УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ФАКТОРИЗУЕМЫХ ГРУППАХ

д-р физ.-мат. наук, проф. Э.М. ПАЛЬЧИК
(Полоцкий государственный университет);
канд. физ.-мат. наук, доц. В.Э. ГАРИСТ
(Могилевский государственный университет продовольствия)

Вопросы факторизации конечных групп в виде $X = A \cdot B$ с собственными подгруппами A и B занимают одно из центральных мест в теории конечных групп. К настоящему времени известны факторизации максимальными подгруппами всех конечных простых групп. Однако нормальное строение не простых факторизуемых конечных групп сохраняет интригу и используется в приложениях.

В частности, представляет интерес нормальное строение конечной группы $X = A \cdot B$, у которой факторы A и B имеют «небольшое» пересечение $A \cap B$. Целью этой статьи является установление композиционного строения группы $X = A \cdot B$, у которой $(|A|, |B|) = p^a$, $a \geq 1$, $p \geq 5$, $B = N(X_p)$.

1. Введение

В работе используются стандартные обозначения и терминология теории конечных групп, которые можно найти в [1, 2]. Для удобства приведем здесь некоторые из них.

Пусть $\mathfrak{R}$ – некоторое множество групп.

Группа X называется *кф* $\mathfrak{R}$ – свободной, если она не имеет ни одного композиционного фактора, изоморфного группе из множества $\mathfrak{R}$.

Группа X называется pd -группой, если простое число p делит ее порядок $|X|$; X_p – силовская p-подгруппа группы X (S_p -подгруппа группы X).

Группа X называется p-замкнутой (p-нильпотентной), если $X_p \lhd X (X_{p'} \lhd X)$, где $X_{p'}$ – дополнение к X_p в X, а $N \lhd X$ означает, что N есть нормальная подгруппа в X.

(a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b.

$N_B(A)$ – нормализатор подгруппы A в подгруппе B, (если $B = X$, то значок B внизу условимся опускать).

a / b – число a делит число b.

$\mathfrak{R}$ и M есть следующие множества групп:

- $\mathfrak{R} = \{L_2(q), q \not\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4);\ L_2(29);\ L_5(2);\ M_{11};\ M_{23}\}$;
- $\mathsf{M} = \{L_2(q), q \not\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4);\ L_3(3);\ M_{11}\}$.

Подгруппа H группы X называется p-квазидостижимой в X, если H пересекается с каждой S_p-подгруппой из X по своей S_p-подгруппе. S_n и A_n – соответственно симметрическая и знакопеременная группы степени n.

2. Используемые результаты

2.1. ЛЕММА. Пусть G – конечная группа; A, B, N – ее собственные подгруппы; $N \lhd G$.

Если $G = A \cdot B$, то

(1) если $(|A|, |B|) = 1$, то $N = (A \cap N)(B \cap N)$; если $A \subseteq Y$, то $Y = A(Y \cap B)$;

(2) если $X = AN = BN = (A \cap B) \cdot N$, то $N = (N \cap A)(N \cap B)$.

Доказательство

(1) Эти утверждения хорошо известны [1, леммы 1.2.12 и 1.2.13].

(2) Пусть $|A| = a$, $|B| = b$, $|A \cap B| = m$, $|G/N| = d$.

Тогда $G/N = AN/N = BN/N = (A \cap B)N/N \cong A/A \cap N \cong B/B \cap N \cong A \cap B/A \cap B \cap N$.

Рассмотрим порядок множества $(N \cap A)$ $(N \cap B)$.

$$\left|(N \cap A) \cdot (N \cap B)\right| = \frac{|N \cap A||N \cap B|}{|A \cap N \cap N \cap B|} = \frac{|N \cap A||N \cap B|}{|A \cap N \cap B|} = \frac{|N \cap A||N \cap B|}{|A \cap B \cap N|}.$$

Но $d = |A/A \cap N| = |B/B \cap N| = |A \cap B/A \cap B \cap N| = \dfrac{a}{|A \cap N|} = \dfrac{b}{|B \cap N|} = \dfrac{m}{|A \cap B \cap N|}$.

Поэтому $\dfrac{|N \cap A||N \cap B|}{|A \cap B \cap N|} = \dfrac{a/d \cdot b/d}{m/d} = \dfrac{ab}{m \cdot d}$.

Это означает, что $|(N \cap A)(N \cap B)|\, d = |G| = \dfrac{ab}{m}$.

То есть $(N \cap A)(N \cap B) \subseteq N$ и индексы в G подмножеств $(N \cap A)(N \cap B)$ и N равны d. Поэтому $(N \cap A)(N \cap B) = N$ и (2) доказано. Лемма доказана.

2.2. ЛЕММА [3, предложение 1.3]. Если $X = H \cdot N(X_p)$, то H есть p-квазидостижимая подгруппа в X.

2.3. ТЕОРЕМА [3, теорема 1.4]. Пусть X – конечная группа с простой неабелевой группой $F^*(X)$. Пусть B – r-квазидостижимая собственная подгруппа в X и простое число r делит $|B|$, $r \geq 5$. Тогда имеет место одно из утверждений:

(1) $F^*(X) \leq B$;

(2) $F^*(X) \cap B$ r-квазидостижима в $F^*(X)$ и имеет место одна из возможностей:

(2.1) $F^*(X) \cong A_n$, $F^*(X) \cap B \cong A_{n-1}$, $n = s \cdot r^a > r$ с $1 \leq s < r$;

(2.2) $F^*(X) \cong U_3(5)$, $F^*(X) \cap B \cong A_7$, $r = 5$;

(2.3) $F^*(X) \cong HS$, $F^*(X) \cap B \cong M_{22}$, $r = 5$.

2.4. ТЕОРЕМА [4, corollary 4.4]. Пусть π – множество простых чисел. Тогда и только тогда M есть холлова π-подгруппа в группе A_n, когда $M = M_0 \cap S_n$ для некоторой холловой π-подгруппы M_0 группы S_n.

2.5. ТЕОРЕМА [5, 6]. Пусть r и s – простые числа, $r < s \leq n$, где n – натуральное число. Тогда S_n имеет собственную холлову π-подгруппу, $|\pi| > 1$, если $r = 2$, $s = 3$, $\pi = \{r, s\}$, $n = 3, 4, 5, 7, 8$, или n есть простое число и S_{n-1} ее холлова подгруппа.

2.6. ТЕОРЕМА [7, теорема A]. Пусть X – конечная группа с S_p-подгруппой P.
Если $p \geq 5$ и $N(P)/C(P)$ есть p-группа, то $X/O^p(X) \neq 1$.

2.7. ТЕОРЕМА [9, теорема 1.1]. Пусть $X = H \cdot B$ – простая неабелева группа с собственными подгруппами H и B, $(|H|, |B|) = 1$ и $|H|$ – нечетное число. Тогда X – группа одного из типов:

(1) A_r, $r \geq 5$, r – простое число, $B \cong A_{r-1}$, $H \cong X_r$;

(2) M_{11}, B или разрешима, $B \cong X_3 \lambda X_2$, $H \cong Z_{11} \lambda Z_5$ или $B \cong M_{10}$, $|H| = 11$, $(A_6 \lhd M_{10}, |M_{10} : A_6| = 2)$;

(3) M_{23} и H или группа Фробениуса порядка 11.23, a $B \cong E_{2^4} \lambda A_7$ или $B \cong L_3(4) \lambda E_{2^2}$, или $H \cong Z_{23}$, $B \cong M_{22}$;

(4) $L_2(q)$, $q \in \{11, 29, 59\}$, $B \cong A_5$; $H \cong Z_{11}$, $Z_{29} \lambda Z_7$, $Z_{59} \lambda Z_{29}$ соответственно;

(5) $L_n(q)$, n – нечетное простое число с $(n, q-1) = 1$ и или $X \cong L_5(2)$, $|H| = 5 \cdot 31$, или B – максимальная параболическая подгруппа, в которую вкладывается $L_{n-1}(q)$, а H – максимальный циклический тор порядка $\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$;

(6) $L_2(q)$, $3 < q \not\equiv 1 \pmod 4$, $q = r^n$, r – характеристика поля определения для X. Если $r > 2$, то $B = D_{q+1}$, $H = N(X_r)$, $|H| = \frac{1}{2} \cdot r^n \cdot (r^n - 1)$. Если $r = 2$, то $H \cong Z_{q+1}$, $B = N(X_2)$.

(В частности, H или циклическая, или группа Фробениуса).

2.8. ЛЕММА. Пусть $X = H \cdot B$, где H и B – собственные подгруппы группы X, $(|H|, |B|) = 1$. Предположим, что выполняется одно из следующих условий:

(а) H есть p-разрешимая pd-группа, а B – разрешимая группа и X есть *кф* $\mathfrak{M}$ -свободная группа; или

(в) $B = N(X_p)$ и X есть *кф* $\mathfrak{R}$ –свободная группа, $p > 2$.

Тогда X есть p-разрешимая группа.

Доказательство. Индукция сводит дело к простой группе X. После этого непосредственно проверяются условия (а) или (в) в группах из заключения теоремы 2.7. Оказывается, что $X \in \mathfrak{M}$ при условии (а) и $X \in \mathfrak{R}$ при выполнении условия (в). Лемма доказана.

3. Основной результат

3.1. ТЕОРЕМА. Пусть X конечная группа, H и B – ее собственные подгруппы, $X = H \cdot B$, $(|H|, |B|) = p^a$, $a \geq 1$, $p \geq 5$, $B = N(X_p)$.

Пусть X является *кф* $\mathfrak{R}$ -свободной группой. Тогда X есть p-разрешимая группа.

Доказательство. Предположим, что X – простая неабелева группа. Из условия теоремы и леммы 2.2 следует, что подгруппа H p-квазидостижима в X. Из теоремы 2.3 следует, что для X и H может встретиться одна из трех возможностей:

(1) $X \cong A_n$, $H \cong A_{n-1}$, $n = s \cdot p^a > p$, $1 \leq s < p$;

(2) $X \cong U_3(5)$, $H \cong A_7$, $p = 5$;

(3) $X \cong HS$, $H \cong M_{22}$, $p = 5$.

Но тогда из условия теоремы следует, что B – холлова подгруппа в X нечетного порядка, а H содержит S_2-подгруппу из X. Поэтому в случае (1) ввиду теорем 2.5 и 2.4 можно считать, что $|B| = X_p = N(X_p)$. Но тогда из теоремы 2.6 следует, что X не может быть простой неабелевой группой. В случаях (2) и (3) $X \cong U_3(5)$ или HS, $H \cong A_7$ или M_{22} соответственно и H не содержит S_2-подгруппу из X [8]. Итак, впредь можно считать, что

$$X \text{ – не простая неабелева группа.} \tag{1}$$

Пусть $1 \neq N \lhd X$ и N – наибольшая подгруппа с этим свойством. Тогда

$$\bar{X} = X / N \text{ – простая группа.} \tag{2}$$

Ясно, что $\bar{X} = \bar{H} \cdot \bar{B}$, где $\bar{H} = HN / N$, $\bar{B} = BN / N$. Если $(|\bar{H}|, |\bar{B}|) \neq 1$, то $\bar{X}$ удовлетворяет условию теоремы (если $\bar{X}$ не *кф* $\mathfrak{R}$ -свободна, то и X не *кф* $\mathfrak{R}$ -свободна). Применение индукции дает нам p-разрешимость группы $\bar{X}$.

Пусть теперь $(|\bar{H}|, |\bar{B}|) = 1$. Тогда из леммы 2.8 (в) следует, что либо группа X не *кф* $\mathfrak{R}$ -свободна, либо p-разрешима. Итак, впредь можно считать, что $\bar{X}$ p-разрешимая группа. Из (2) следует, что

$$\textit{либо } \bar{X} \textit{ есть } p' - \textit{группа, либо } |\bar{X}| = p. \tag{3}$$

Если $p \nmid |\bar{X}|$, то $X_p \leq N$ и по рассуждению Чунихина – Фраттини $X = N \cdot N(N_p) = NB$ и $\bar{X} = \bar{B}$. Если $\bar{H} \subset \bar{B}$, то $H \subset N$ и по лемме 2.1 $N = H(N \cap B)$. Так как $p / |N \cap B|$, то применение индукции к N

дает нам p–разрешимость N и p–разрешимость X ввиду $p \nmid |\overline{X}|$. Пусть теперь $\overline{H} = \overline{B}$, но тогда $\left(|\overline{H}|, |\overline{B}|\right) \neq 1$, что противоречит сделанному выше предположению.

Поэтому пусть $p / |\overline{X}|, |\overline{X}| = p$. Тогда $\overline{X} = \overline{B}$.

Если $H \subset B$, то $H \subset N$, $N = H(N \cap B)$ по лемме 2.1.

Если $p / |N \cap B|$, то пусть P есть силовская p-подгруппа в $N \cap B$ и в N. Пусть $1 \neq x \in N \cap B$.

Предположим, что $x \notin N_{N \cap B}(P)$. Тогда $P^x \neq P$, $< P, P^x >$ не p-группа. С другой стороны, $x \in B = N(X_p)$, $P \subset X_p$ влечет $P^x \subseteq X_p^x = X_p$ и $< P, P^x >$ – p-группа. Поэтому $N \cap B \leq N(P)$ и N удовлетворяет условию теоремы. Применение индукции к N дает p-разрешимость N и X.

Случай $\overline{H} = \overline{B} = \overline{X}$ противоречит предположению $\left(|H|, |B|\right) = 1$. Если $p \nmid |N \cap B|$, то X тривиально p-разрешима.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Endliche Gruppen, I. / B. Huppert. – Berlin: Springer – Verlag, 1967. – 793 p.
2. Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
3. Guralnik, R. Sylow *p*-subgroups and subnormal subgroups of finite groups / R. Guralnik, P. Kleidman, R. Lyons // Proc. London Math. Soc. – 1993. – Vol. 66, № 3. – P. 129 – 151.
4. Vdovin, E.P. Hall subgroups of finite groups / E.P. Vdovin, D.O. Revin. – Новосибирск, 2004. – 40 с. (Препринт / Ин-т матем. сиб. отдел. РАН; № 134).
5. Hall, Ph. Theorems like Sylow's / Ph. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 6, № 3. – P. 286 – 304.
6. Thompson, J. Hall sulgroups of the symmetric groups / J. Thompson // J. Comb. Theory. – 1966. – Vol. 1. – P. 271 – 279.
7. Glauberman, G. Prime-power factor groups of finite groups / G. Glauberman // Math. Z. – 1968. – Bd. 107. – S. 159 – 172.
8. Atlas of finite groups / J.H. Conway [etc]. – London: Clarendon Press, 1985. – 252 p.
9. Arad, Z. On finite factorizable groups / Z. Arad, E. Fisman // J. Algebra. – 1984. – Vol. 86, № 2. – P. 522 – 548.

Поступила 15.04.2008