УДК 512.542

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДКЛАССЫ π-НОРМАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н.В. САВЕЛЬЕВА
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Определяется понятие π-нормального класса Фиттинга как естественное расширение нормального класса Фиттинга, где π обозначает непустое множество простых чисел. Класс Фиттинга F назовем π-нормальным, если для любой конечной разрешимой π-группы ее F-радикал является в ней F-максимальной подгруппой. На множестве классов Фиттинга исследуются свойства отношения порядка "$<<$", определяемого вложением инъекторов групп, и на основе этого изучаются π-нормальные классы Фиттинга. Установлены существование, единственность и нетривиальность минимального π-нормального класса Фиттинга как минимального элемента секции Локетта класса Фиттинга всех конечных разрешимых π-групп. Доказано, что в минимальном π-нормальном классе Фиттинга не существует максимальных по сильному вложению подклассов Фиттинга. При доказательстве основного результата используется современная техника сплетений групп.

Введение. В теории классов конечных групп многие исследования, посвященные характеризации классов и канонических подгрупп, связаны с изучением нормальных классов Фиттинга. Напомним, что неединичный класс Фиттинга F называется нормальным в классе Фиттинга X или просто X-нормальным (обозначается $\mathsf{F} \lhd \mathsf{X}$), если для любой X-группы G ее F-радикал является F-максимальной подгруппой группы G. Если $\mathsf{F} \lhd \mathsf{S}_\pi$, где S_π – класс Фиттинга всех конечных разрешимых π-групп, то класс F мы называем π-нормальным.

При описании нормальных классов Фиттинга основополагающий результат был получен Косси [1]. Им было установлено, что каждый максимальный (по включению) подкласс Фиттинга класса Фиттинга S всех конечных разрешимых групп нормален в S. В связи с этим была сформулирована

Проблема [2, Х. Лауш, 9.18]. *Существуют ли максимальные по включению подклассы Фиттинга в минимальном нормальном классе Фиттинга* S_* ?

Отрицательный ответ на данный вопрос был получен в [3].

Вместе с тем в работе [4] было доказано, что если X – класс Фишера, то пересечение любого множества X-нормальных классов Фиттинга снова является X-нормальным классом Фиттинга. В данной работе нами установлено, что если π – непустое множество простых чисел, то пересечение любого множества неединичных π-нормальных классов Фиттинга есть неединичный π-нормальный класс Фиттинга (см. ниже лемму 2.6). Отсюда следует, что существует единственный минимальный π-нормальный класс Фиттинга.

Ряд содержательных результатов в теории нормальных классов Фиттинга связан с изучением на множестве классов Фиттинга отношения порядка "$<<$". Напомним, что класс Фиттинга F называют сильно вложенным в класс Фиттинга H (обозначают $\mathsf{F} << \mathsf{H}$), если H-инъектор каждой конечной разрешимой группы G содержит F-инъектор этой группы.

Таким образом, естественен аналог проблемы Лауша для отношения порядка "$<<$", а именно

Вопрос. *Существуют ли максимальные по сильному вложению подклассы Фиттинга в минимальном π-нормальном классе Фиттинга?*

Отрицательный ответ на данный вопрос – основной результат настоящей работы.

Все рассматриваемые группы являются конечными и разрешимыми. В определениях и обозначениях мы следуем [5].

1. Предварительные сведения. Классом Фиттинга называется нормально наследственный класс групп F, замкнутый относительно произведений нормальных F-подгрупп. Если F – непустой класс Фиттинга, то подгруппу G_F группы G называют F-радикалом группы G, если она является наибольшей из нормальных подгрупп группы G, принадлежащих F.

Некоторые известные свойства групп и их радикалов приведем в виде двух следующих лемм.

ЛЕММА 1.1. *Для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) *если U, V и W – подгруппы группы G и $V \le U$, то $U \cap VW = V(U \cap W)$ – тождество Дедекинда* (*см., например,* [5, A.1.3]);

2) *если* $H \lhd G$ *и* $L \le G$, *то* $HL \le G$ *и* $H \cap L \lhd L$;

3) *если* $P \in Syl_p(G)$ *и* $P \lhd G$, *то* P $Char\ G$;

4) *если* $G = A \times B$, $A_1 \lhd A$ *и* $B_1 \lhd B$, *то* $A_1B_1 = A_1 \times B_1 \lhd G$ *и* $G/(A_1 \times B_1) \cong A/A_1 \times B/B_1$.

ЛЕММА 1.2 [5]. *Пусть* G *– группа,* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– непустые классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $N \lhd\lhd G$, *то* $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$ [5, IX.1.1 (a)];

2) *для всех* $G \in \mathfrak{H}$ *имеет место* $(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{H}} \le G_{\mathfrak{FH}}/G_{\mathfrak{F}}$ [5 IX.1.12 (b)].

Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то подгруппу V группы G называют $\mathfrak{F}$-инъектором G, если $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой N для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Произведением $\mathfrak{FH}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс всех таких групп G, для которых $G/G_{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{H}$.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется гомоморфом, или Q-замкнутым классом, если каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Гомоморф называют насыщенным, если из того, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, следует $G \in \mathfrak{F}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из $H/A \in \mathfrak{F}$ и $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H/(A \cap B) \in \mathfrak{F}$.

Сформулируем теперь некоторые известные свойства произведения классов Фиттинга.

ЛЕММА 1.3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения* [5, IX.1.11, IX.1.12]:

1) *если* $\mathfrak{H} \ne \varnothing$, *то* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{FH}$;

2) *если* $\mathfrak{H}$ *– гомоморф и* $\mathfrak{F} \ne \varnothing$, *то* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{FH}$;

3) *операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.*

ЛЕММА 1.4. *Пусть* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ *– классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) [6, лемма 4] *если* $\mathfrak{X}$ *– гомоморф и* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, *то* $\mathfrak{F}_1\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_2\mathfrak{X}$;

2) *если* $\mathfrak{X}$ *– класс Фиттинга и* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, *то* $\mathfrak{X}\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{F}_2$;

3) [6, лемма 4] *если* $\mathfrak{X}$ *– формация, то* $(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2)\mathfrak{X} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}_2\mathfrak{X}$;

4) *если* $\mathfrak{X}$ *– класс Фиттинга, то* $\mathfrak{X}(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{X}\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{X}\mathfrak{F}_2$.

Напомним, что операторы “ $*$ ” и “ $_*$ ” определены Локеттом следующим образом [7]: каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ посредством оператора “ $*$ ” сопоставляется класс “ $\mathfrak{F}^*$ ” как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство:

$$(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}.$$

Класс $\mathfrak{F}_*$ определяется как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$.

Приведем основные свойства операторов Локетта “ $*$ ” и “ $_*$ ”, которые мы будем использовать.

ЛЕММА 1.5. [5, 8]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– непустые классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) [5, лемма X.1.8 (b); 8, следствие 3.5] *если* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, *то* $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{H}^*$ *и* $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{H}_*$;

2) [5, теорема X.1.15] $(\mathfrak{F}_*)_* = (\mathfrak{F}^*)_* = \mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* = (\mathfrak{F}^*)^* \subseteq \mathfrak{FA}$, *где* $\mathfrak{A}$ *– формация всех абелевых групп*;

3) [5, замечание X.1.23 (a)] *если* $\pi \subseteq \mathbb{P}$, *то* $\mathfrak{N}_\pi = (\mathfrak{N}_\pi)_* = (\mathfrak{N}_\pi)^*$, *где* $\mathfrak{N}_\pi$ *– класс Фиттинга всех нильпотентных* π*-групп.*

Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, то $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта. Секцией Локетта непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется множество всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. Секцию Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ обозначают $\mathrm{Lock\,sec}(\mathfrak{F})$ [7].

Пусть $\boldsymbol{P}$ – множество всех простых чисел. Для класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ определяется множество $\pi(\mathfrak{X}) = \bigcup\{p \in \boldsymbol{P} : p \,||\, G \,|\, и\ G \in \mathfrak{X}\}$.

ЛЕММА 1.6 [9]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– класс Фиттинга и* $p \in \pi(\mathfrak{X})$. *Тогда* $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}$, *где* $\mathfrak{N}_p$ *– класс всех p-групп.*

Для доказательства основного результата мы будем использовать понятия подгрупп $O_\pi(G)$ и $O^\pi(G)$ группы G. В частности, при $\pi = \{p\}$ в соответствии с определением [5, A.8.5] мы будем полагать:

$$O_p(G) = \left\langle N : N \lhd G\ и\ N \in \mathfrak{N}_p \right\rangle,$$

$$O^p(G) = \bigcap\{N : N \lhd G\ и\ G/N \in \mathfrak{N}_p\}.$$

Легко видеть, что $O_p(G) = G_{\mathfrak{N}_p}$ и $O^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p}$, где $G^{\mathfrak{N}_p}$ обозначает p-корадикал группы G. Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – формация, то $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$ группы G называется пересечение всех нормальных подгрупп группы G, факторгруппы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$.

Коммутатором элементов a и b называется элемент $a^{-1}b^{-1}ab$. Подгруппа, порожденная коммутаторами всех элементов группы G, называется коммутантом группы G и обозначается G'.

Известные свойства коммутанта характеризуют следующие леммы.

ЛЕММА 1.7 [5, лемма A.7.4 (e)]. *Пусть* G *– группа и* $U \lhd G$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $G' \le U$;

2) $G/U \in \mathfrak{A}$, *где* $\mathfrak{A}$ *– формация всех абелевых групп.*

ЛЕММА 1.8. *Пусть* G *– группа и* $N \lhd G$. *Тогда* $(G/N)' = G'N/N$.

Напомним, что если G – группа со своими подгруппами A и B такими, что $A \lhd AB = G$ и $A \cap B = 1$, то G называется полупрямым произведением групп A и B (этот факт обозначается $G = [A]B$). Элементы из B через сопряженность индуцируют автоморфизм на группе A, т.е. $A^b = A$ для всех $b \in B.$ Пусть G, H – некоторые группы. Обозначим $|H| = n$, и тогда $H = \{h_1, h_2, ..., h_n\}$. Положим $B = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} G_{h_i}$, где $G_{h_i} \cong G$. Если H действует на B следующим образом:

$$(g_{h_1}, g_{h_2},\ ...,\ g_{h_n})^h = (g_{h_1h^{-1}}, g_{h_2h^{-1}},\ ...,\ g_{h_nh^{-1}}),$$

где $(g_{h_1}, g_{h_2},\ ...,\ g_{h_n}) \in B$ и $h \in H$, то регулярным сплетением $G \wr H$ группы G с группой H называется полупрямое произведение группы B на группу H с определенным выше действием H на B, т.е. $G \wr H = [B]H.$ В этом случае $G^\natural = B$ называется базисной группой сплетения $G \wr H.$

Приведем необходимые нам в дальнейшем известные свойства сплетений групп в виде лемм.

ЛЕММА 1.9 [5, 10]. *Пусть* G *– группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $W = X \wr G$ *и* $Y \le X$, *то* $Y^\natural G \cong Y \wr G \le W$ [5, лемма A.18.2 (c)];

2) *если* $W = X \wr G$ *и* $Y \lhd X$, *то* $W/Y^\natural \cong (X/Y) \wr G$ [5, лемма A.18.2 (d)];

3) *имеет место равенство*: $(G \wr H)' = [G, H]H'$ [10].

ЛЕММА 1.10 [10]. *Пусть* G, H *– группы и* $G^{(n)} = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} G$. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $K \le H$, $G^\natural$ *– базисная группа сплетения* $G \wr H$ *и* $|H : K| = n$ *для некоторого натурального* n, *то* $G^\natural K \cong G^{(n)} \wr K$;

2) *если* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга,* $p \in \boldsymbol{P}$ *и* $G \wr Z_p \in \mathfrak{F}$, *то* $G^{(n)} \wr Z_p \in \mathfrak{F}$ *и* $G \wr H \in \mathfrak{F}$ *для любого натурального* n *и всех* p*-групп* H.

Напомним, что мы называем класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ нормальным в $\mathfrak{S}_\pi$ или π-нормальным, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой π-группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G. Известный критерий π-нормальности класса $\mathfrak{F}$ представляет следующая

ЛЕММА 1.11 [5, теорема X.3.7]. *Пусть* π *– непустое множество простых чисел и* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга* π*-групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F}$ π*-нормален;*

2) *существует натуральное число* n *такое, что* $G^{(n)} \wr Z_p \in \mathfrak{F}$ *для любого* $p \in \pi$ *для всех* $G \in \mathfrak{F}$;

3) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$;

4) $G/G_\mathfrak{F}$ *– абелева для всех* $G \in \mathfrak{S}_\pi$.

Напомним, что если подгруппы U, V группы G таковы, что $UV = VU$, то U и V называют перестановочными и обозначают $U \perp V$. Некоторые свойства перестановочных подгрупп сформулируем в виде следующей леммы.

ЛЕММА 1.12 [5]. *Пусть* U, V *и* W *– подгруппы группы* G. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) [5, A.1.6 (b)] *если* $(|G:U|, |G:V|) = 1$, *то* $G = UV$ *и* $|G:(U \cap V)| = |G:U||G:V|$;

2) [5, A.1.6 (c)] *если* $(|G:U|, |G:V|) = 1$ *и* $W \perp U$, $W \perp V$, *то* $W = (W \cap U)(W \cap V)$ *и* $W(U \cap V) = WU \cap WV$. *В частности,* $W \perp (U \cap V)$.

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется сильно вложенным в класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ (обозначается $\mathfrak{F} << \mathfrak{H}$), если $\mathfrak{H}$-инъектор каждой группы G содержит $\mathfrak{F}$-инъектор этой группы.

ЛЕММА 1.13 [11]. *Пусть* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ *– классы Фиттинга. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $\mathfrak{X} << \mathfrak{Y}$ *и* $\mathfrak{Y} << \mathfrak{Z}$, *то* $\mathfrak{X} << \mathfrak{Z}$;

2) *если* $\mathfrak{X}_* \subseteq \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{X}^*$, *то* $\mathfrak{Y} << \mathfrak{Z}$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется классом Фишера, если из того, что $K \subseteq H \subseteq G \in \mathfrak{F}$, $K \lhd G$, $H/K \in \mathfrak{E}_p$, где p – некоторое простое число, всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$.

ЛЕММА 1.14 [4, теорема 2.1]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– класс Фишера и* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *– множество* $\mathfrak{X}$*-нормальных классов Фиттинга. Если* $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}$, *то* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{X}$*-нормальным классом Фиттинга.*

2. π-Нормальные классы

Для доказательства основного результата изучим вначале свойства π-нормальных классов Фиттинга.

ЛЕММА 2.1. *Пусть* π *– непустое множество простых чисел. Класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *является* π*-нормальным в точности тогда, когда* $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{S}_\pi$ и $G \in \mathfrak{S}_\pi$. Тогда по лемме 1.11 факторгруппа $G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{A}_\pi$, где $\mathfrak{A}_\pi$ – формация всех абелевых π-групп. Следовательно, по определению произведения классов Фиттинга $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{A}_\pi$. Очевидно, $\mathfrak{A}_\pi \subseteq \mathfrak{N}_\pi$ и поэтому $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$.

Итак, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Если $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$, то $G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Кроме того, подгруппа $G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $G \in \mathfrak{S}_\pi$ и равенство $\mathfrak{N}_\pi \subseteq (\mathfrak{S}_\pi)_*$ доказано.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$ и G – произвольная π-группа. Тогда по определению произведения классов Фиттинга $G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{N}_\pi$. Если V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G, то $V/G_\mathfrak{F} \le G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{N}_\pi$. Значит, $V/G_\mathfrak{F} \lhd\lhd G/G_\mathfrak{F}$ и тогда $V \lhd\lhd G$. Учитывая утверждение 1) леммы 1.2, получаем $V = V_\mathfrak{F} = G_\mathfrak{F} \cap V$. Таким образом, $V \subseteq G_\mathfrak{F}$, и по определению $\mathfrak{F}$-радикала $G_\mathfrak{F} \subseteq V$. Следовательно, $V = G_\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-инъектор любой π-группы G является ее нормальной подгруппой. Значит, $G_\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа для всех $G \in \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{S}_\pi$.

Лемма доказана.

В случае $\pi = \mathbb{P}$ из леммы 2.1 вытекает результат Локетта, который сформулируем как

СЛЕДСТВИЕ 2.2 [11]. *Класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *нормален в* $\mathfrak{S}$ *в точности тогда, когда* $\mathfrak{F}\mathfrak{N} = \mathfrak{S}$.

ЛЕММА 2.3. *Пусть* π *– непустое множество простых чисел. Если хотя бы один из классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *или* $\mathfrak{H}$ *является* π*-нормальным, то произведение* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *–* π*-нормальный класс Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{S}_\pi$. Тогда по лемме 1.11 факторгруппа $G/G_\mathfrak{F}$ абелева. Следовательно, для любой π-группы G ввиду $G_\mathfrak{F} \le G_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}}$ с учетом леммы 1.7 (утверждение 2) $\Rightarrow$ 1)) имеем $G' \le G_\mathfrak{F} \le G_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}}$. Из $G' \le G_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}}$ по лемме 1.7 (утверждение 1) $\Rightarrow$ 2)) следует, что $G/G_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}}$ – абелева группа. Тогда по лемме 1.11 класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является π-нормальным.

Пусть теперь $\mathfrak{H} \lhd \mathfrak{S}_\pi$. Так как $G' \le G_\mathfrak{F}$, то $G'G_\mathfrak{F} = G_\mathfrak{F}$, и тогда $G' \le G'G_\mathfrak{F} \le G_{\mathfrak{FH}}$. Отсюда с учетом леммы 1.8

$$G'G_\mathfrak{F} / G_\mathfrak{F} = (G / G_\mathfrak{F})' \le G_{\mathfrak{FH}} / G_\mathfrak{F}.$$

Но по утверждению 2) леммы 1.2 имеет место $G_{\mathfrak{FH}} / G_\mathfrak{F} = (G / G_\mathfrak{F})_\mathfrak{H}$ для любой π-группы G.

Таким образом, $G'G_\mathfrak{F} / G_\mathfrak{F} = (G / G_\mathfrak{F})' \le (G / G_\mathfrak{F})_\mathfrak{H}$ и поэтому $G' \le G_{\mathfrak{FH}}$ для всех $G \in \mathfrak{S}_\pi$. Тогда по лемме 1.7 заключаем, что $G/G_{\mathfrak{FH}}$ – абелева группа. Следовательно, $\mathfrak{FH} \lhd \mathfrak{S}_\pi$ по лемме 1.11.

Лемма доказана.

В случае, когда $\pi = \boldsymbol{P}$, из леммы вытекает результат Косси:

СЛЕДСТВИЕ 2.4 (см., например, [5, X.3.11]). *Если хотя бы один из классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *или* $\mathfrak{H}$ *является нормальным, то произведение* $\mathfrak{FH}$ *– нормальный класс Фиттинга.*

ЛЕММА 2.5. *Если* $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{S}_\pi$, *то* $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\pi)_* = \mathfrak{S}_\pi$.

Доказательство. Из очевидного включения $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ ввиду утверждения 1) леммы 1.5 следует $(\mathfrak{N}_\pi)_* \subseteq (\mathfrak{S}_\pi)_*$. Но по утверждению 3) леммы 1.5 имеем $(\mathfrak{N}_\pi)_* = \mathfrak{N}_\pi$. Поэтому $\mathfrak{N}_\pi \subseteq (\mathfrak{S}_\pi)_*$. Отсюда по утверждению 2) леммы 1.4 имеем $\mathfrak{FN}_\pi \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\pi)_*$. Так как $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{S}_\pi$, то $\mathfrak{FN}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$ по лемме 2.1.

Таким образом, $\mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{FN}_\pi \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\pi)_* \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Отсюда $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\pi)_* = \mathfrak{S}_\pi$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. *Если* π *– непустое множество простых чисел, то пересечение любого множества неединичных* π*-нормальных классов Фиттинга есть неединичный* π*-нормальный класс Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ – множество всех π-нормальных классов Фиттинга и $\mathfrak{D} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i$. Так как класс Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ наследственен, то $\mathfrak{S}_\pi$ – класс Фишера, и по лемме 1.14 класс Фиттинга $\mathfrak{D}$ является π-нормальным.

Так как $\mathfrak{X}_i$ – π-нормальный класс Фиттинга для всех $i \in I$, то по лемме 1.11 имеем $(\mathfrak{X}_i)^* = \mathfrak{S}_\pi$ для каждого $i \in I$. Тогда по утверждению [5, X.1.20] следует $\pi((\mathfrak{X}_i)^*) = \pi(\mathfrak{X}_i) = \pi$. Но по условию $\pi \ne \varnothing$. Следовательно, существует простое число $p \in \pi$ такое, что $p \in \pi(\mathfrak{X}_i)$ для всех $i \in I$, и поэтому по лемме 1.6 получаем $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}_i$ для каждого $i \in I$. Отсюда следует, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D} \ne (1)$.

Таким образом, $\mathfrak{D}$ – неединичный π-нормальный класс Фиттинга.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. *Если* π *– непустое множество простых чисел, то* $(\mathfrak{S}_\pi)_*$ *– единственный нетривиальный минимальный* π*-нормальный класс Фиттинга.*

Доказательство. Заметим, что $Locksec(\mathfrak{S}_\pi)$ состоит из всех π-нормальных классов Фиттинга, т.е. $\mathfrak{X} \in \mathrm{Locksec}(\mathfrak{S}_\pi)$ в точности тогда, когда $\mathfrak{X}$ π-нормален. Тогда ввиду леммы 2.6 минимальный элемент секции Локетта $(\mathfrak{S}_\pi)_*$ является минимальным π-нормальным классом Фиттинга.

3. Основной результат

Для доказательства основного результата мы будем использовать естественное расширение понятия сильного вложения классов Фиттинга в универсуме $\mathfrak{S}_\pi$ в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем:

1) сильно π-вложенным в класс Фиттинга $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ (и обозначим $\mathfrak{F} \ll_\pi \mathfrak{H}$), если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}$-инъектор каждой π-группы G содержит $\mathfrak{F}$-инъектор этой группы.

2) максимальным по сильному π-вложению в классе Фиттинга $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ (обозначим $\mathfrak{F} \ll_\pi \cdot\, \mathfrak{H}$), если $\mathfrak{H}$-инъектор группы G содержит $\mathfrak{F}$-инъектор этой группы и из $\mathfrak{F} \ll_\pi \mathfrak{M} \ll_\pi \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – класс Фиттинга, всегда следует $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{F}, \mathfrak{H}\}$.

ЛЕММА 3.2. *Пусть* $p, q \in \pi \subseteq \boldsymbol{P}$ $(p \ne q)$. *Тогда существует группа* $H = H(p,q) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q = \mathfrak{S}_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ *такая, что* $O_p(H) = H' = H_{(\mathfrak{S}_\pi)_*}$ *и* $|H / H'| = q$.

Доказательство. По теореме 2.5 [12] существует группа H с тем свойством, что $O_p(G) = H' = H_{\mathfrak{S}_*}$ и $|H / H'| = q$. Заметим, что ввиду утверждения [5, X.1.18] имеет место равенство $(\mathfrak{S}_\pi)_* = \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{S}_*$ и тогда $H_{(\mathfrak{S}_\pi)_*} = H_{\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{S}_*} = H_{\mathfrak{S}_\pi} \cap H_{\mathfrak{S}_*}$. Так как H – π-группа, то $H_{\mathfrak{S}_\pi} = H$ и поэтому $H_{\mathfrak{S}_\pi} \cap H_{\mathfrak{S}_*} = H \cap H_{\mathfrak{S}_*} = H_{\mathfrak{S}_*}$. Таким образом, $H_{(\mathfrak{S}_\pi)_*} = H_{\mathfrak{S}_*}$. Следовательно, $O_p(G) = H' = H_{(\mathfrak{S}_\pi)_*}$.

Лемма доказана.

Следующая теорема описывает π-нормальные классы Фиттинга посредством сильного вложения и представляет самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть π – непустое множество простых чисел и $\mathfrak{F} \neq (1)$ – класс Фиттинга π-групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{S}_\pi$;

2) $\mathfrak{F} <<_\pi \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\pi)_*$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Так как $\mathfrak{F}$ – π-нормальный класс Фиттинга, то по лемме 2.5 имеет место равенство $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\pi)_* = \mathfrak{S}_\pi$. Заметим, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ в любой π-группе G ее $\mathfrak{X}$-инъектор является π-подгруппой. Следовательно, по теореме Холла [5, теорема A.3.3] он содержится в холловой π-подгруппе G, т.е. $\mathfrak{S}_\pi$-инъекторе. Отсюда $\mathfrak{X} <<_\pi \mathfrak{S}_\pi$. Поэтому любой класс Фиттинга сильно вложен в $\mathfrak{S}_\pi$. Значит, $\mathfrak{F} <<_\pi \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\pi)_*$.

2) $\Rightarrow$ 1). Если $|\pi| = 1$, то $\pi = \{p\}$ и $\mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{N}_p$. Тогда из условия теоремы имеем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_p$, что влечет $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_p$. Отсюда по лемме 2.1 вытекает π-нормальность класса $\mathfrak{F}$.

Пусть теперь $|\pi| \geq 2$ и $(1) \neq \mathfrak{F}$ – класс Фиттинга такой, что $\mathfrak{F} <<_\pi \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\pi)_*$. Предположим, что $\mathfrak{F}$ не является π-нормальным. Тогда по лемме 1.11 существует простое число $p \in \pi$ такое, что для любого натурального n имеет место $K^{(n)} \wr Z_p \notin \mathfrak{F}$, где $K \in \mathfrak{F}$. Выберем группу K минимального порядка с таким свойством.

Случай 1. Существует $q \in \pi$ ($q \neq p$) и для некоторого натурального m имеет место $K^{(m)} \wr Z_q \in \mathfrak{F}$, где $K^{(m)} = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} K$.

Обозначим $L = K^{(m)}$. Ввиду выбора группы K имеем $L \wr Z_q \in \mathfrak{F}$, причем не существует натурального n такого, что $L^{(n)} \wr Z_q \in \mathfrak{F}$.

По лемме 3.2 найдется группа H с тем свойством, что $O_p(H) = H' = H_{(\mathfrak{S}_\pi)_*}$ и $|H / H'| = q$. Обозначим $G = L \wr H$. Пусть V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G и Q – силовская q-подгруппа группы G такая, что $Q \cap H$ – силовская q-подгруппа группы H. Обозначим $Q = G_q$ и $Q \cap H = H_q$.

Заметим, что $(|H : O_p(H)|, |H : H_q|) = 1$, так как $|H : H_q|$ – q'-число и $|H : O_p(H)| = |H / H'| = q$. Отсюда $H = O_p(H)H_q$ по утверждению 1) леммы 1.12. Тогда ввиду $O_p(H) = H_{\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{N}_p$ имеем $|H| = p^\alpha q$ и $O_p(H)$ является силовской p-подгруппой группы H, т.е. $O_p(H) = H_p$. Из $L^{(q)} \lhd L \wr Z_q$ с учетом того, что $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $L \wr Z_q \in \mathfrak{F}$, следует $L^{(q)} \in \mathfrak{F}$. Значит, $L \in \mathfrak{F}$ и $L^\natural \in \mathfrak{F}$.

Следовательно, $L^\natural \leq G_{\mathfrak{F}} \leq V \leq G$.

Покажем теперь справедливость равенства

$$V = L^\natural (V \cap H_p)(V \cap H_q). \quad (1)$$

Так как $L^\natural \leq V$, то по тождеству Дедекинда $V \cap L^\natural H = L^\natural (V \cap H)$. Отсюда ввиду $V \leq L^\natural H = G$ получаем $V = L^\natural (V \cap H)$.

Заметим, что из $(V \cap H) \cap H_q \leq H_q$ с учетом $|H| = p^\alpha q$ и $|H_q| = q$ следует либо $|V \cap H \cap H_q| = q$, либо $|V \cap H \cap H_q| = 1$.

Если $|V \cap H \cap H_q| = q$, то ввиду $|H_q| = q$ имеем $|V \cap H \cap H_q| = H_q$ и поэтому $H_q \le V \cap H$. Тогда $V \cap H \perp H_q$. Кроме того, $V \cap H \perp H_p$. Действительно, из $H_p = O_p(H) = H_{\mathfrak{N}_p}$ следует $H_p \lhd H$. Так как $V \cap H \le H$ и любая подгруппа перестановочна с нормальной подгруппой, то $V \cap H \perp H_p$. Следовательно, ввиду $(|H : H_p|, |H : H_q|) = 1$ по утверждению 2) леммы 1.12 получаем $V \cap H = ((V \cap H) \cap H_p)((V \cap H) \cap H_q) = (V \cap H_p)(V \cap H_q)$, и равенство (1) доказано.

Если же $|V \cap H \cap H_q| = 1$, то ввиду $|H / H_p| = q$ получаем $H_p < \cdot H$. Отсюда с учетом $|H| = p^{\alpha} q$ имеем $V \cap H \le H_p$, т.е. $V \cap H$ – p-группа. Тогда $(V \cap H)_p = V \cap H \subseteq V \cap H_p \subseteq V \cap H$ и поэтому $V \cap H_p = V \cap H$. Отсюда $(V \cap H_p)(V \cap H_q) = (V \cap H)(V \cap H_q) = V \cap H$ и с учетом $V = L^{\natural}(V \cap H)$ в данном случае также установлена справедливость равенства (1).

Обозначим $V_0 = V \cap H_p$ и $s = |H : V_0|$. Тогда по утверждению 1) леммы 1.9 имеем $L^{\natural} V_0 \cong L^{(s)} \wr V_0$.

Покажем, что $L^{\natural} V_0 \lhd V$.

Из равенства (1) следует, что любой элемент v из V имеет вид: $v = v_1 v_2 v_3$,

где
$$v_1 \in L^{\natural},$$
$$v_2 \in V \cap H_p \subseteq H, \tag{2}$$
$$v_3 \in V \cap H_q \subseteq H, \tag{3}$$

и обратный к v будет $v^{-1} = v_3^{-1} v_2^{-1} v_1^{-1}$.

Для доказательства $L^{\natural} V_0 \lhd V$ нам достаточно показать
$$v_3^{-1} v_2^{-1} v_1^{-1} H_p v_1 v_2 v_3 \subseteq H_p .$$

Так как H_p – нормальная силовская p-подгруппа группы H, то по утверждению 3) леммы 1.1 получаем $H_p \operatorname{Char} H$. Последнее по определению характеристической подгруппы означает, что $(H_p)^{\alpha} = H_p$ для всех автоморфизмов $\alpha \in \operatorname{Aut}(H)$.

Убедимся, что $\alpha \in \operatorname{Aut}(H)$, т.е. $H^{v_1} = H$, где $v_1 \in L^{\natural}$. Так как $G = [L^{\natural}]H$, то по определению полупрямого произведения имеем:
$$(l^{-1}, 1_H)(1_{L^{\natural}}, h)(l, 1_H) = (l^{-1} 1_{L^{\natural}}, (1_H)^{1_{L^{\natural}}} h)(l, 1_H) = (l^{-1}, h)(l, 1_H)(l^{-1} l, h^l 1_H)(1_{L^{\natural}}, h^l) \subseteq H ,$$

где $l \in L^{\natural}$, $h \in H$, $(1, 1_H)$ – произвольный элемент из H, $(1_{L^{\natural}}, h)$ – произвольный из $L^{\natural}$ и $(l^{-1}, 1_H)$ – обратный к элементу $(1_{L^{\natural}}, h)$.

Следовательно, с учетом равенства $|H^{v_1}| = |H|$ заключаем, что $H^{v_1} = H$. Значит, любой элемент из $L^{\natural}$ является автоморфизмом для H, т.е. для всех $v_1 \in L^{\natural}$ следует $v_1 \in \operatorname{Aut}(H)$. Отсюда $v_1^{-1} H_p v_1 \subseteq H_p$. Из (2) и (3) получаем $v_3^{-1} v_2^{-1} (v_1^{-1} H_p v_1) v_2 v_3 \subseteq H_p$. Итак, $v^{-1} H_p v \subseteq H_p$.

Таким образом, $L^{\natural} V_0 \lhd V$.

Теперь, ввиду выбора L остается принять $V_0 = 1$. Поэтому $V = L^{\natural}(V \cap H_q)$. Но так как $V \cap H_q = V \cap (G_q \cap H) \le G_q$, то
$$V = L^{\natural}(V \cap H_q) \le L^{\natural} G_q .$$

Если $t = |H : H_q|$, то $L^{\natural} G_q \cong L^{(t)} \wr H_q$ по утверждению 1) леммы 1.10. Так как $|H_q| = q$, то q-группа H_q является простой, а следовательно циклической группой простого порядка q, т.е. $H_q \cong Z_q$. Отсюда $L^{(t)} \wr H_q \cong L^{(t)} \wr Z_q$. Но по утверждению 2) леммы 1.10 имеем $L^{(t)} \wr Z_q \in \mathfrak{F}$ и поэтому $L^{(t)} \wr H_q \in \mathfrak{F}$. Значит, $L^{\natural} G_q \in \mathfrak{F}$ и $V \le L^{\natural} G_q$. Но по определению $\mathfrak{F}$-инъектора V является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G. Поэтому $V = L^{\natural} G_q$.

Так как $V_0 = V \cap H_p = 1$, то ввиду $G_{\mathsf{F}} \le V$ имеем $G_{\mathsf{F}} \cap H_p = 1$. Из $L \natural \le G_{\mathsf{F}}$ по тождеству Дедекинда следует

$$G_{\mathsf{F}} \cap L \natural H = L \natural (G_{\mathsf{F}} \cap H).$$

Но $L \natural H = G$ и поэтому $G_{\mathsf{F}} = L \natural (G_{\mathsf{F}} \cap H)$.

Пусть $L \natural < G_{\mathsf{F}}$. Если $G_{\mathsf{F}} \cap H = 1$, то из равенства $G_{\mathsf{F}} = L \natural (G_{\mathsf{F}} \cap H)$ следует $G_{\mathsf{F}} = L \natural$ – противоречие. Значит, $G_{\mathsf{F}} \cap H \ne 1$.

Заметим, что $H_p \perp G_{\mathsf{F}} \cap H$, так как $H_p = H_{\mathsf{N}_p} \triangleleft H$ и $G_{\mathsf{F}} \cap H \le H$. Кроме того, $G_{\mathsf{F}} \cap H \triangleleft H$ по утверждению 2) леммы 1.1. Отсюда ввиду $H_q \le H$ имеем $G_{\mathsf{F}} \cap H \perp H_q$. Следовательно, с учетом $(|H : H_p|, |H : H_q|) = 1$ по утверждению 2) леммы 1.12 следует $G_{\mathsf{F}} \cap H = (G_{\mathsf{F}} \cap H \cap H_p)(G_{\mathsf{F}} \cap H \cap H_q)$. Но $H_p \le H$ и $G_{\mathsf{F}} \cap H_p = 1$. Поэтому $G_{\mathsf{F}} \cap H = G_{\mathsf{F}} \cap H_q$.

Итак, с учетом того, что $G_{\mathsf{F}} \cap H \triangleleft H$ по утверждению 2) леммы 1.1, получаем

$$1 < G_{\mathsf{F}} \cap H = G_{\mathsf{F}} \cap H_q \triangleleft H.$$

Из условий $|H| = p^{\alpha} q$ и того, что $|H_q|$ – q-число, ввиду $1 < G_{\mathsf{F}} \cap H_q \triangleleft H$ имеем $G_{\mathsf{F}} \cap H_q = H_q$. Поэтому $H_q \triangleleft H$.

Итак, $H_p \triangleleft H$ и $H_q \triangleleft H$. Кроме того, из

$$p^{\alpha} q = \frac{|H_p||H_q|}{|H_p \cap H_q|} = \frac{p^{\alpha} q}{|H_p \cap H_q|}$$

следует $|H_p \cap H_q| = 1$.

Значит, $H = H_p \times H_q$, и тогда H-группа H нильпотентна, так как представима в виде прямого произведения своих силовских подгрупп. Но из очевидного включения $\mathsf{N}_{\pi} \subset \mathsf{S}_{\pi}$ с учетом утверждения 1) леммы 1.5 следует $(\mathsf{N}_{\pi})_{\star} \subset (\mathsf{S}_{\pi})_{\star}$. Но $(\mathsf{N}_{\pi})_{\star} = \mathsf{N}_{\pi}$ ввиду утверждения 3) леммы 1.5. Отсюда $\mathsf{N}_{\pi} \subset (\mathsf{S}_{\pi})_{\star}$. Следовательно, $H_{(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}} = H$ – противоречие с условием $|H / H'| = |H / H_{(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}}| = q$. Значит, $L \natural = G_{\mathsf{F}}$.

Если $G/G_{\mathsf{F}} \in (\mathsf{S}_{\pi})_{\star}$, то ввиду $G = L \wr H = L \natural H$ имеем $G / L \natural \cong H \in (\mathsf{S}_{\pi})_{\star}$ – противоречие с выбором H. Значит, $G/G_{\mathsf{F}} \notin (\mathsf{S}_{\pi})_{\star}$. Последнее равносильно $G \notin \mathsf{F}(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}$.

Заметим, что ввиду леммы 1.11 группа $G / G_{(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}}$ – абелева. Отсюда по лемме 1.7 $G' \le G_{(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}}$. Кроме того, по утверждению 3) леммы 1.9 справедливо равенство $G' = [L \natural, H]H'$. Следовательно, ввиду $L \natural G_q = V$ получаем

$$VG_{(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}} \ge (L \natural G_q)([L \natural, H]H_p).$$

Заметим, что

$$L \natural G_q H_q([L \natural, H]H_p) \supseteq L \natural H_q H_p = L \natural H_p H_q = L \natural H = G.$$

Итак, $VG_{(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}} \ge G$. С другой стороны, $VG_{(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}} \le G$ ввиду $V \le G$ и $G_{(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}} \le G$. Значит, $VG_{(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}} = G$.

Пусть W – $\mathsf{F}(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}$-инъектор группы G. Так как по условию $\mathsf{F} <<_{\pi} \mathsf{F}(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}$, то $V \subseteq W$. По лемме 2.3 ввиду того что $(\mathsf{S}_{\pi})_{\star} \triangleleft \mathsf{S}_{\pi}$ получаем $(\mathsf{S}_{\pi})_{\star} \subseteq \mathsf{F}(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}$. Следовательно, $G_{(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}} \subseteq G_{\mathsf{F}(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}} \subseteq W$. Из условий $V \subseteq W$ и $G_{(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}} \subseteq W$ следует $VG_{(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}} \subseteq W$. Но $VG_{(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}} = G$ и $W \subseteq G$. Поэтому $W = G$ и тогда G совпадает со своим $\mathsf{F}(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}$-инъектором. Последнее влечет $G \in \mathsf{F}(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}$. Полученное противоречие с выбором G доказывает, что $\mathsf{F} \triangleleft \mathsf{F}(\mathsf{S}_{\pi})_{\star}$.

Остается рассмотреть

Случай 2. Для всех простых чисел q $(q \neq p)$ и для любого натурального n имеет место $K^{(n)} \wr Z_q \notin \mathsf{F}$.

Если $O^p(K) < K$, то найдется натуральное число v такое, что $O^p(K)^{(v)} \wr Z_p \in \mathsf{F}$. Так как $O^p(K) \lhd K$, то $O^p(K)^{(v)} \le K^{(v)}$. По утверждению 1) леммы 1.10 имеем

$$(K^{(v)} \wr Z_p)/(O^p(K)^{(v)})^{\natural} \cong (K^{(v)} / O^p(K)^{(v)}) \wr Z_p.$$

Но $K^{(v)} / O^p(K)^{(v)} \cong (K / O^p(K))^{(v)}$ по утверждению 4) леммы 1.1. Из определения $O^p(K)$ заключаем, что $K / O^p(K)$ – p-группа. Следовательно, $K^{(v)} / O^p(K)^{(v)}$ – также p-группа и тогда $(K^{(v)} / O^p(K)^{(v)}) \wr Z_p \in \mathsf{N}_p$. Поэтому $(K^{(v)} \wr Z_p)/(O^p(K)^{(v)})^{\natural}$ – p-группа.

Из $O^p(K) \le K$ следует $O^p(K)^{(v)} \le K^{(v)}$. Отсюда $(O^p(K)^{(v)})^{\natural} \le (K^{(v)})^{\natural}$ и $(O^p(K)^{(v)})^{\natural} Z_p \le (K^{(v)})^{\natural} Z_p$. Значит, $(O^p(K)^{(v)})^{\natural} Z_p \le K^{(v)} \wr Z_p$. Следовательно,

$$(O^p(K)^{(v)})^{\natural} Z_p /(O^p(K)^{(v)})^{\natural} \le K^{(v)} \wr Z_p /(O^p(K)^{(v)})^{\natural}.$$

Но все подгруппы нильпотентной группы субнормальны в ней.

Значит, $(O^p(K)^{(v)})^{\natural} Z_p /(O^p(K)^{(v)})^{\natural} \lhd\lhd K^{(v)} \wr Z_p /(O^p(K)^{(v)})^{\natural}$, и по теореме о соответствии получаем:

$$(O^p(K)^{(v)})^{\natural} Z_p \lhd\lhd K^{(v)} \wr Z_p.$$

По утверждению 1) леммы 1.9 имеем $(O^p(K)^{(v)})^{\natural} Z_p \cong O^p(K)^{(v)} Z_p$. Легко видеть, что если $N \lhd G$, то $G \times G \times ... \times G = G(N \times N \times ... \times N)$ для любого конечного числа сомножителей. Значит,

$$K^{(v)}(O^p(K)^{(v)})^{\natural} Z_p = (K^{(v)} O^p(K)^{(v)})^{\natural} Z_p = (K^{(v)})^{\natural} Z_p = K^{(v)} \wr Z_p.$$

Отсюда $K^{(v)} \wr Z_p \in \mathsf{F}$ – противоречие. Следовательно, можно допустить $O^p(K) = K$. Так как K – разрешимая группа, то существует простое $q \neq p$ такое, что $O^q(K) < K$. Тогда из выбора K следует, что найдется натуральное число w, для которого $O^q(K)^{(w)} \wr Z_p \in \mathsf{F}$.

Предположим, что для некоторого натурального x выполняется $O^q(K)^{(x)} \wr Z_q \in \mathsf{F}$. Из доказанного выше получаем $K^{(x)} \wr Z_q \in \mathsf{F}$ – противоречие. Значит, $O^q(K)^{(n)} \wr Z_q \notin \mathsf{F}$ для любого натурального n.

Пусть $L = O^q(K)^{(w)}$. Тогда $L \wr Z_p \in \mathsf{F}$. Но не существует натуральных чисел n таких, что $L^{(n)} \wr Z_q \in \mathsf{F}$. Вывод из случая 1 может быть сейчас использован, если поменять ролями числа p и q.

Таким образом, оба случая привели к противоречию. Остается признать, что класс Фиттинга F нормален в S_π.

Теорема доказана.

Отрицательный ответ на указанный во введении вопрос дает

ТЕОРЕМА 3.4. *В классе* $(\mathsf{S}_\pi)_*$ *нет нетривиальных максимальных по сильному* π*-вложению подклассов Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $(1) \neq \mathsf{F} \subseteq \mathsf{S}_\pi$ – класс Фиттинга и $\mathsf{F} <\!<_\pi \cdot (\mathsf{S}_\pi)_*$.

Покажем сначала, что если класс Фиттинга F не является π-нормальным, то $\mathsf{F} <\!\not<_\pi \mathsf{F} \vee (\mathsf{S}_\pi)_*$.

По лемме 2.5 справедливо равенство $\mathsf{F}(\mathsf{S}_\pi)_* = \mathsf{S}_\pi$. Но тогда ввиду $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{S}_\pi$ получаем $\mathsf{F} \vee (\mathsf{S}_\pi)_* \subseteq \mathsf{F}(\mathsf{S}_\pi)_*$.

Заметим, что

$$\mathsf{F}_* \subseteq \mathsf{F} \subseteq \mathsf{F} \vee (\mathsf{S}_\pi)_* \subseteq \mathsf{F}(\mathsf{S}_\pi)_* \subseteq ((\mathsf{S}_\pi)_*)^* = (\mathsf{S}_\pi)^* = \mathsf{S}_\pi.$$

Отсюда по утверждению 2) леммы 1.13 заключаем, что $\mathsf{F} \vee (\mathsf{S}_\pi)_* \ll_\pi \mathsf{F}(\mathsf{S}_\pi)_*$. Если $\mathsf{F} \ll_\pi \mathsf{F} \vee (\mathsf{S}_\pi)_*$, то ввиду $\mathsf{F} \vee (\mathsf{S}_\pi)_* \ll_\pi \mathsf{F}(\mathsf{S}_\pi)_*$ по утверждению 2) леммы 1.13 получаем $\mathsf{F} \ll_\pi \mathsf{F}(\mathsf{S}_\pi)_*$ – противоречие с теоремой 3.3. Следовательно, $\mathsf{F} \not\ll_\pi \mathsf{F} \vee (\mathsf{S}_\pi)_*$.

Заметим, что условие $\mathsf{F} \ll_\pi (\mathsf{S}_\pi)_*$ влечет $\mathsf{F} \vee (\mathsf{S}_\pi)_* = (\mathsf{S}_\pi)_*$. Поэтому из доказанного выше следует, что в классе $(\mathsf{S}_\pi)_*$ нет нетривиальных не π-нормальных классов Фиттинга F таких, что $\mathsf{F} \ll_\pi (\mathsf{S}_\pi)_*$.

По условию теоремы мы имеем $\mathsf{F} \ll_\pi (\mathsf{S}_\pi)_*$. Значит, F является π-нормальным классом Фиттинга. Но $(\mathsf{S}_\pi)_*$ – минимальный π-нормальный класс Фиттинга, и поэтому $(\mathsf{S}_\pi)_* \subseteq \mathsf{F}$, что противоречит максимальности F в $(\mathsf{S}_\pi)_*$.

Теорема доказана.

В случае, когда $\pi = \boldsymbol{P}$, из теоремы 3.4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *В классе S_* нет нетривиальных максимальных по сильному вложению подклассов Фиттинга.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Cossey, J. Products of Fitting Classes / J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141, № 2. – S. 289 – 295.
2. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп) / Институт математики СО РАН. – 1999. – Издание 14. – 135 с.
3. Воробьев, Н.Т. О проблеме Лауша в теории нормальных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Докл. АН БССР. – 1991. – Т. 35, № 6. – С. 485 – 487.
4. Shpakov, V.V. On inersection of normal Fitting classes of finite groups / V.V. Shpakov, N.N. Vorob'ev, N.T. Vorob'ev // Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae. – 2003. – 30. – P. 167 – 171.
5. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
6. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – Т. 43, Вып. 2. – 1988. – С. 161 – 168.
7. Lockett, P. The Fitting class F^* / P. Lockett // Math. Z. –1974. – Bd. 137. – S. 131 – 136.
8. Bryce, R.A. A Problem in Theory of normal Fitting Classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141, № 2. – S. 99 – 110.
9. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193 – 207.
10. Cusack, E. Strong Containment of Fitting Classes / E. Cusack // Journal of Algebra. – 1980. – 64. – P. 414 – 429.
11. Lockett, P. On the Theory of Fitting Classes of Finite Soluble Groups. Ph. D. Thesis, University of Warwick, 1971.
12. Brison, O.J. Hall-closure and products of Fitting classes / O.J. Brison // J. Austral. Math. Soc. (Series A). – 1982. – 32. – C. 145 – 164.

Поступила 23.04.2008