УДК 512.542

О МИНИМАЛЬНЫХ n-КРАТНО ω-НАСЫЩЕННЫХ НЕНИЛЬПОТЕНТНЫХ ФОРМАЦИЯХ

А.И. РЯБЧЕНКО
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Исследуется решеточное строение кратно частично насыщенных формаций конечных групп. Получена классификация конечных групп, порождающих минимальные n-кратно ω-насыщенные ненильпотентные формации. При этом под минимальной n-кратно w-насыщенной ненильпотентной формацией понимается такая n-кратно ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$, не содержащаяся в формации всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, что всякая собственная ее n-кратно ω-насыщенная подформация $\mathfrak{F}_1$ содержится в $\mathfrak{N}$. Результаты работы являются естественным развитием исследований, связанных с изучением строения решетки насыщенных, частично насыщенных и кратно насыщенных формаций, и могут использоваться при дальнейшем изучении и классификации n-кратно ω-насыщенных формаций с заданной структурой n-кратно w-насыщенных подформаций.

Введение. Все рассматриваемые группы конечны. Используется стандартная терминология, принятая в работах [1 – 3].

Идея изучения формаций по заданной структуре ее подформаций получила широкое распространение при исследовании внутреннего строения формаций различных типов. В теории насыщенных формаций этот подход привел к появлению таких понятий, как минимальные локальные не $\mathfrak{H}$-формации [4], или $\mathfrak{H}_l$-критические формации [5]. Напомним, что насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}_l$-критической [5], или минимальной насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией [4], если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для каждой собственной насыщенной подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем этот результат получил развитие в разных направлениях и нашел широкое применение в различных исследованиях по теории формаций. Общие свойства $\mathfrak{H}_l$-критических формаций, а также описание таких формаций для целого ряда формаций $\mathfrak{H}$ было получено в работах А.Н. Скибы [5 – 7]. Итоговый результат в этом направлении достигнут в работе [7], где получено описание $\mathfrak{H}_l$-критических формаций для случая, когда $\mathfrak{H}$ – произвольная формация классического типа.

В теории кратно насыщенных формаций А.Н. Скибой [2] было получено описание минимальных n-кратно насыщенных не $\mathfrak{N}^m$-формаций ($m \geq 1$). Дальнейшее развитие теория минимальных n-кратно насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций получено в работах В.Г. Сафонова [12].

Изучение ненильпотентных ω-насыщенных формаций, имеющих нильпотентную максимальную ω-насыщенную подформацию, проведено Дж. Джехадом [8]. Позднее, в работе В.Н. Рыжик [9], были описаны минимальные не $\mathfrak{H}$-формации, где $\mathfrak{H}$ – произвольная 2-кратно насыщенная формация. Вопросу классификации критических частично насыщенных формаций посвящен цикл работ И.Н. Сафоновой [10 – 11]. В работе [11] получен завершающий результат, дающий описание минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций, где $\mathfrak{H}$ – произвольная формация классического типа.

Цель данной работы – описание минимальных n-кратно ω-насыщенных ненильпотентных формаций.

Определения и обозначения

Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел. Тогда через ω' обозначают дополнение к ω во множестве всех простых чисел.

Всякую функцию вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$ называют ω-локальным спутником. Если f – произвольный ω-локальный спутник, то $LF_\omega(f) = \{G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\}$, где $G_{\omega d}$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G, у которой для любого ее композиционного фактора H/K имеет место $\pi(H/K) \cap \omega \neq \varnothing$, $F_p(G)$ – наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G, равная пересечению централизаторов всех pd-главных факторов группы G.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторого ω-локального спутника f, то говорят, что $\mathfrak{F}$ является ω-локальной формацией, а f – ее ω-локальный спутник. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называют внутренним ω-локальным спутником.

Формация $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G, удовлетворяющая условию: $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq \Phi(G) \cap O_{\omega}(G)$. Ввиду теоремы 1 [1, с. 118] формация является ω-локальной тогда и только тогда, когда она является ω-насыщенной.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ и для любой полной решетки формаций Θ через $\Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех тех формаций из Θ, которые содержат все группы из $\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп, p – простое число. Тогда полагают, что

$$\mathfrak{X}(F_p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{при } p \in \pi(\mathfrak{X}), \\ \varnothing, & \text{при } p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Всякую формацию считают 0-кратно ω-насыщенной. При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно ω-насыщенной, если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями.

Через l_n^{ω} обозначают совокупность всех n-кратно ω-насыщенных формаций.

Для любых двух n-кратно ω-насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают $\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, а $\mathfrak{M} \vee_n^{\omega} \mathfrak{H} = l_n^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Всякое множество n-кратно ω-насыщенных формаций, замкнутое относительно операций $\wedge$ и $\vee_n^{\omega}$, является решеткой.

Предварительные сведения. Приведем некоторые известные факты теории формаций, используемые при доказательстве теоремы 1.

ЛЕММА 1 [13]. *Пусть G – монолитическая группа с неабелевым монолитом R. Тогда если простое число p делит порядок группы R, то $F_p(G) = 1$.*

ЛЕММА 2 [1]. *Пусть $\mathfrak{F} = l_n^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{X}$, где $n \geq 1$, и пусть f – минимальный l_n^{ω}-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ для всех $p \in \omega$;

3) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(h)$, *спутник h является l_{n-1}^{ω}-значным и p – некоторый фиксированный элемент из ω, то $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f_1)$, где $f_1(a) = h(a)$ для всех $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$, $f_1(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$ и, кроме того, $f_1(p) = f(p)$;*

4) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(g)$, *где $g(\omega') = \mathfrak{F}$ и $g(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega$.*

ЛЕММА 3 [2, с. 167]. *Пусть A – монолитическая группа с монолитом P. Тогда если $P \not\subseteq \Phi(A)$, то $\mathrm{form}(A/P)$ – единственная максимальная подформация формации $\mathrm{form}A$.*

ЛЕММА 4 [1]. *Пусть f_1 и f_2 – минимальные ω-локальные Θ-значные спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leq f_2$.*

Частным случаем следствия 3.23 [2, с. 36] является следующая

ЛЕММА 5. *Пусть A – группа. Тогда $A \notin \mathrm{form}(A/Soc(A))$.*

ЛЕММА 6 [1]. *Формация $\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-локальной ($n \geq 1$) в том и только том случае, когда для всех $p \in \omega$ имеет место включение $\mathfrak{N}_p l_n^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{F}(F_p)) \subseteq \mathfrak{F}$.*

ЛЕММА 7 [2, с. 168]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – формации, причем $\mathfrak{H}$ – локальна и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G монолитична, ее монолит совпадает с $G^{\mathfrak{H}}$, и если $G^{\mathfrak{H}}$ – p-группа, то $G^{\mathfrak{H}} = C_G(G^{\mathfrak{H}}) = F_p(G)$.*

ЛЕММА 8 [2, с. 171]. *Если в группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и $O_p(G) = 1$ (p – некоторое простое число), то существует точный неприводимый $F_p[G]$-модуль, где F_p – поле из p элементов.*

ЛЕММА 9 [1]. *Если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ и $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$ для некоторого числа $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

ЛЕММА 10 [14]. *Пусть Θ – такая полная решетка формаций, что $\Theta^{\omega} \subseteq \Theta$. Пусть $\mathfrak{H}$ – ω-локальная формация с каноническим ω-локальным спутником H, $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация с минимальным*

ω*-локальным* Θ*-значным спутником* f. *Тогда в том и только в том случае* $\mathfrak{F}$ *–* $\mathfrak{H}_{\Theta^{\omega}}$*-критическая формация, когда* $\mathfrak{F} = \Theta^{\omega}\mathrm{form}G$, *где* G *– такая монолитическая группа с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$, *что либо* $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$, $\Phi(G) = 1$ *и* $f(p)$ *–* $H(p)_{\Theta}$*-критическая формация для всех* $p \in \pi$, *либо* $\pi = \varnothing$ *и* $f(\omega')$ *–* $\mathfrak{H}_{\Theta}$*-критическая формация.*

ЛЕММА 11 [8]. *В том и только в том случае формация* $\mathfrak{F}$ *является минимальной* ω*-локальной ненильпотентной формацией, когда* $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}G$, *где* G *– такая монолитическая группа с монолитом* $R = G^{\mathfrak{N}}$, *что выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = [R]Q$ *–* p*-замкнутая* pd*-группа Шмидта с* $\Phi(G) = 1$, *где* $R = O_p(G) = F_p(G)$, $p \in \omega$;

2) $R = G^{\mathfrak{N}_p}$ *– неабелева* pd*-группа для некоторого простого числа* $p \in \omega$ *и если* $|\omega \cap \pi(R)| > 1$, *то группа* $G = R$ *– простая группа*;

3) R *–* ω'*-группа.*

Основной результат

ЛЕММА 12. *Пусть* $\mathfrak{F} = l_n^{\omega}\mathrm{form}G$ $(n \geq 1)$, *где* G *– такая монолитическая группа с неабелевым монолитом* $R = G^{\mathfrak{N}}$, *что* $G/R \in \mathfrak{N}_p$ *и* $\pi(R) \cap \omega = \{p\}$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *имеет единственную максимальную* n*-кратно* ω*-насыщенную подформацию* $\mathfrak{M}$, *причем* $\mathfrak{M} = l_n^{\omega}\mathrm{form}(G/R) = \mathfrak{N}_p$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = l_n^{\omega}\mathrm{form}G$, где G – группа, удовлетворяющая условиям леммы.

Поскольку R – неабелева группа, то из леммы 1 получаем $F_p(G) = 1$. Понятно, что $G_{\omega d} = G$.

Проведем индукцию по n. Пусть $n = 1$. По лемме 2 минимальный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$ имеет вид: $f(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G)) = \mathrm{form}G$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $f(\omega') = \mathrm{form}(G/G_{\omega d}) = \mathrm{form}(G/G) = (1)$. Ввиду леммы 3 формация $f(p)$ имеет единственную максимальную подформацию $\mathrm{form}(G/R)$. Построим ω-локальный спутник k, принимающий следующие значения: $k(p) = \mathrm{form}(G/R)$, $k(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $k(\omega') = (1)$.

Пусть $\mathfrak{M} = LF_{\omega}(k)$. Тогда $k(p) \subset f(p)$, $f(q) = k(q)$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $k(\omega') = f(\omega')$. Применяя лемму 4, получаем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, тогда $G \in \mathfrak{M}$. Но из леммы 5 следует, что $G \notin k(p) = \mathrm{form}(G/R)$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $\mathfrak{L}$ – произвольная собственная ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ и l – ее минимальный ω-локальный спутник. Тогда по лемме 4 $l \leq f$. Так как $k(q) = f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$, $k(\omega') = f(\omega')$ и $\mathrm{form}(G/R) = k(p)$ – единственная максимальная подформация в $\mathrm{form}G = f(p)$, то $l \leq k$. Значит, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом $\mathfrak{M}$ – единственная максимальная *n*-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{M} = l^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$. В силу леммы 2 формация $l^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$ имеет такой минимальный ω-локальный спутник m, что $m(p) = \mathrm{form}((G/R)/F_p(G/R)) = (1)$, $m(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $m(\omega') = (1)$. Тогда $m(p) \subseteq k(p) = \mathrm{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{N}_p m(p) = \mathfrak{N}_p$, $m(q) = f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $m(\omega') = f(\omega') = (1)$. Так как $m \leq k$, то $l^{\omega}\mathrm{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{N}_p m(p)$ – значение на *p* максимального внутреннего ω-локального спутника формации $l^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$, то $\mathfrak{M} \subseteq l^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$. Следовательно, $\mathfrak{M} = l^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$.

Будем считать, что $n > 1$ и теорема верна при $n-1$. Ввиду леммы 2 минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$ имеет вид: $f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $f(\omega') = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/G_{\omega d}) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/G) = (1)$. Так как в силу индукции лемма верна при $n-1$, то $f(p) = l_{n-1}\mathrm{form}G$ имеет единственную максимальную $(n-1)$-кратно ω-насыщенную подформацию $l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$.

Построим $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник m, принимающий следующие значения: $m(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$, $m(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $m(\omega') = (1)$. Тогда $m(p) \subset f(p)$, $m(a) = f(a)$ для любого $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$.

Рассмотрим формацию $\mathfrak{M} = LF_\omega(m)$. Пусть m_1 – минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник формации $\mathfrak{M}$. Тогда $m_1 \le m < f$. Применяя лемму 4, получаем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, тогда $G \in \mathfrak{M}$. Значит, в силу лемм 1 и 2 получаем G; $G/F_p(G) \in m(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/R)$. Следовательно, $l_{n-1}^\omega \mathrm{form} G \subseteq l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/R)$. Но по предположению индукции $l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/R)$ – максимальная подформация $l_{n-1}^\omega \mathrm{form} G$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M}$ – единственная максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{R}$ – произвольная собственная n-кратно ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ и r – ее минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник. Тогда по лемме 4 имеем $r \le f$. Так как $m_1(a) = f(a)$ для любого $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$ и $l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/R) = m_1(p)$ единственная максимальная подформация в $l_{n-1}^\omega \mathrm{form} G = f(p)$, то $r \le m_1 < f$. Таким образом, снова применяя лемму 4, получаем, что $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ – единственная максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{M} = l_n^\omega \mathrm{form}(G/R)$. В силу леммы 2 формация $l_n^\omega \mathrm{form}(G/R)$ имеет такой минимальный ω-локальный спутник l, принимающий следующие значения: $l(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}((G/R)/F_p(G/R)) = (1)$, $l(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $l(\omega') = (1)$. Тогда $l(p) \subseteq m(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{N}_p l(p)$, $l(q) = m(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $l(\omega') = m(\omega') = (1)$. Так как $l \le m$, то $l_n^\omega \mathrm{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{N}_p l(p)$ – значение на p максимального внутреннего ω-локального спутника формации $l_n^\omega \mathrm{form}(G/R)$, то $\mathfrak{M} \subseteq l_n^\omega \mathrm{form}(G/R)$. Следовательно, $\mathfrak{M} = l_n^\omega \mathrm{form}(G/R)$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$. По условию $G/R \in \mathfrak{N}_p$. Поэтому $\mathfrak{M} = l_n^\omega \mathrm{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{N}_p$. Так как $p \in \omega$, то в силу леммы 6 $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{M}$ – единственная максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной n-кратно ω-насыщенной ненильпотентной формацией, когда $\mathfrak{F} = l_n^\omega \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}}$, что либо $\pi = \pi(R) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi \ne \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) *$G = [R]Q$ – группа Шмидта с $\Phi(G) = 1$, где $R = C_G(R)$ – абелева p-группа, $p \in \omega$ и $|Q| = q$ – простое число*;

2) *R – неабелева pd-группа, $G/R \in \mathfrak{N}_p$, где $p \in \omega$, причем если $|\pi| > 1$, то $n = 1$ и $G = R$ – простая неабелева группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть формация $\mathfrak{F}$ является минимальной n-кратно ω-насыщенной ненильпотентной формацией и пусть группа G является группой минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{N}$. Тогда G – монолитическая ненильпотентная группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}}$. Кроме того, в силу насыщенности формации $\mathfrak{N}$ получаем $R \not\subseteq \Phi(G)$. А поскольку $l_n^\omega \mathrm{form} G \not\subseteq \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{F} = l_n^\omega \mathrm{form} G$.

Если $\pi = \pi(R) \cap \omega = \varnothing$, т.е. R – ω'-группа, то группа G, очевидно, удовлетворяет условию теоремы.

Пусть $\pi = \pi(R) \cap \omega \ne \varnothing$. Предположим, что R является абелевой группой. Тогда R – p-группа для некоторого $p \in \omega$. Так как $R \not\subseteq \Phi(G)$, то существует максимальная в G подгруппа M, не содержащая подгруппу R, и $G = RM$. Кроме того, $R \cap M$ нормальна в M и $R \cap M$ нормальна в R. А значит, $R \cap M$ нормальна и в G. Следовательно, $R \cap M = 1$, так как, иначе, $R \cap M$ – нормальная в G подгруппа, содержащаяся в минимальной нормальной подгруппе R, что противоречит определению подгруппы R. Тогда получаем, что $G = [R]M$ и M; $G/R \in \mathfrak{N}$.

По лемме 2 формация $\mathfrak{F}$ имеет такой минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник f, что $f(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/F_p(G))$. По лемме 7 получаем $R = C_G(R) = F_p(G)$. Тогда $f(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/F_p(G)) =$ $= l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/R) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} M$.

Так как $M \in \mathfrak{N}$, то для любого $r \in \pi(M) \setminus p$ имеем $Z_r \in l_{n-1}^\omega \mathrm{form}\, M$, где Z_r – группа простого порядка r.

Поскольку $O_p(Z_r) = 1$, то в силу леммы 8 существует точный неприводимый $F_p[Z_r]$-модуль V. Пусть $F = [V]Z_r$. Тогда F является группой Шмидта с $\Phi(F) = 1$. По лемме 9 $F \in \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{L} = l_n^\omega \mathrm{form} F \subseteq \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$, то по условию $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, Z_r ; $F/V = F/F_p(F) \in N(p) = \mathfrak{N}_p$, где $N(p)$ – канонический спутник формации $\mathfrak{N}$, т.е. $Z_r \in \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} = l_n^{\omega}\mathrm{form}F$ и формация $\mathfrak{F}$ порождается группой Шмидта, удовлетворяющей условию 1).

Рассмотрим теперь случай, когда R является неабелевой группой. Пусть $|\pi| = 1$ и $p \in \pi$. Тогда по лемме 1 получаем, что $F_p(G) = 1$ и минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник f формации $\mathfrak{F}$ на p принимает значение $f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$. По лемме 9, $f(p)$ является минимальной $(n-1)$-кратно ω-насыщенной не $\mathfrak{N}_p$-формацией, где $\mathfrak{N}_p = N(p)$ – значение канонического спутника формации $\mathfrak{N}$. Так как $G/R \in \mathfrak{N}$, то $l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R) \subset f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$. Следовательно, $G/P \in \mathfrak{N}_p$, т.е. G/R – p-группа, и G удовлетворяет условию 2) теоремы.

Пусть теперь $|\pi| > 1$. Заметим, что если $n = 1$, то теорема следует из леммы 11. Путь $n > 1$. Тогда существуют по крайней мере два различных простых числа p и q из π, минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$ на которых принимает значения $f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$ и $f(q) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/F_q(G)) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$ соответственно. Применяя лемму 9, с одной стороны, получаем, что $l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$ является минимальной $(n-1)$-кратно ω-насыщенной не $\mathfrak{N}_p$-формацией, а с другой – минимальной $(n-1)$-кратно ω-насыщенной не $\mathfrak{N}_q$-формацией, т.е. $G/R \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q = (1)$. Тогда $G = R$ – простая неабелева группа. Поскольку $Z_p \in \mathfrak{N}_p$ и $O_q(Z_p) = 1$, то ввиду леммы 8 существует точный неприводимый $F_q[Z_p]$-модуль V, где F_q – поле из q элементов. Пусть $G_1 = [V]Z_p$. Тогда так как $G_1/O_p(G_1)$; $Z_q \in f(p)$, то $G_1 \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F} \neq l_n^{\omega}\mathrm{form}G_1$, то $l_n^{\omega}\mathrm{form}G_1 \in \mathfrak{N}$. А значит, получаем, что группа Шмидта $G_1 \in \mathfrak{N}$, что противоречит определению группы Шмидта. Следовательно, $\mathfrak{F} = l_n^{\omega}\mathrm{form}G_1$. Но тогда $\mathfrak{F}$ – разрешима. Противоречие, так как $\mathfrak{F} = l_n^{\omega}\mathrm{form}G$ и монолит R группы G неабелев. Таким образом, случай, когда $G = R$ – простая неабелева группа и $n > 1$, невозможен.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = l_n^{\omega}\mathrm{form}G$, где G – группа, удовлетворяющая условию теоремы.

Пусть $\pi = \pi(R) \cap \omega = \varnothing$, т.е R – ω'-группа. Проведем индукцию по n. При $n = 1$ доказательство теоремы следует из леммы 11. Будем считать, что $n > 1$ и при $n-1$ теорема верна. Тогда, так как R – ω'-группа, то $G_{\omega d} = 1$, и минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$ на ω' принимает значение $f(\omega') = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/G_{\omega d}(G)) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$. По предположению индукции $l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$ – минимальная $(n-1)$-кратно ω-насыщенная ненильпотентная формация. Применяя лемму 9, получаем, что $\mathfrak{F}$ – минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная формация.

Пусть теперь $\pi = \pi(R) \cap \omega \neq \varnothing$. Рассмотрим случай, когда R – абелева подгруппа. Тогда R – p-группа, где $p \in \omega$. По лемме 7 получаем $R = F_p(G)$. В этом случае в силу леммы 2 значение на p минимального $(n-1)$-кратно ω-локального спутника формации $\mathfrak{F}$ будет иметь вид:

$$f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}Q = \begin{cases} \mathrm{form}Q, & \text{\textit{при} } q \notin \omega, \\ \mathfrak{N}_q, & \text{\textit{при} } q \in \omega. \end{cases}$$

Заметим, что $f(p)$ содержит только одну максимальную $(n-1)$-кратно ω-насыщенную подформацию (1). Так как $(1) \subseteq \mathfrak{N}_p = N(p)$, где $N(p)$ – значение канонического спутника формации $\mathfrak{N}$, то $f(p)$ является минимальной $(n-1)$-кратно ω-насыщенной не $\mathfrak{N}_p$-формацией. Применяя лемму 9, получаем, что $\mathfrak{F}$ – минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная формация.

Пусть теперь R – неабелева группа. По лемме 1 получаем $F_p(G) = 1$ и значение на p минимального $(n-1)$-кратно ω-локального спутника f формации $\mathfrak{F}$ равно $f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$. Ввиду леммы 12 формация $f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$ имеет единственную максимальную $(n-1)$-кратно ω-насыщенную подформацию $\mathfrak{N}_p$, т.е. $f(p)$ – минимальная $(n-1)$-кратно ω-насыщенная не $\mathfrak{N}_p$-формация. Применяя лемму 9, получаем, что $\mathfrak{F}$ – минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная формация. Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия теоремы 1.

Если $\omega = \{p\}$, то из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является минимальной* n*-кратно* p*-насыщенной ненильпотентной формацией, когда* $\mathfrak{F} = l_n^p \text{form} G$, *где* G *– такая монолитическая группа с монолитом* $R = G^{\mathfrak{N}}$, *что выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = [R]Q$ *– группа Шмидта с* $\Phi(G) = 1$, *где* $R = C_G(R)$ *и* $|Q| = q$ *– простое число*;

2) R *– неабелева pd-группа и* $G/R \in \mathfrak{N}_p$;

3) R *– p'-группа.*

При $\omega = P$ из теоремы 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2 [2, с. 191]. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *– минимальная* n*-кратно локальная ненильпотентная формация, где* $n \geq 1$, *когда* $\mathfrak{F} = l_n \text{form} G$ *и выполняется одно из следующих условий:*

1) G *– группа Шмидта*;

2) $n = 1$, G *– простая неабелева группа.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114 – 147.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М., 1989. – 256 с.
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.
4. Шеметков, Л.А. Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Тр. VI Всесоюз. симпоз. по теории групп. – Киев, 1980. – С. 37 – 50.
5. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – С. 27 – 33.
6. Скиба, А.Н. Формации со сверхразрешимыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Группы и другие алгебраические системы с условиями конечности. – Новосибирск: Наука, 1984. – Т. 4. – С. 101 – 118.
7. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // В кн.: Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 258 – 268.
8. Джарадин, Джехад. Минимальные p-насыщенные ненильпотентные формации / Джехад Джарадин // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 1995. – Вып. 8. – С. 59 – 64.
9. Жевнова, Н.Г. ω-Локальные формации с дополняемыми подформациями: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 02.12.01 / Н.Г. Жевнова; Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель, 1997. – 17 с.
10. Сафонова, И.Н. О минимальных ω-локальных несверхразрешимых формациях / И.Н. Сафонова // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 1998. – Вып. 12. – С. 123 – 130.
11. Сафонова, И.Н. О минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях / И.Н. Сафонова // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 1999. – № 2. – С. 23 – 27.
12. Сафонов, В.Г. О минимальных кратно локальных не $\mathfrak{H}$-формациях конечных групп / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 1995. – Вып. 8. – С. 109 –138.
13. Шаблина, И.П. Модулярные и алгебраические решетки n-кратно ω-насыщенных формаций конечных групп: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук / И.П. Шаблина. – Гомель, 2003. – 92 с.
14. Селькин, В.М. О $\mathfrak{H}_{\Theta^\omega}$-критических формациях / В.М. Селькин, А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 1999. – Вып. 14. – С. 127 – 131.

Поступила 14.04.2008