УДК 512. 542

ФАКТОРИЗАЦИИ ХОЛЛОВЫМИ ПОДГРУППАМИ

Т.В. ТИХОНЕНКО
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Рассматриваются только конечные группы. Строение факторизуемых конечных групп зависит от свойств сомножителей. Исследование вопросов с факторизацией стимулируется стремлением найти наиболее простой способ описать строение группы, сводя его к строению сомножителей. Подгруппу M называют дополняемой в группе G, если существует такая подгруппа K группы G, что $M \cap K=1$ и G = MK. Группы с дополняемыми подгруппами рассматривались в работах Ф. Холла, Н.В. Баевой (Черниковой), С.Н. Черникова и других авторов. Дополняемость некоторой системы подгрупп группы G часто в значительной степени определяет ее строение. Нами в этом направлении получены следующие результаты.

Доказывается, что конечная группа, представляемая в виде произведения двух холловых подгрупп, в каждой из которых их абелево пересечение дополняется абелевыми подгруппами, разрешима.

Доказывается, что неабелевы композиционные факторы конечной группы изоморфны $L_2(7)$, если группа представима в виде произведения двух холловых подгрупп, в каждой из которых их нильпотентное пересечение, дополняется нильпотентными подгруппами.

1. Введение

Известно, что строение конечных факторизуемых групп зависит от свойств сомножителей. Данной тематике посвящено большое количество работ. Н. Ито [1] установил разрешимость конечной группы, представимой в виде произведения двух абелевых подгрупп. О. Кегель [2] и Х. Виландт [3] показали, что группа разрешима, если оба сомножителя нильпотентны. С использованием теоремы о классификации простых неабелевых групп Л.С. Казарин [4] установил нормальное строение конечной группы, представимой в виде произведения разрешимых подгрупп.

В настоящей статье доказываются следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть конечная группа $G = AB$, где A и B – холловы подгруппы в группе G, $A \cap B$ – абелева подгруппа и $A \cap B$ дополняется в A и B абелевыми подгруппами A_1 и B_1. Тогда G разрешимая группа.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть конечная группа $G = AB$, где A и B – холловы подгруппы в группе G, $A \cap B$ – нильпотентная подгруппа и $A \cap B$ дополняется в A и B нильпотентными подгруппами A_1 и B_1. Тогда неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $L_2(7)$.*

При доказательстве теоремы 1 не используется теорема о классификации простых неабелевых групп.

2. Основные используемые понятия

Определения и обозначения, в основном, стандартны. Их можно найти в [5 – 6]. Приведем некоторые из них:

- G – конечная группа;
- $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей порядка группы G;
- G_p – некоторая силовская p-подгруппа группы G, где $p \in \pi(G)$;
- Z_n – циклическая группа порядка n;
- $L_n(p^m)$ – проективная специальная линейная группа степени n над полем из p^m элементов;
- J_1 – первая группа Янко;
- ${}^2G_2(q)$ – семейство групп Ри, где $q = 3^{2n+1}$;
- $[A]B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B;
- $D_{2n} = \left\langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, a^b = a^{-1} \right\rangle$ – диэдральная группа порядка $2n$;
- (a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b;
- $S(G)$ – разрешимый радикал группы G.

Подгруппу M называют дополняемой в группе G, если существует такая подгруппа K группы G, что $M \cap K = 1$ и $G = MK$.

Под K-группой понимается группа, все композиционные факторы которой являются известными в настоящее время простыми группами.

3. Предварительные результаты

Нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

3.1 ЛЕММА [5, лемма Чунихина]. Если $G = AB$ и $A \cap B$ содержит подгруппу $1 \neq X \lhd A$, то X содержится в $B_G = \bigcap_{g \in G} B^g$.

3.2. ЛЕММА ([5]). Если $G = AB$, $(|A|,|B|) = 1$ и $N \lhd G$, то $N = (N \cap A)(N \cap B)$.

3.3. ЛЕММА [1]. Пусть в группе $L_2(p^n)$ N – нормализатор силовской p-подгруппы, D – диэдральная группа порядка $2(2^n + 1)$ при $p = 2$ и $p^n + 1$ при $p > 2$, Z – циклическая подгруппа индекса 2 в D, S_4 и S_4^* – несопряженные в $L_2(p^n)$ симметрические группы степени 4, A_4 и A_4^* (A_5 и A_5^*) – несопряженные в $L_2(p^n)$ знакопеременные группы степени 4 (соответственно 5). Группа $L_2(p^n)$ допускает только следующие факторизации, с точностью до сопряженных подгрупп:

А. $L_2(2^n) = ND = N\mathrm{Z},\ n \geq 2$.

Б. Пусть $p > 2$. $L_2(p^n) = ND$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}(p^n - 1)$ – нечетное число.

В. При $p^n \geq 61$ и $p > 2$ группа $L_2(p^n)$ не имеет никаких факторизаций, кроме указанной в Б.

Г. Пусть $p > 2$ и $p^n \leq 59$. Тогда

1) $L_2(7) = ND = NS_4 = NS_4^* = G_7 S_4 = G_7 S_4^*$;
2) $L_2(9) = NA_5 = NA_5^* = S_4 A_5 = S_4^* A_5^* = A_5 A_5^* = A_4 A_5^* = A_4^* A_5 BB$;
3) $L_2(11) = ND = NA_4 = NA_5 = NA_5^* = G_{11} A_5 = G_{11} A_5^*$;
4) $L_2(19) = ND = NA_5 = NA_5^*$;
5) $L_2(29) = NA_5 = NA_5^* = KA_5 = KA_5^*$, где $K \subseteq N$ и $|K| = 7 \cdot 29$;
6) $L_2(59) = ND = NA_5 = NA_5^*$;
7) $L_2(p^n) = ND$, где p^n =23, 27, 31, 43, 47, 51.

3.4. ЛЕММА [7]. Пусть G – конечная *K*-группа. Предположим, что A и B собственные разрешимые подгруппы в группе G взаимно простых порядков, причем $G = AB$. Тогда любой композиционный неабелев фактор группы G либо имеет простой порядок, либо изоморфен одной из следующих групп: $L_2(2^n),\ n \geq 2;\ L_2(p^n),\ p^n \equiv -1(\mathrm{mod}\,4);\ L_3(3);\ M_{11}$.

3.5. ЛЕММА [8]. Пусть G – простая неабелева группа с абелевой силовской 2-подгруппой. Тогда $G \in \{L_2(2^n),\ n \geq 2;\ J_1;\ {}^2G_2(p^n);\ L_2(p^n),\ p^n \equiv \pm 3(\mathrm{mod}\,8)\}$.

3.6. ЛЕММА. Пусть конечная группа $G = AB$, где A и B – холловы подгруппы группы G и $A \bigcap B$ дополняется в A и B подгруппами A_1 и B_1. Тогда подгруппы A_1, B_1 и $A \bigcap B$ являются холловыми в G.

Доказательство. По условию $G = AB$, где $A = A_1(A \cap B)$, $B = B_1(A \cap B)$ и $A_1 \cap A \cap B = B_1 \cap A \cap B = 1$. Отсюда следует, что $G = A_1(A \bigcap B)B = A_1 B = A(A \bigcap B)B_1 = AB_1$. Если $A_1 \cap B \neq 1$, то $A_1 \bigcap B \subseteq A \bigcap B$, что невозможно, так как $A_1 \bigcap A \bigcap B = 1$. Получили, что $A_1 \bigcap B = 1$. Точно также $A \bigcap B_1 = 1$.

Так как $G = A_1 B$ и $A_1 \bigcap B = 1$, то $|G| = \frac{|A_1||B|}{|A_1 \cap B|} = |A_1||B|$. Отсюда следует, что $|A_1| = \frac{|G|}{|B|} = [G : B]$. Поскольку B – холлова подгруппа в группе G, то $([G : B], |B|) = 1$, а следовательно $(|A_1|, |B|) = 1$. Так как $|G| = |A_1||B|$, поэтому A_1 – холлова подгруппа в группе G.

Аналогично можно показать, что B_1 – холлова подгруппа в группе G.

Так как $A = A_1(A \cap B)$, где A, A_1 – холловы подгруппы в группе G, то $A \bigcap B$ – холлова подгруппа в группе G. Лемма доказана.

3.7 ЛЕММА [2, 3]. Если конечная группа $G = AB$, где A и B нильпотентные подгруппы в группе G, то группа G разрешима.

3.8 ЛЕММА. Пусть $G = L_2(p^n)$ – конечная простая неабелева группа, p – нечетное простое число. Если $G = AB$, где A – нормализатор силовской *p*-подгруппы в группе *G*, а B – диэдральная группа порядка $p^n + 1$, то группа G не удовлетворяет условиям теоремы 1 и теоремы 2.

Доказательство. Согласно лемме 3.3, $L_2(p^n) = AB$ в том и только в том случае, когда $\frac{1}{2}(p^n - 1)$ – нечетное число. Так как $|A| = p^n \frac{p^n - 1}{2}$ и $|B| = p^n + 1$, то $A \bigcap B = 1$. По условиям теоремы 1 и теоремы 2 получим, что $A = A_1$, $B = B_1$. Следовательно, группа G разрешима либо по теореме Ито, либо по теореме Кегеля – Виландта. Противоречие с тем, что G – простая неабелева группа. Лемма доказана.

4. Доказательства основных результатов

Пусть группа G – минимальный контрпример к теореме 1 и теореме 2.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что G – простая неабелева группа. По лемме 3.6 подгруппы A_1, B_1, $A\cap B$ холловы в G, следовательно, силовская 2-подгруппа группы G содержится в одной из следующих групп: $A\cap B$, A_1, B_1. По условию теоремы силовская 2-подгруппа группы G абелева. Используя лемму 3.4 и 3.5, приходим к выводу, что группа G одна из следующих групп: $L_2(2^n)$, где $n \ge 2$; $L_2(p^n)$, где $p^n \equiv -1(\mathrm{mod}\,4)$ и в то же время $p^n \equiv \pm 3(\mathrm{mod}\,8)$.

Из леммы 3.3 следует, что возможны следующие случаи.

1. Пусть $G = L_2(2^n)$, $n \ge 2$. Группа G допускает только две факторизации: $G = ND = NZ$, где $N = [\mathrm{Z}_{2^n}]\mathrm{Z}_{2^n-1}$, $D = [\mathrm{Z}_{2^n+1}]\mathrm{Z}_2$, $Z = \mathrm{Z}_{2^n+1}$. Если $G = ND$, то, согласно лемме 3.6, $N\bigcap D$ – холлова подгруппа в группе $G = L_2(2^n)$. С другой стороны, $|N\bigcap D| = 2$ и $N\bigcap D$ не является холловой подгруппой в группе G. Если $G = NZ$, то $N\bigcap Z = 1$. Так как N не является абелевой группой, то этот случай невозможен.

2. Пусть $G = L_2(p^n)$, где $p^n \equiv \pm 3(\mathrm{mod}\,8)$ и в то же время $p^n \equiv -1(\mathrm{mod}\,4)$.

Если $p^n \ge 61$, то $G = AB = ND$, где $N = [\mathrm{Z}_{p^n}]\mathrm{Z}_{\frac{p^n-1}{2}}$, $D = [\mathrm{Z}_{\frac{p^n+1}{2}}]\mathrm{Z}_2$, и $\frac{1}{2}(p^n - 1)$ – нечетное число. Этот случай исключается леммой 3.8. Если $p^n \le 59$, то $p^n = 11,\ 19,\ 27,\ 35,\ 43,\ 51,\ 59$. Здесь по лемме 3.3 либо $G = ND$, что невозможно по лемме 3.8, либо из леммы 3.3 следует, что один из сомножителей изоморфен A_5. Противоречие с тем, что A и B – разрешимые группы.

Следовательно, группа G непростая.

Пусть $S(G) \ne 1$ и N – минимальная нормальная разрешимая подгруппа в группе G.

Если $AN = G$ или $BN = G$, то группа G будет разрешимой, поскольку A, B и $N \lhd G$ являются разрешимыми подгруппами в G. Следовательно, $AN \ne G$ и $BN \ne G$.

Рассмотрим факторгруппу $G/N = AN/N \cdot BN/N$, где $AN/N \cong A/A\bigcap N$, $BN/N \cong B/B\bigcap N$.

Из условия теоремы 1 A и B – холловы подгруппы группы G, поэтому AN/N и BN/N является холловыми подгруппами факторгруппы G/N.

Заметим, что $AN/N = A_1(A\cap B)N/N = A_1N/N \cdot (A\cap B)N/N$ и $BN/N = B_1(A\cap B)N/N = B_1N/N \cdot (A\cap B)N/N$, где $(A\cap B)N/N \cong (A\cap B)/(A\cap B)\cap N$, $A_1N/N \cong A_1/A_1\cap N$ и $B_1N/N \cong B_1/B_1\cap N$, поэтому A_1N/N, B_1N/N, $(A\cap B)N/N$ являются абелевыми подгруппами в G/N. Причем $A_1N/N \bigcap (A\cap B)N/N = (A_1\cap A\cap B)N/N = N/N = \bar{1}$, $B_1N/N \bigcap (A\cap B)N/N = (B_1\cap A\cap B)N/N = N/N = \bar{1}$ и $AN/N \bigcap BN/N = (A\cap B)N/N \cong A\cap B/A\cap B\cap N$ является абелевой подгруппой в факторгруппе G/N.

Мы показали, что G/N удовлетворяет условиям теоремы 1. Так как G – минимальный контрпример к теореме, то G/N разрешимая группа. Поскольку N – разрешимая подгруппа, то группа G – разрешима. Противоречие с условием минимальности контрпримера.

Следовательно, $S(G) = 1$. Пусть N – минимальная нормальная неразрешимая подгруппа в группе G. Тогда $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы, для любого натурального i.

Так как $N \lhd G$, то по лемме 3.2 $N = (A\cap N)(B\cap N)$ и условия теоремы 1 выполнены для подгруппы N. Так как $|N| < |G|$ и G – минимальный контрпример, то N – разрешима, что невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему 1.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что G – простая неабелева группа. По лемме 3.6 $G = AB = A_1B = AB_1$, $(|A_1|,|B|) = (|A|,|B_1|) = 1$. По условию теоремы 2 $A = A_1(A\bigcap B)$, где A_1, $A\bigcap B$ – нильпотентные подгруппы, а значит по лемме 3.7 A разрешимая подгруппа в группе G. Аналогично, $B = B_1(A\bigcap B)$ – разрешимая подгруппа в группе G.

По лемме 3.4 G – конечная *K*-группа и любой композиционный неабелев фактор группы G либо имеет простой порядок, либо изоморфен одной из следующих групп: $L_2(2^n)$, $n \geq 2$; $L_2(p^n)$, $p^n \equiv -1(\mathrm{mod}\,4)$; $L_3(3)$; M_{11}.

Рассмотрим эти случаи.

1. Пусть $G = L_2(2^n)$, $n \geq 2$. По лемме 3.3 группа G допускает только следующие факторизации: $G = ND = NZ$. Если $G = ND$, то $|N \bigcap D| = 2$ и $N \bigcap D$ не является холловой подгруппой в группе G. Противоречие с тем, что согласно лемме 3.6 $N \bigcap D$ – холлова подгруппа в $G = L_2(2^n)$. Если $G = NZ$, то $N \bigcap Z = 1$ и N не является нильпотентной подгруппой в группе G, что невозможно по условию теоремы 2.

2. Пусть $G = L_2(p^n)$, $p^n \equiv -1(\mathrm{mod}\,4)$. Случай для $p^n \geq 61$ невозможен по лемме 3.8. Если $p^n \leq 59$, то $p^n = 7, 11, 19, 23, 27, 31, 43, 47, 51, 59$. В этом случае из леммы 3.3 следует, что либо один из сомножителей изоморфен A_5, что противоречит условию теоремы 2, либо группа G одна из следующих групп:

(i) $G = L_2(7)$. Тогда $L_2(7) = NS_4$, $A \bigcap B = Z_3$ и данная факторизация удовлетворяет условию теоремы 2.

(ii) $G = L_2(11)$. Тогда $L_2(11) = NA_4 = ([Z_{11}]Z_5)([Z_2 \times Z_2]Z_3)$, $N \bigcap A_4 = 1$ и N – не нильпотентная подгруппа, противоречие с условием теоремы 2.

(iii) Факторизация $G = ND$ исключается леммой 3.8.

3. Пусть $G = L_3(3)$. Напомним, что $G = AB = A_1B = AB_1$. Порядок $L_3(3)$ равен $2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$. Пусть 13 делит порядок подгруппы A, тогда из [9] следует, что $A = Z_{13}$ или $A = [Z_{13}]Z_3$. Если $A = Z_{13}$, то $A_1 = Z_{13}$ и $A \bigcap B = 1$. Тогда $|B| = 2^4 \cdot 3^3$. Из [9] следует, что $B = 3^2 : 2S_4$. Так как $A \bigcap B = 1$, то $B = B_1$. Однако группа $3^2 : 2S_4$ не является нильпотентной. Если $A = [Z_{13}]Z_3$, то A не является холловой подгруппой в группе G, что невозможно.

4. Пусть $G = M_{11}$. Порядок M_{11} равен $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Пусть 11 делит порядок подгруппы A. Тогда из [9] для подгруппы A возможны следующие случаи. Если $A = Z_{11}$, то $A \bigcap B = 1$ и $B = B_1$. Тогда из [9] следует, что $B = A_6^{\bullet}2$, но $A_6^{\bullet}2$ не является разрешимой группой. Если $A = [Z_{11}]Z_5$, то по лемме 3.1 $A_1 = Z_{11}$ и $A \cap B = Z_5$. Тогда $|B_1| = 2^4 \cdot 3^2$ и из [9] следует, что $B_1 = 3^2 : Q_8^{\bullet}2$ – не нильпотентная подгруппа. Случай $A = L_2(11)$ невозможен, так как $L_2(11)$ простая группа. Следовательно, $G = L_2(7)$.

Пусть G не простая группа и N – минимальная нормальная подгруппа в группе G. Как и в случае теоремы 1 показывается, что G/N удовлетворяет условиям теоремы 2, а поэтому неабелевы композиционные факторы G/N – это в точности группы, изоморфные $L_2(7)$. Если N – элементарная абелева, то очевидно, что неабелевыми факторами группы G являются группы $L_2(7)$. Если N – прямое произведение простых неабелевых групп, то из леммы 3.2 и по индукции $N = L_2(7) \times ... \times L_2(7)$, а значит все неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $L_2(7)$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ito, N. Über das Produkt von ywei abelshen Gruppen / N. Ito // Math. Z. – 1955. – Vol. 62. – P. 400 – 401.
2. Kegel, O.H. Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // J. Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 90 – 93.
3. Wielandt, H. Über das paarweise vertauschebaren nilpotenten Gruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1951. – Vol. 55. – P. 1 – 7.
4. Kazarin, L.S. Groups which are the product of two solvable subgroups / L.S. Kazarin // Comm. Algebra. – 1986. – Vol. 14. – P. 1001 – 1066.
5. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin; Heidelberg; New York, 1967. – 793 c.
6. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein. – New York: Harper and Row, 1968. – 527 c.
7. Fisman, E. On product of two solvable subgroups / E. Fisman // J. Algebra. – 1983. – Vol. 80, № 2. – P. 517 – 536.
8. Walter, J.H. The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups / J.H. Walter // J. Ann. Math. – 1969. – Vol. 89. – P. 405 – 514.
9. Atlas of Finite Groups / J.H. Conway [and others]. – Oxford, 1985. – P. 252.

Поступила 24.04.2008