает вопрос о строении её конгруэнций. Описаны конгруэнции конечного индекса на полугруппе линейных отношений. Используя результаты по описанию замкнутых конгруэнций на полугруппе линейных отношений ранга 0 и всех конгруэнций на главных факторах полугруппы линейных отношений, классифицируются все конгруэнции конечного индекса на данной полугруппе. Основной результат работы обобщает теорему А.И. Мальцева о конгруэнциях на матричных полугруппах [1] и результат автора [2].

1. Введение

Пусть V – векторное пространство над произвольным телом F. Бинарное отношение $a \in V \times V$ между элементами множества V называется линейным, если оно является подпространством пространства $V \oplus V$. Другими словами, линейное отношение a – это множество пар $(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x}, \bar{y} \in V$, замкнутое относительно операций сложения и умножения на элемент из F: если $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in a$ и $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \in a$, то $(\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 \bar{y}_2) \in a$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in F$.

Множество $LR(V)$ всех линейных отношений на пространстве V является полугруппой относительно операции умножения бинарных отношений: для любых $a, b \in LR(V)$, $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in ab$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\bar{z} \in V$, что $(\bar{x}, \bar{z}) \in a$ и $(\bar{z}, \bar{y}) \in b$.

Для описания конгруэнций на полугруппе $LR(V)$ используются отношения Грина на данной полугруппе [3] и описание замкнутых конгруэнций на подполугруппе линейных отношений ранга ноль [4]. Конечные главные факторы полугруппы $LR(V)$ являются вполне 0-простыми полугруппами. Описание всех конгруэнций вполне 0-простой полугруппы – предмет внимания многих авторов. Первое получено Л.М. Глускиным [5]; позднее найдены другие описания этих конгруэнций [6 – 9].

В данной работе нас будет интересовать хорошо известное описание, полученное Л.М. Глускиным. Используя это описание, получим описание всех конгруэнций на конечных главных факторах нашей полугруппы. Затем, определим конгруэнции конечного индекса и дадим описание всех таких конгруэнций. В определениях и обозначениях мы следуем [10, 11].

2. Используемые результаты

Приведем описание нормальных подгрупп полной линейной группы для случая конечномерного линейного пространства [12, 13].

Если M – конечномерное линейное пространство над телом F, $\dim M \geq 3$, N – нормальная подгруппа группы $GL(M)$, то либо N принадлежит подгруппе Z^*e, либо N содержит коммутант, где e – единица группы $GL(M)$, Z^* – мультипликативная группа всех элементов центра тела F.

При изучении линейных отношений $a \in LR(V)$ будем рассматривать следующие подпространства пространства V:

$$pr_1 a = \{\bar{x} \in V : (\exists \bar{y} \in V), (\bar{x}, \bar{y}) \in a\}; \quad ker\ a = \{\bar{x} \in V : (\bar{x}, \bar{o}) \in a\};$$

$$pr_2 a = \{\bar{y} \in V : (\exists \bar{x} \in V), (\bar{x}, \bar{y}) \in a\}; \quad coker\ a = \{\bar{y} \in V : (\bar{o}, \bar{y}) \in a\}.$$

Ранг линейного отношения $a \in LR(V)$ определяется формулой: $rank\ a = \dim (pr_1 a / ker\ a)$.

Известно, что $rank\ (ab) \leq rank\ a$ и $rank\ (ab) \leq rank\ b$ для любых $a, b \in LR(V)$. Поэтому множество $LR_r(V) = \{a \in LR(V), rank\ a < r\}$ является идеалом полугруппы $LR(V)$.

Приведем описание идеалов и эквивалентностей Грина в виде лемм на полугруппе $LR(V)$, данное автором в [3].

ЛЕММА 2.1 [3]. *Все идеалы полугруппы LR(V) являются главными и исчерпываются подполугруппами $LR_r(V)$, $1 \leq r \leq \dim V$.*

ЛЕММА 2.2 [3]. *Два элемента a, $b \in LR(V)$, будут R-эквивалентны (соответственно L-эквивалентны) тогда и только тогда, когда $pr_1 a = pr_1 b$ и $ker\ a = ker\ ab$ ($pr_2 a = pr_2 b$ и $coker\ a = coker\ b$). Два элемента $a, b \in LR(V)$ будут D-эквивалентны тогда и только тогда, когда $rank\ a = rank\ b$.*

Обозначим D-класс, состоящий из элементов ранга ξ, $0 \le \xi \le \dim V$, через D_ξ.

Пусть V_1, V_2, V_3,$V_4 \in V$ – некоторые подпространства V, причем $V_2 \subseteq V_1$, $V_4 \subseteq V_3$; $\dim (V_1/V_2) = \dim (V_3/V_4) = \xi$; $R(V_1, V_2)$ (соответственно $L(V_3, V_4)$; $H(V_1, V_2, V_3, V_4)$) – множество всех линейных отношений $a \in LR(V)$ таких, что $pr_1 a = V_1$, $ker\ a = V_2$ (соответственно $pr_1 a = V_1$, $ker\ a = V_2$, $pr_2 a = V_3$, $coker\ a = V_2$).

ЛЕММА. 2.3 [3]. *Множество $R(V_1, V_2)$ (соответственно $L(V_3, V_4)$) и только они являются R-классами (L-классами) полугруппы $LR(V)$, содержащимися в D_ξ. Множества $H(V_1, V_2, V_3, V_4)$ и только они являются H-классами полугруппы $LR(V)$, содержащимися в D_ξ.*

Для произвольного подпространства $A \subseteq V$ обозначим $\omega_A = \{(\bar{x}, \bar{o}) : \bar{x} \in A\}$ и $\omega_{\bar{o}} = \omega$. Пусть $a \in LR_1(V)$. Ясно, что $a = \omega_A \cdot \omega_B^{-1}$, где $pr_1 a = A$, $pr_2 a = B$.

Пусть σ – конгруэнция полугруппы $LR_1(V)$. Для любых A и B, удовлетворяющих условию $\omega_A\ \sigma\ w_B$, существуют такие кардинальные числа ν_i, что $\dim (A/A \cap B) < \nu_i$ и $\dim (B/A \cap B) < \nu_i$. Минимальные среди этих кардинальных чисел обозначим $\nu(\sigma)$. Для любых C и D, удовлетворяющих условию: $\omega_c^{-1}\ \sigma\ \omega_D^{-1}$, существуют такие кардинальные числа ν'_j, что $\dim (C/C \cap D) < \nu'_j$ и $\dim (D/C \cap D) < \nu'_j$. Минимальное среди этих кардинальных чисел обозначим $\nu'(\sigma)$.

Обозначим $\nu(V)$ множество кардинальных чисел, определяемых условиями:

- если $\dim V \ge \aleph_0$, то, $\nu \in \nu(V)$ тогда и только тогда, когда $\nu = 1$ или $\aleph_0\ \nu$ (dim V), где (dim V) – следующее кардинальное число за dim V;

- если $\dim V < \aleph_0$, то $\nu \in \nu(V)$ тогда и только тогда, когда $\nu = 1$ или $\nu = 1 + \dim V$.

Определим отношение $\sigma_1(\nu)$ и $\sigma_2(\nu')$, где ν, $\nu' \in \nu(V)$, полугруппы $LR_1(V)$ следующим образом:

- $\omega_A \cdot \omega_C^{-1}\ \sigma_1(\nu)\ \omega_B \cdot \omega_D^{-1}$ тогда и только тогда, когда $\dim (A/A \cap B) < \nu$, $\dim (B/A \cap B) < \nu$;

- $\omega_A \cdot \omega_C^{-1}\ \sigma_2(\nu')\ \omega_B \cdot \omega_D^{-1}$ тогда и только тогда, когда $\dim (C/C \cap D) < \nu'$, $\dim (D/C \cap D) < \nu'$.

Далее определим отношение $\sigma(\nu', \nu')$ полугруппы $LR_1(V)$, полагая $\sigma(\nu', \nu') = \sigma_1(\nu) \cap \sigma_2(\nu')$.

ЛЕММА 2.4 [4]. *Отношение $\sigma(\nu', \nu')$ является замкнутой конгруэнцией полугруппы $LR_1(V)$. Любая замкнутая конгруэнция полугруппы $LR_1(V)$ совпадает с одним из отношений $\sigma(\nu', \nu')$.*

Приведем здесь принадлежащий Л.М. Глускину [5] результат о строении гомоморфизмов вполне 0-простых полугрупп, который мы используем при описании конгруэнций на главных факторах $LR_{n+1}(V)/LR_n(V)$.

Обозначим через $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ элементы фактор-группы $\bar{G}$ группы G. Пусть далее $\tilde{i}\ (\tilde{\lambda})$ – некоторые множества таких элементов $i \in I$ ($\lambda \in \Lambda$), что при любом $\mu \in \Lambda$ ($k \in I$) выполняется равенство: $p_{\mu i} = p_{\mu j}$ ($p_{k\lambda} = p_{k\mu}$).

Обозначим через $\bar{I}$ (соответственно $\bar{\Lambda}$) некоторое разбиение множества I (соответственно Λ) на классы $\tilde{i}\ (\tilde{\lambda})$. Каждое из отображений $a\bar{\varphi} = \tilde{a}$ $(a \in \tilde{a})$ $i\,\varphi_r = \tilde{i}\,(i \in \tilde{i})$, $\lambda\varphi_l = \tilde{\lambda}\ (\lambda \in \tilde{\lambda})$ множеств G, I, Λ соответственно на $\bar{G}$, $\bar{I}$, $\bar{\Lambda}$ индуцирует отображения (мы их по-прежнему будем обозначать через $\bar{\varphi}, \varphi_r, \varphi_l$) полугруппы S на множество $\bar{S}, S_1$ или S_2, состоящее соответственно из троек: $(i, \tilde{a}, \lambda)$; $(\tilde{i}, a, \lambda)$; $(i, a, \tilde{\lambda})$. Эти множества являются вполне простыми полугруппами относительно действий:

$$(i, \tilde{a}, \lambda) \cdot (j, \tilde{b}, \mu) = (i, \widetilde{ap_{\lambda j}b}, \mu);$$

$$(\tilde{i}, a, \lambda) \cdot (\tilde{j}, b, \mu) = (\tilde{i}, ap_{\lambda j}b, \mu);$$

$$(i, a, \tilde{\lambda}) \cdot (j, b, \tilde{\mu}) = (i, ap_{\lambda j}b, \tilde{\mu}).$$

Каждое из отображений

$$(i, a, \lambda)\bar{\varphi} = (i, \tilde{a}, \lambda) \quad (a \in \tilde{a}); \tag{1}$$

$$(i, a, \lambda)\,\varphi_r = (\tilde{i}, a, \lambda) \quad (i \in \tilde{i}); \tag{2}$$

$$(i, a, \lambda)\,\varphi_l = (i, a, \lambda) \quad (\lambda \in \tilde{\lambda}) \tag{3}$$

является гомоморфизмом полугруппы S на $\bar{S}$, S_1 или S_2.

Обозначим через α_φ изоморфизм $(I,G,\Lambda,[p_{\lambda i}])$ на $(I,G,\Lambda,[y_\lambda^{-1}\,p_{\lambda j}\,x_j^{-1}])$ такой, что $(i, a, j)\alpha_\varphi =$ $= (i, x_i a y_j, j)$, где $(I, G, \Lambda, [p_{\lambda i}])$ факторполугруппа Риса.

ЛЕММА 2.5. [5]. *Всякий гомоморфизм φ вполне 0-простой полугруппы S можно представить в виде произведения $\varphi = \alpha_\varphi\,\bar\varphi\varphi_l\,\varphi_r$, где $\alpha_\varphi, \bar\varphi, \varphi_l, \varphi_r$ – гомоморфизм типа (1) – (3).*

3. Основной результат

3.1. Здесь построена вполне 0-простая матричная полугруппа, изоморфная полугруппе $LR_{n+1}(V) / LR_n(V)$ и изучены конгруэнции на конечных главных факторах полугруппы $LR(V)$.

3.1.1. Пусть n – целое число, $1 < n \le \dim V$, $n < \aleph_0$, D_n – D-класс полугруппы $LR(V)$; z – некоторый символ, не содержащийся в D_n.

На множестве $D_n^z = D_n \cup \{z\}$ определим бинарную операцию $*$: для любых $a, b \in D_n$ положим

$$a*b=\begin{cases} ab, \text{ если } rank\ (ab) = n; \\ z, \text{ если } rank\ (ab) < n; \end{cases}$$

$$a * z = z * a = z * z = z.$$

Относительно этой операции D_n^z является, как легко показать, полугруппой изоморфной главному фактору полугруппы $LR(V)$, т.е. $LR_{n+1}(V) / LR_n(V)$.

Пусть V_n – некоторое фиксированное n-мерное подпространство пространства V; H_n – H-класс $H(V_n, \bar O, V_n, \bar O)$. H_n совпадает с полной линейной группой $GL(V_n)$. Обозначим через e_n единицу группы H_n; через R_i, L_λ – R-классы и, соответственно, L-классы, содержащиеся в D_n; через I^n, Λ^n – множества всех индексов i и λ. Тогда всякий H-класс, содержащийся в D_n, можно представить в виде: $H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$. Для любых $i \in I^n$, $\lambda \in \Lambda^n$ существуют подпространства $A, B, C, D \subseteq V$ такие, что $\dim (A/D) = \dim (C/D) = n$ и $R_i = R(A, B)$, $L_\lambda = L(C, D)$. Представим A и C в виде $A = B \oplus A_1$ и C и D в виде $C = D \oplus C_1$, где $\dim A_1 =$ $= \dim C_1 = n$. Пусть d_i – фиксированное биективное линейное отображение A_1 на V_n, а d_λ – фиксированное биективное линейное отображение V_n на C_1; $a_i \in R_i$ и $a_\lambda \in L_\lambda$, линейные отношения:

$$a_i = \langle(\bar x + \bar y, \bar z) : \bar x \in B, (\bar y, \bar z) \in d_i\rangle;$$

$$a_\lambda = \langle(\bar z, \bar x + \bar y) : \bar x \in D, (\bar z, \bar y) \in d_\lambda\rangle.$$

Легко проверить, что $a_\lambda a_i \in H_n$ или $\operatorname{rank} (a_\lambda a_i) < n$ при любых $\lambda \in \Lambda^n$, $i \in I^n$.

3.1.2. ЛЕММА. *Для любого $a \in H_{i\lambda}$ существует такое $g \in H_n$, что a можно, и притом единственным образом, представить в виде: $a = a_i\, g\, a_\lambda$.*

Доказательство. Для любого $a \in H_{i\lambda}$ существует такое $g \in H_n$, что a можно представить в виде: $a = a_i\, g\, a_\lambda$ следует из п. 3.1.1. От противного легко показывается, что линейное отношение a можно единственным образом представить в таком виде. Лемма доказана.

3.1.3. ЛЕММА. П*олугруппа D_n^z изоморфна регулярной рисовской полугруппе M^0 $(I^n, H_n, \Lambda^n, P^n)$ матричного типа с сэндвич-матрицей $P^n = (p_{\lambda i})$ над группой с нулем H_n^z.*

Доказательство. Положим $p_{\lambda i} = \begin{cases} a_\lambda a_i, \text{ если } rank\ (a_\lambda a_i) = n; \\ z, \text{ если } rank\ (a_\lambda a_i) < n. \end{cases}$

Имеем $p_{\lambda i} \in H_n^z = H_n \cup \{z\}$. Пусть $P^n = (p_{\lambda i})$ есть $\Lambda^n\, I^n$ – матрица над группой с нулем H_n^z. Заметим, что для каждого $\lambda \in \Lambda^n$ (соответственно $i \in I^n$) найдется $i \in I^n$ ($\lambda \in \Lambda^n$) такой, что $p_{\lambda i} \ne z$.

Отождествим все тройки вида (i, z, λ), $i \in I^n$, $\lambda \in \Lambda^n$, обозначив их через θ.

Положим $M^n = \{(i, g, \lambda) : g \in H_n, i \in I^n, \lambda \in \Lambda^n\} \cup \{\theta\}$.

На множестве M^n определим $(\circ)$ операцию следующим образом:

$$(i, g, \lambda)\circ(j, g', \mu) = \begin{cases} (i, g p_{\lambda i}\, g', \mu), & \text{если } p_{\lambda i} \ne z; \\ \theta, & \text{если } p_{\lambda i} = z. \end{cases}$$

Легко проверить, что M^n относительно операции $(\circ)$ является полугруппой. Каждой тройке $i, g, \lambda) \in M^n$, где $g \in H_n$, $i \in I^n$, $\lambda \in \Lambda^n$ соответствует взаимно однозначно линейное отношение $a = a_i g a_\lambda \in D_n$ такое, что $a\varphi = (i, g, \lambda)$.

Положим $z\varphi = \theta$. Отсюда следует, что φ является изоморфизмом. Лемма доказана.

3.1.4. Итак, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Главный фактор LR_{n+1} / LR_n (V) полугруппы LR (V) изоморфен регулярной полугруппе матричного типа с сэндвич-матрицей ($a_\lambda a_i$) над группой с нулем H_n^z, т.е. полугруппа LR_{n+1} (V)/ LR_n (V) вполне* 0*-простая.*

3.1.5. ЛЕММА. *Пусть ρ – конгруэнция на полугруппе M^n. Если (i, g, λ) ρ (i', g', λ'), при i ≠ i' или λ ≠ λ', то ρ универсальная конгруэнция.*

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

3.1.6. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть ρ – конгруэнция на D_n^z, отличная от универсальной. Тогда aρb влечет равенства $pr_1a = pr_1b$, ker a = ker b, $pr_2a = pr_2b$, coker a = coker b.*

3.1.7. Пусть *N* – какой-нибудь нормальный делитель группы H_n. Множества *N* (*i*, *g*, λ) = = {(*i*, *gn*, λ) : *n* ∈ *N*}, где $i \in I^n$, $\lambda \in \Lambda^n$, $g \in H_n$ и {θ} образуют разбиение полугруппы M^n.

ТЕОРЕМА. *Отношение эквивалентности ρ_N является конгруэнцией. Обратно, всякую конгруэнцию на полугруппе M^n можно получить таким образом. Отображение: $N \to \rho_N$ является взаимно однозначным.*

Доказательство. Непосредственной проверкой легко установить, что ρ_N является конгруэнцией.

Обратно, из леммы 2.5 и п. 3.1.5 вытекает, что любая конгруэнция ρ на M^n имеет вид: $\rho = \alpha_\varphi \overline{\varphi}\overline{\varphi}^{-1}\alpha_\varphi^{-1}$. Учитывая, что $\overline{\varphi}$ определяется некоторым нормальным делителем *N* группы H_n и $p_jN = Np_j$, для любого $p_j \in H_n$, находим класс конгруэнции ρ, содержащий элемент (*i*, *g*, λ).

Поскольку нетривиальный гомоморфизм φ отображает ненулевой элемент полугруппы M^n в ненулевой, то θρ = θ. Теорема доказана.

3.1.8. ТЕОРЕМА. *Ненулевые H-классы полугруппы $LR_{n+1}(V)$ / $LR_n(V)$ совпадают с H-классами полугруппы LR(V), содержащимися в D_n.*

Доказательство легко получается непосредственной проверкой.

3.1.9. ТЕОРЕМА. *Главный фактор $LR_{n+1}(V)$ / $LR_n(V)$, где $1 < n \le \dim V$, $n < \aleph_0$ полугруппы LR(V) является вполне* 0*-простой полугруппой. Конгруэнции на $LR_{n+1}(V)$ / $LR_n(V)$, отличные от универсальной, находятся во взаимно однозначном соответствии с нормальными делителями произвольного ненулевого H-класса из $LR_{n+1}(V)$ / $LR_n(V)$, являющегося группой. Если N – такой нормальный делитель, то классами конгруэнции, соответствующей N, являются множества aNb, где a, b ∈ $LR_{n+1}(V)$ / $LR_n(V)$.*

Доказательство. Из теоремы п. 3.1.4 вытекает, что полугруппа $LR_{n+1}(V)$ / $LR_n(V)$ является вполне 0-простой.

По предыдущей теореме следует, что каждый ненулевой *H*-класс полугруппы $LR_{n+1}(V)$ / $LR_n(V)$, являющийся группой, изоморфен группе H_n. В силу п. 3.1.7 конгруэнции на $LR_{n+1}(V)$ / $LR_n(V)$, отличные от универсальной, находятся во взаимно однозначном соответствии с нормальными делителями произвольного ненулевого *H*-класса из $LR_{n+1}(V)$ / $LR_n(V)$, являющегося группой.

Пусть *N* – нормальный делитель *H*-класса H_1, e_1 – идемпотент. В качестве подпространства V_n мы можем взять любое из подпространств V_1 из $pr_1e_1 = ker\ e_1 \oplus V_1$, $pr_2\ e_1 = coker\ e_1 \oplus V_1$. Тогда $e = \langle(\overline{x},\overline{x}) : x \in V_1\rangle$ будет единицей группы $GL(V_n)$, $N' = \{ene : n \in N\}$ будет нормальным делителем группы $GL(V_n)$.

С помощью изоморфизма φ^{-1} можно определить конгруэнцию δ_N, соответствующую $\rho_{N'}$ (п. 3.1.7), на полугруппе $LR_{n+1}(V)$ / $LR_n(V)$. Легко показать, что (*c*, *d*) ∈ δ_N тогда и только тогда, когда существует *a*, *b* ∈ $LR_{n+1}(V)$ / $LR_n(V)$ такие, что *c*, *d* ∈ *aNb*. Теорема доказана.

3.2.1. Пусть ρ – некоторая конгруэнция на полугруппе *LR*(*V*). Всюду далее ρ_0 – ограничение конгруэнции ρ на полугруппе $LR_1(V)$: $\rho_0 = \rho \cap (LR_1(V) \times LR_1(V))$ и кардинальные числа $\nu(\rho_0)$ и $\nu'(\rho_0)$ удовлетворяют лемме 2.4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть ωρa, где линейное отношение a имеет ранг, равный r. Минимальное кардинальное число, большее всех таких r, обозначим через η(ρ) и будем называть индексом конгруэнции ρ.*

Далее рассматриваем только конгруэнции конечного индекса на полугруппе *LR*(*V*).

3.2.2. ЛЕММА. *Для любой конгруэнции ρ на LR(V) имеем* $\eta(\rho) \le \nu(\rho_0)$ *и* $\eta(\rho) \le \nu(\rho_0)$.

Доказательство. Пусть ωρ*a*. Имеем $\omega\rho\omega_{pr_1a}$ и $\omega\rho\omega_{pr_2a}^{-1}$, *rank a* < η(ρ). Получаем $\omega\rho\omega_{pr_1a}\omega_{pr_2a}^{-1}$, $\dim pr_1a < \nu(\rho_0)$, $\dim pr_2a < \nu'(\rho_0)$. Из определения чисел η(ρ), $\nu(\rho_0)$, $\nu'(\rho_0)$ и вышеполученного следует $\eta(\rho) \le \nu(\rho_0)$, $\eta(\rho) \le \nu'(\rho_0)$. Лемма доказана.

3.2.3. ЛЕММА. *Пусть ρ – конгруэнция на LR(V). Все линейные отношения b, которые удовлетворяют условию* $rank\ b \le \eta(\rho)$, $\dim pr_1b < \nu(\rho_0)$, $\dim pr_2b < \nu'(\rho_0)$, *конгруэнтны ω, т.е. ωρb.*

Доказательство. Пусть *b* линейное отношение, удовлетворяющее условию леммы. Из определения η(ρ) следует существование линейного отношения *a* такого, что *rank b* ≤ *rank a*, ωρ*a*, *rank a* < η(ρ). Из этого легко получить ωρ*b*. Лемма доказана.

3.2.4. ЛЕММА. *Пусть* ρ *– конгруэнция на* $LR(V)$, a, $b \in LR(V)$, $rank\ a < \eta(\rho)$, $rank\ b < \eta(\rho)$ *и* $dim\ pr_1a\ /\ (pr_1a \cap pr_1b) < \nu(\rho_0)$, $dim\ pr_1b\ /(pr_1a \cap pr_1b) < \nu(\rho_0)$, $dim\ pr_2a\ /\ (pr_2a \cap pr_2b) < \nu'(\rho_0)$, $dim\ pr_2b\ /\ (pr_2a \cap pr_2b) < \nu'(\rho_0)$. *Тогда* $a\rho b$.

Доказательство. Если $\eta(\rho) = 1$, то по лемме 2.4. следует $a\rho b$. Пусть $\eta(\rho) > 1$. Найдутся такие линейные отношения a_1 и b_1, что $a_1\rho\omega$ и $\omega\rho b_1$, а также возьмем линейные отношения c_0, c_1, d_0, d_1, что $a = c_0\ a_1\ d_0$, $b = c_1\ b_1\ d_1$, $a\rho\omega_{\ker a}\,\omega^{-1}_{co\ker a}$, $\omega_{\ker b}\,\omega^{-1}_{co\ker b}\rho b$. Из леммы 2.4 следует $\omega_{\ker a}\,\omega^{-1}_{co\ker a}\,\rho\,\omega_{\ker b}\,w^{-1}_{co\ker b}$. Таким образом $a\rho b$. Лемма доказана.

3.2.5. ЛЕММА. *Пусть* a, $b \in LR(V)$, aHb, $a \neq \alpha b$ *для любого* $\alpha \in Z^*$, *то найдется* $\bar{x} \in pr_1a$ *такой, что для любого* $\alpha \in F \setminus \{0\}$ *из* $(\bar{x}, \bar{y}) \in a$ *следует* $(\bar{x}, \alpha\bar{y}) \notin b$ *для некоторого* $\bar{y}$.

Доказательство легко следует от противного.

3.2.6. ЛЕММА. *Пусть* ρ *– конгруэнция, отличная от универсальной, и существуют такие* a, $b \in LR(V)$, *что* $a\rho b$, $rank\ a > 1$ *и не существует* $\alpha \in Z^*$ *такого, что* $a = \alpha b$. *Тогда* $1 < \eta(\rho) \leq dim\ V$.

Доказательство. Рассматривая все возможные случаи, легко показать, что $\eta(\rho) > 1$. Лемма доказана.

3.2.7. ЛЕММА. *Если* $a\rho b$, $rank a < rank b = \xi$, *то* $\xi < (\eta\rho)$.

Доказательство. Пусть ξ – конечно, $a = a_1 \oplus \omega_{\ker\ a} \oplus \omega^{-1}_{co\ker\ a}$, $b = b_1 \oplus \omega_{ker b} \oplus \omega^{-1}_{co\ker\ b}$, где $a_1 = <(\bar{x}_i, \bar{y}_i) : i \in I_1>$, $b_1 = <(\bar{x}', \bar{y}') : i \in I>$, $pr_1a = ker\ a \oplus V_1$, $pr_1b = ker\ b \oplus V_2$, $pr_2a = coker\ a \oplus V_3$, $pr_2b = coker\ b \oplus V_4$, $\{\bar{x}_i\}_{i\in I_1}$ – базис V_1, $\bar{y}_i \in \{\bar{y}_i\}_{i \in I_1}$ – базис V_3, $\{\bar{x}'_i\}_{i\in I}$ – базис V_2, $\{\bar{y}'_i\}_{i\in I}$ – базис V_4, $I_1 \subseteq I$.

Возьмем линейные отношения $c = <(\bar{x}'_i, \bar{x}'_i) : i \in I>$, $d = <(\bar{y}'_i, \bar{y}_i) : y \in I>$ Получаем $cad\rho cbd$, $cbd = b_1$. Если $cad \in LR_I(V)$, т.е. $cad = \omega_A\omega_B^{-1}$, то мы имеем $\omega_A\rho\omega$, $\omega_B^{-1}\rho\omega$, где $b_1\omega = \omega b_1 = \omega$. Отсюда $b_1\rho\omega$. Следовательно, $\xi < \eta(\rho)$, так как $rank\ b_1 < rank\ b = \xi$. Пусть $a_0 = cad$ и $rank\ a_0 \neq 0$, $pr_1a_0 = ker\ a_0 \oplus V_0$, $pr_2a_0 = coker\ a_0 \oplus V'_0$, $V_0 \subseteq V_1$, $V'_0 \in V_3$. Пусть далее $V_3 = V'_0 \oplus M$, где M некоторое фиксированное прямое дополнение. Имеем $M \cap ker\ a_0 = \{\bar{0}\}$. Обозначим $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_k$ базис V'_0, $k < \xi$. Возьмем линейные отношения c_i, удовлетворяющие условиям:

$$c_i = <(\bar{x}, \bar{x}) : x \in [\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_{i-1}, \bar{z}_{i+1}, \ldots, \bar{z}_k] \oplus M>.$$

Очевидно, $rank\ (a_0c_1c_2 \ldots c_k) = 0$, $rank\ (b_1c_1c_2 \ldots c_k) = \xi - k \neq 0$. Аналогично тому, как делали выше, получаем $\xi - k < \eta(\rho)$. Следовательно, $rank\ (a_0c_1c_2 \ldots c_k) = 1$, $a_0c_1c_2 \ldots c_{k-1}\ \rho b_1c_1 \ldots c_{k-1}$, $rank\ (b_1c_1 \ldots c_{k-1}) = \xi - k + 2$. Легко получить $(a_0c_1 \ldots c_{k-1})\ \rho\omega$. Отсюда получаем $\xi - k + 2 < \eta(\rho)$. Имеем $rank\ (a_0c_1 \ldots c_{k-2}) = 2$, $(a_0c_1 \ldots c_{k-2})\rho\ (b_1c_1 \ldots c_{k-2})$, $rank\ (b_1c_1 \ldots c_{k-2}) = \xi - k + 3$. Легко получить $a_0c_1 \ldots c_{k-2}\rho\omega$. Отсюда получаем $\xi - k + 3 < \eta(\rho)$. Последовательно повторяя рассуждения, получим $rank\ b_1 = \xi$ и, следовательно, $\xi < \eta(\rho)$.

Допустим, что ξ – бесконечное кардинально число. Тогда существует такое подпространство $M \subseteq V$, что $\dim M = \xi$, $M \cap V_1 = \{\bar{0}\}$ для любого V_1 с условием $pr_2a = coker\ a \oplus V_3$, $pr_2b = coker\ b \oplus M \oplus V_4$, $pr_1a = ker\ a \oplus V_1$, $pr_1b = ker\ b \oplus V_2$, где V_1, V_2, V_3, $M \oplus V_4$ некоторые фиксированные дополнения. Возьмем линейные отношения: $c = <(\bar{x}, \bar{x}) : \bar{x} \in V_2>$, $d = <(\bar{y}, \bar{y}) : \bar{y} \in M \oplus V_4>$. Мы получим $cad\rho cbd$, $rank\ cbd = \xi$, $rank\ cad = 0$. Отсюда легко получить $\omega\rho cbd$ и, следовательно, $\xi < \eta(\rho)$. Лемма доказана.

3.2.8. ЛЕММА. *Пусть* ρ *– конгруэнция конечного индекса на* $LR(V)$. *Если* a, $b \in LR(V)$, $a\rho b$ *и* $rank\ a \geq \eta(\rho)$, *то элементы* a *и* b *являются* H*-эквивалентными, т.е.* $pr_1a = pr_1b$, $ker\ a = ker\ b$, $pr_2a = pr_2b$ *и* $coker\ a = coker\ b$.

Доказательство. Если $a\rho b$ *и* $rank\ a \geq \eta(\rho)$, то в силу леммы п. 3.2.7 $rank\ a = rank\ b$. Допустим сначала $rank\ a = \eta(\rho)$ и, следовательно, a, $b \in D_{\eta(\rho)}$. Пусть существует $\bar{x} \in pr_1a$, $\bar{x} \notin ker\ a$, $\bar{x} \notin pr_1b$ или $\bar{x} \in ker\ b$, $pr_1a = ker\ a \oplus [x] \oplus M$, где $\dim\ ([\bar{x}] \oplus M) = \eta(\rho)$. Возьмем линейное отношение $c = <(\bar{y}, \bar{y}) : \bar{y} \in [\bar{x}] \oplus M>$. Имеем $ca\rho cb$, $rank\ ca = \eta(\rho)$, $rank\ cb < \eta(\rho)$. Пришли к противоречию с леммой п. 3.2.7. Следовательно, для любого $\bar{x} \in pr_1a$, $\bar{x} \notin ker\ a$ имеем $\bar{x} \in pr_1b$ и $\bar{x} \notin ker\ b$. Аналогично показывается, что для любого $\bar{x} \in pr_1b$, $\bar{x} \notin ker\ b$ имеем $\bar{x} \in pr_1a$ и $\bar{x} \notin ker\ a$. Покажем, что, $ker\ a = ker\ b$. Пусть $\bar{x} \in ker\ a \setminus ker\ b$. Имеем $\bar{x} \notin ker\ b$ и $\bar{x} \in pr_1b$. Возьмем $\bar{y} \in pr_1a$, $\bar{y} \in ker\ a$. Имеем $\bar{x} + \bar{y} \in pr_1a$, $\bar{x} + \bar{y} \notin ker\ a$. Следовательно, $\bar{x} + \bar{y} \in pr_1b$. Получаем $\bar{x} \notin pr_1b$, что противоречиво. Имеем $ker\ a \subseteq ker\ b$. Аналогично доказывается обратное включение. Итак, $ker a = ker\ b$ и $pr_1a = pr_1b$. Аналогично получаем $pr_2a = pr_2b$ и $coker\ a = coker\ b$. Отсюда следует H-эквивалентность a и b.

Пусть $rank\ a > \eta(\rho)$. Докажем, что $ker\ a = ker\ b$. Допустим противное, т.е. $ker\ a \neq ker\ b$. Пусть еще $\bar{x} \in ker\ a \setminus ker\ b$. Возьмем линейное отношение $c = <(\bar{y}, \bar{y}) : \bar{y} \in ker\ a \oplus M>$, где $\dim\ M = \eta(\rho)$ и $pr_1a = ker\ a \oplus M \oplus T >$. Имеем $ca\rho cb$, $rank\ ca = \eta(\rho)$. Используем лемму п. 3.2.7, имеем $rank\ cb = \eta(\rho)$. Получаем $ker\ a = ker\ ca$, $rank\ cb \neq ker\ ca$, $\bar{x} \in ker\ ca$ и $\bar{x} \notin ker\ cb$. Противоречие.

Имеем $\bar{x} \in ker\, ca$ $kera \subseteq kerb$. Аналогично доказываем $kerb \subseteq kera$. Пусть существует $\bar{x} \in pr_1 a$, $\bar{x} \notin ker\, a$. Представим $pr_1a = ker\, a \oplus [\bar{x}] \oplus M \oplus T$, где $\dim([\bar{x}] \oplus M) = \eta(\rho)$. Возьмем линейное отношение $d = <(\bar{y}, \bar{y}) : \bar{y} \in [\bar{x}] \oplus M>$. Имеем $da\rho db$, $rank\, da = \eta(\rho)$, $rank\, ab < \eta(\rho)$. Получаем противоречие с леммой п. 3.2.7. Отсюда следует $pr_1a \subseteq pr_1b$. Аналогично доказывается обратное включение. Аналогично получаем $pr_2a = pr_2b$, $coker\, a = coker\, b$. Итак, H-эквивалентность a и b доказана. Лемма доказана.

3.2.9. ЛЕММА. *Пусть* ρ *– конгруэнция конечного индекса на полугруппе* $LR(V)$ *и* a *линейное отношение такое, что* $rank\, a = r \geq \eta(\rho)$. *Если существует такое линейное отношение* b, *что* $a\rho b$ *и* $a \neq \alpha b$ *для любого* $\alpha \in Z^*$, *то* $r = \eta(\rho)$.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть существует такое b, что $a\rho b$, $a \neq \alpha b$ для любого $\alpha \in Z^*$ и $r \geq \eta(\rho) \geq 1$. Применяя лемму п. 3.2.8, получаем a и b H-эквивалентны.

Из леммы п. 3.2.5 следует, что найдется $\bar{x} \in pr_1 a$ такой, что для любого $\alpha \in F \setminus \{0\}$ выполняется $\bar{y} \neq \alpha \bar{z}$ для некоторых $\bar{y}, \bar{z} \in pr_2\, a$, $(x, y) \in a$, $(\bar{x}, z) \in b$. Представим подпространство pr_2a в виде $pr_2\, a = coker\, a \oplus [\bar{y}] \oplus [\bar{z}] \oplus M \oplus T$, где $\dim M = \eta(\rho) - 1$. Покажем, что любой элемент $\bar{y}_1 \neq \bar{y}$ и $(\bar{x}, \bar{y}_1) \in a$ не принадлежит подпространству $[\bar{y}] \oplus [\bar{z}] \oplus M \oplus T$. Допустим противное, т.е. $\bar{y}_1 \in [\bar{y}] \oplus [\bar{z}] \oplus M \oplus T$. Имеем $\bar{y}_1 = \bar{y} + \bar{y}_0$, где $\bar{y}_0 \in coker\, a$. Отсюда следует $\bar{y}_0 \in [\bar{y}] \oplus [\bar{z}] \oplus M \oplus T$. Противоречие, т.е. $\bar{y}_1 \notin [\bar{y}] \oplus [\bar{z}] \oplus M \oplus T$. Возьмем линейное отношение $d = <(\bar{x}, \bar{x}) : \bar{x} \in [\bar{y}] \oplus M>$. Имеем $da\rho bd$, $rank\, ad = \eta(\rho)$, $rank\, bd = \eta(\rho) - 1$. Получим противоречие с леммой п. 3.2.7. Отсюда следует $r = \eta(\rho)$. Лемма доказана.

3.2.10. Пусть ρ – конгруэнция конечного индекса на $LR(V)$, $a\rho b$ и $rank\, a = \xi > \eta(\rho)$. Из леммы п. 3.2.9 следует $b = \alpha a$ при некотором $\alpha \in Z^*$. Пусть идемпотент $e \in LR(V)$, $ker\, e = coker\, e = ker\, a$, $pr_1a = ker\, a \oplus V_1 = pr_1e = pr_2a$. Тогда из $a\rho\alpha a$ следует $aa^{-1}\rho\alpha a a^{-1}$, $aa^{-1} = e$, $\alpha aa^{-1} = \alpha e$, $e\rho\alpha e$. Положим $Q_e = \{\beta : \beta \in Z^*, e\rho\beta e\}$. Пусть, далее $e_1 \in D_\xi$ единица некоторого H-класса H_{e_1}, $pr_1e_1 = ker e_1 \oplus V_2$, $pr_2e_1 = coker\, e_1 \oplus V_2$ и $(\bar{x}, \bar{x}) \in e_1$ для любого $\bar{x} \in V_2$, где $\{\bar{x}_i\}_{i \in I}$ – базис V_2. Возьмем линейные отношения:

$$t = <(\bar{y}_i, \bar{x}_i), (\bar{y}, \bar{0}) : \bar{y} \in ker\, e_1, i \in I>,$$

$$s = <(\bar{x}_i, \bar{y}_i), (\bar{0}, \bar{z}) : \bar{z} \in coker\, e_1, i \in I>.$$

Из $e\rho\alpha e$ ($\alpha \in Q_e$) получаем $tes\rho\alpha tes$, $tes = e_1$, $\alpha tes = \alpha e_1$, т.е. $e_1\rho\alpha e_1$. Имеем $Q_e \subseteq Q_{e_1}$. Аналогичным способом получаем $Q_{e_1} \subseteq Q_e$. Обозначим Q_e через Q_ξ. Из рефлексивности ρ имеем $e\rho e$, т.е. $1 \in Q_\xi$. Из $e\rho\alpha e$, ($\alpha \in Q_\xi$) следует $\beta e\rho\alpha\beta\, e$. Если $\beta \in Q_\xi$, то из транзитивности ρ получаем $\alpha\beta \in Q_\xi$. Из $e\rho\alpha e$ ($\alpha \in Q_\xi$) получаем $e\rho\alpha^{-1}e$, т.е. $\alpha^{-1} \in Q_\xi$. Таким образом, Q_ξ является подгруппой Z^*. Линейные отношения, которые являются взаимно однозначными линейными преобразованиями на подпространстве V_1, образуют группу $LR(V_1)$. Возьмем линейное отношение $e' = <(\bar{x}, \bar{x}) : x \in V_1>$. Это линейное отношение является единицей в группе $LR(V_1)$. Множество $Q_\xi e' = \{\alpha e' : \alpha \in Q_\xi, e' \in LR(V_1)\}$ является ее нормальным делителем.

Пусть $\nu < \mu$; $e \in D_\mu$, $f \in D_\nu$ единицы H-классов такие, что $pr_2f \subseteq pr_2e$, $coker\, f \supseteq coker\, e$, $pr_1e = kere \oplus V_1$, $pr_2e = coker\, e \oplus V_1$, $pr_1f = ker\, f \oplus V_2$, $pr_2f = coker\, f \oplus V_2$, $(\bar{x}, \bar{x}) \in e$ для любого $\bar{x} \in V_1$, $(\bar{x}', \bar{x}') \in f$ для любого $\bar{x}' \in V_2$ и $V_1 \supseteq V_2$, где V_1, V_2 – некоторые фиксированные дополнения. Если $rank\, f = \eta(\rho)$, то обозначим через N_f класс конгруэнций ρ, содержащий f (он будет нормальным делителем H-класса H_f). Тогда из $\alpha \in Q_\mu$ следует $e\rho\alpha e$ и, следовательно, $fe\rho\alpha fe$. Учитывая $fe = f$, получим: $\alpha \in Q_\nu$, $Q_\mu \subseteq Q_\nu$ при $\nu > \eta(\rho)$; $Q_\mu f \subseteq N_f$ при $\nu = \eta(\rho)$. Эти рассуждения доказывают следующую лемму.

ЛЕММА. *Пусть* $a, b \in LR(V)$, $a\rho b$, $rank\, a = \xi$, $\xi > \eta(\rho)$, $\eta(\rho)$ *конечно,* N_f *–* ρ*-класс, содержащий идемпотент* f *ранга* $\eta(\rho)$. *Тогда* $b = \alpha a$ *при некотором* $\alpha \in Q_\xi$, *где* Q_ξ *– подгруппа группы* Z^*, *определяемая конгруэнцией* ρ *для некоторого* $\xi > \eta(\rho)$. *Причем из* $\nu < \mu$ *следует* $Q_\mu \subseteq Q_\nu$ *и* $Q_\xi f \subseteq N_f$ *при* $\xi > \eta(\rho)$.

3.2.11. Пусть n – целое положительное число; $\nu, \nu' \in \nu\ (V)$ (см. п. 3.2.4), из которых или хотя бы одно равно 1 (при $n = 1$), или превосходящее $\aleph_0$ (при любом n); Q_μ ($n + 1 \leq \mu \leq \dim V$) – подгруппы группы Z^*, удовлетворяющие условию $Q_\xi \subseteq Q_\mu$ при $\mu \leq \xi$. Пусть далее e – идемпотент некоторого H-класса $H_e \subseteq D_n$, N_e – нормальный делитель группы H_e такой, что $Q_{n+1}e \subseteq N_e$. Определим отношение σ на полугруппе $LR(V)$, следующим образом:

$a, b \in LR_n(V)$ и $\dim pr_1a / (pr_1a \cap pr_1b) < \nu$, $pr_1b / (pr_1a \cap pr_1b) < \nu$,
$\dim pr_2a / (pr_2a \cap pr_2b) < \nu'$, $pr_2b / (pr_2a \cap pr_2b) < \nu$,
$a, b \in D_n$ и существуют такие $c, d \in D_n$, что $a, b \in cN_ed$,
$a, b \in D_\mu$ ($\mu > n$) и $b = \alpha$, а при некотором $\alpha \in Q_\mu$.

3.2.12. Следующая теорема является основой в нашей работе.

ТЕОРЕМА. *Отношение* σ *является конгруэнцией конечного индекса на полугруппе LR(V). Любая конгруэнция конечного индекса на полугруппе LR(V) совпадает с одним из отношений вида* σ.

Доказательство. Отношение $\tau_1 = \sigma \cap (LR_n(V) \times (LR_n(V))$ является эквивалентностью. Покажем это.

Рефлексивность и симметричность очевидна. Пусть $a\tau_1 b$ и $b\tau_1 c$, т.е. $a, b, c \in LR_n(V)$ и $\dim pr_1a / (pr_1a \cap pr_1b) < \nu$, $\dim pr_1b / (pr_1a \cap pr_1b) < \nu$, $\dim pr_1b / (pr_1b \cap pr_1c) < \nu$, $\dim pr_1c / (pr_1b \cap pr_1c) < \nu$, $\dim pr_2a /(pr_2a \cap pr_2b) < \nu'$, $\dim pr_2b /(pr_2a \cap pr_2b) < \nu'$, $\dim pr_2b / (pr_2b \cap pr_2c) < \nu'$, $\dim pr_2c /(pr_2b \cap pr_2c) < \nu'$. Если $\nu = \nu' = 1$, то транзитивность очевидна.

Пусть $\nu \geq \aleph_0$. Покажем, что и $\dim pr_1a / (pr_1a \cap pr_1c) < \nu$. Представим $pr_1a \cap pr_1c = (pr_1a \cap pr_1b \cap \cap pr_1c) \oplus T_1$, где T_1 – некоторое фиксированное дополнение;

$pr_1a \cap pr_1b = (pr_1a \cap pr_1b \cap pr_1c) \oplus T_2$, где T_2 – некоторое фиксированное дополнение;

$pr_1a = (pr_1a \cap pr_1b \cap pr_1c) \oplus T_1 \oplus T_2 \oplus A$, где A – некоторое фиксированное дополнение;

$pr_1b = (pr_1a \cap pr_1b \cap pr_1c) \oplus T_2 \oplus B$, где B – некоторое фиксированное дополнение.

Имеем $\dim pr_1a / (pr_1a \cap pr_1b) = \dim (T_1 \oplus A) < \nu$,

$\dim (pr_1b / (pr_1b \cap pr_1c) = \dim (T_2 \oplus B) < \nu$.

Отсюда следует $\dim A < \nu$ и $\dim T_2 < \nu$. Используя это, получаем $\dim pr_1a /(pr_1a \cap pr_1c) = \dim (T_2 \oplus A) < \nu$. Аналогично получаем $\dim pr_1c / (pr_1a \cap pr_1c) < \nu$. Если $\nu' \geq \aleph_0$, то совершенно аналогично получаем $\dim pr_2a /(pr_2a \cap pr_2c) < \nu'$ и $\dim pr_2c / (pr_2a \cap pr_2c) < \nu'$. Отсюда τ_1 транзитивно и, следовательно, является отношением эквивалентности.

Отношение $\tau_2 = \sigma \cap (D_n \times D_n)$ тоже является отношением эквивалентности.

Отношение $\tau_\mu = \sigma \cap (D_\mu \times D_\mu)$ при $n + 1 \leq \mu \leq \dim V$, очевидно, является отношением эквивалентности.

Таким образом, отношение σ является объединением непересекающихся отношений эквивалентности: $\sigma = \tau_1 \cup \tau_2 \cup (\cup\tau_\mu)$.

Следовательно, σ является отношением эквивалентности.

Покажем, что отношение эквивалентности σ является конгруэнцией. Пусть $a\sigma b$ и $c, d \in LR(V)$.

Если $a, b \in LR_n(V)$ и $\dim pr_1a / (pr_1a \cap pr_1b) < \nu$, $\dim pr_1b /(pr_1a \cap pr_1b) < \nu$, $\dim pr_2a /(pr_2a \cap pr_2b) < \nu'$, $\dim pr_2b /(pr_2a \cap pr_2b) < \nu'$, то $cad, cbd \in LR_n(V)$, так как $LR_n(V)$ идеал в $LR(V)$. Докажем, что

$$\dim pr_1\, cad /(pr_1cad \cap pr_1cbd) < \nu,\ \dim pr_1cbd / pr_1cad \cap pr_1cbd) < \nu, \qquad (4)$$
$$\dim pr_2\, cad / (pr_2cad \cap pr_2cbd) < \nu',\ \dim pr_2cbd /(pr_2cad \cap pr_1cbd) < \nu'.$$

Представим $pr_1\, c = ker c \oplus V_1$, $pr_2\, c = coker\, c \oplus V_2$, где V_1, V_2 – некоторые фиксированные дополнения. Рассмотрим подпространства:

$$A_1 = \{\bar{x} : (\bar{x}, \bar{y}) \in c,\ \bar{y} \in pr_2c \cap pr_1a\},\ B_1 = \{\bar{x} : (\bar{x}, \bar{y}) \in c,\ \bar{y} \in pr_2c \cap pr_2b\}.$$

Получаем $pr_1ca = ker\, c \oplus (V_1 \cap A_1)$, $pr_1cb = ker\, c \oplus (V_1 \cap B_1)$. Если для любых подпространств, V'', V''' имеем $V' \cap (V'' \oplus V''') = \{\bar{0}\}$, то $(V' \oplus V''_2) \cap (V' \cap \oplus V''') = V' \oplus (V'' \oplus V''')$.

Поэтому $pr_1ca \cap pr_1\, cb = ker\, c \oplus (V_1 \cap A_1 \cap B_1)$. Обозначим через C некоторое фиксированное дополнение $ker\, c \oplus (V_1 \cap A_1 \cap B_1)$ в $ker\, c \oplus (V_1 \cap B_1)$. Покажем, что $\dim C < \nu$, т.е. выполняется неравенство $\dim pr_1ca / (pr_1ca \cap pr_1cb) < \nu$. Рассмотрим подпространство $C_1 = \{\bar{y} : (\bar{x}, \bar{y}) \in c,\ \bar{x} \in C,\ \bar{y} \in V_2 \cap pr_1a\}$. Ясно, что имеем $C_1 \cap (pr_2c \cap pr_2a \cap pr_2b) = \{\bar{0}\}$ и $\dim C = \dim C_1$. Имеем $C_1 \oplus (pr_2c \cap pr_1a \cap pr_1b) = pr_2c \cap pr_1a$ и $C_1 \cap pr_1a \cap pr_1b = \{\bar{0}\}$, так как $C_1 \subseteq pr_2c$. Пусть C_2 – некоторое фиксированное дополнение подпространства $(pr_1a \cap pr_1b) \oplus C_1$ в pr_1a. Из условия следует $\dim (C_1 \oplus C_2) < \nu$. Следовательно, $\dim C < \nu$. Аналогично доказывается $\dim pr_1cb /(pr_1ca / pr_2cb) < \nu$.

Покажем, что $\dim pr_2ca / (pr_2ca \cap pr_2cb) < \nu'$, $\dim pr_2cb / (pr_2ca \cap pr_2cb) < \nu'$. Пусть $pr_2ca \cap pr_2b = (pr_2ca \cap pr_2cb) \oplus A_2$, где A_2 – некоторое фиксированное дополнение, $pr_2a \cap pr_2cb = (pr_2ca \cap pr_2cb) \oplus B_2$, где B_2 – некоторое фиксированное дополнение. Имеем $a, b \in LR_n(V)$. Отсюда следует $\dim A_2 < n \leq \nu'$.

Представим $pr_2ca = pr_2ca \cap pr_2cb \oplus A_2 \oplus A_3$, $pr_2cb = pr_2ca \cap pr_2cb \oplus B_2 \oplus B_3$. Отсюда получаем $\dim (A_2 \oplus A_3) \leq \nu'$, $\dim (B_2 \oplus B_3) \leq \nu'$. Следовательно, $\dim pr_2ca / (pr_2ca \cap pr_2cb) < \nu'$, $\dim pr_2cb / (pr_2ca \cap pr_2cb) < \nu'$.

Из полученных выше неравенств, рассуждая аналогично, получим неравенства (4).

Пусть теперь $a, b \in D_n$ и, следовательно, $a = pa_1g$, $b = pb_1g$ при некоторых $a, b \in N_e$, $p, g \in D_n$. Если $rank\, cp = rank\, gd = n$, то по определению отношения σ имеем $cad\sigma cbd$, так как $cpa_1gd\sigma cpb_1gd$ и $pr_1cad = pr_1cbd$, $pr_2cad = pr_2cbd$. Если же $rank\, cp < n$ или $rank\, gd < n$, то $cad, cbd \in LR_n(V)$ и выполнение неравенства (4) доказывается аналогично доказательству выше.

Пусть $a, b \in D_\mu$ ($\mu > n$). Отсюда следует $b = \alpha a$, $\alpha \in Q_\mu$. Имеем либо $cad \in LR_n(V)$ и выполняется неравенства (1), либо cad $\in D_\xi$ ($n \le \xi \le \mu$), выполняются неравенства (4) и в силу выбора подгруппы Q_ν ($n + 1 \le v \le \dim V$) $cad\ \sigma cbd$.

Пусть теперь σ – произвольная конгруэнция конечного индекса на полугруппе $LR(V)$, $\sigma_0 = \sigma \cap (LR_1(V) \times LR_1(V))$ конгруэнция и σ_0 по лемме 2.4 определяет кардинальные числа $\nu, \nu' \in \nu(V)$ такие, что из $\omega_A\omega_C^{-1}\sigma_0\omega_B\omega_D^{-1}$ следует $\dim A/(A \cap B) < \nu$, $\dim B/(A \cap B) < \nu$, $\dim C/(C \cap D) < \nu'$, $\dim D/(C \cap D) < \nu'$.

По определению индекса конгруэнции, учитывая вышесказанное и лемму (п. 3.2.4), имеем $a\sigma b$ для любых $a, b \in LR_{\eta(\rho)}(V)$ и $\dim pr_1a/(pr_1a \cap pr_1b) < \nu$, $\dim pr_1b/(pr_1a \cap pr_1b) < \nu$, $\dim pr_2a/(pr_2a \cap pr_2b) < \nu'$, $\dim pr_2b/(pr_2a \cap pr_2b) < \nu'$.

По лемме п. 3.2.2 имеем $\eta(\rho_0) \le \nu$ и $\eta(\rho) \le \nu'$.

Если $a\sigma b$ и rank $a = \eta(\rho)$, то $rank\ a = rank\ b$. Ограничение конгруэнции σ на $LR_{\eta(\rho)+1}(V)$ является конгруэнцией, и поскольку $LR_{\eta(\rho)}(V)$ является σ-классом, то σ индуцирует конгруэнцию σ' на $LR_{\eta(\rho)+1}(V) / LR_{\eta(\rho)}(V)$. В силу п. 3.1.9 конгруэнции σ' соответствует нормальный делитель N произвольного H-класса из $LR_{\eta(\rho)+1}(V) / LR_{\eta(\rho)}(V)$, являющегося группой, и существуют такие $c, d \in LR_{\eta(\rho)+1}(V) / LR_{\eta(\rho)}(V)$, $a, b \in cNd$. Поскольку $a, b \in D_n$, то $c, d \in D_n$.

Если $a\sigma b$ и $a \in D_\nu$ ($\nu > \eta(\rho)$), то из леммы п. 3.2.10 следует, что $b = \alpha a$ при некотором $\alpha \in Q_\xi$ и подгруппа Q_ξ удовлетворяет условиям леммы п. 3.2.10. Теорема доказана.

3.2.13. СЛЕДСТВИЕ. *Если V – n-мерное векторное пространство над полем F, то получаем результат автора* [2].

3.2.14. СЛЕДСТВИЕ. Если *V – n-мерное векторное пространство над полем F, а линейные отношения – это линейные преобразования, то получаем результат А.И. Мальцева* [1].

3.2.15. ЗАМЕЧАНИЕ. *Из теоремы п. 4.2.12 следует, что любая конгруэнция конечного индекса* σ *на полугруппе* $LR(V)$ *полностью определяется натуральным числом* n*, кардинальными числами* $\nu, \nu' \in \nu(V)$*, нормальным делителем* N_e *и невозрастающей последовательностью подгрупп* $Q_\xi \subseteq Z^*$ $(n + 1 \le \xi \le \dim V)$ *таких, что* $Q_{n+1}e \subseteq N_e$*. Поэтому запись* $\sigma = \sigma(n, \{Q_\xi\}, N_e, \nu, \nu')$ *полностью определяет конгруэнцию.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев, А.И. Мультипликативные сравнения матриц / А.И. Мальцев // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 90, № 3. – С. 333 – 335.
2. Наумик, М.И. Конгруэнции на полугруппе линейных отношений / М.И. Наумик // Вопросы алгебры. – Вып. 2. – Минск: Университетское. – 1986. – С. 114 – 120.
3. Наумик, М.И. Стабильные квазипорядки по подполугруппе $LR_1(V)$ и главных факторах полугруппы линейных отношений / М.И. Наумик // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 1998. – № 2. – С. 75 – 78.
4. Наумик, М.И. Конгруэнции на полугруппе нулевых линейных отношений / М.И. Наумик // Теория полугрупп и ее приложения: межвуз. сб. науч. тр.; Саратов. ун-т; редкол.: Г.И. Житомирский (отв. ред.) [и др.]. – Вып. 11. – 1993. – С. 30 – 35.
5. Глускин, Л.М. Вполне простые полугруппы / Л.М. Глускин // Ученые зап. Харьк. пед. ин-та. – Т. 18. – 1956. – С. 41 – 55.
6. Tamura, T. Decompositijns of a completely simple semigrop / T. Tamura // Osaka Math. J. – 1960. – T. 12, № 2. – C. 269 – 275.
7. Preston, G.B. Gongruences on completely 0-simple semigroups / G.B. Preston // Proc. Lond. Math. Soc. – 1961. – Ser. 3, T. 11, № 43. – C. 557 – 576.
8. Lallement, G. A note on congruences on Rees matrix semigroups / G. Lallement // Semigroup Forum. – 1974. – T. 8, № 1. – C. 89 – 93.
9. Климов, В.Н. О конгруэнциях вполне 0-простых полугрупп / В.Н. Климов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем., механика. – 1974. – № 6. – С. 136.
10. Клиффорд, Г. Алгебраическая теория полугрупп / Г. Клиффорд, А. Престон. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 285 с.
11. Клиффорд, Г. Алгебраическая теория полугрупп / Г. Клиффорд, А. Престон. – М.: Мир, 1972. – Т. 2. – 422 с.
12. Diedonne, J. Sur les groupes classiques (Actual scient. et industr. № 1040, publish. Inst. math. Univ. Strasbourg, 6) / J. Diedonne. – Paris: Hermann., 1958.
13. Супруненко, Д.А. Группы матриц / Д.А. Супруненко. – М.: Наука, 1972. – 352 с.

Поступила 16.06.2008