УДК 512.542

О ПОСТРОЕНИИ КЛАССОВ ФИТТИНГА ЛОКАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫМИ РАДИКАЛАМИ ГРУПП

канд. физ.-мат. наук В.Н. ЗАГУРСКИЙ
(Витебский государственный технологический университет);
д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Т. ВОРОБЬЕВ
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Рассматривается развитие метода Хартли и разработка нового метода построения локальных классов Фиттинга посредством обобщения понятия функции Хартли. Отличие нового метода от известного подхода построения локальных классов Фиттинга состоит в том, что вместо функций Хартли применены локальные функции, значения которых в общем случае не являются классами Фиттинга. Эффективность такого подхода подтверждена описанием новых локальных заданий классов Фиттинга посредством локальных функций, определяемых радикалами групп. Среди таких локальных функций (нормально-наследственных и замкнутых относительно конечных прямых произведений) класса Фиттинга описана в терминах радикалов наибольшая. В частности, описана наибольшая локальная функция для классических объектов теории классов – классов нильпотентных групп. Установлено, что класс всех нильпотентных групп может быть определен по-новому такой локальной функцией, каждое значение которой определяются группами, радикалы Фиттинга которых примарны.

Введение. В теории конечных групп многие исследования структуры классов групп и канонических подгрупп связаны с изучением отображений $f:\{\,\textit{простые числа}\,\}\to\{\,\textit{классы групп}\,\}$, которые называют локальными групповыми функциями или просто локальными функциями. Такие отображения были впервые определены и классифицированы Л.А. Шеметковым в работах [1, 2].

Известно, что локальная формация может определяться различными типами локальных функций и возникает задача существования и описания наибольшей из них. Напомним, что если все значения локальной функции *f* являются формациями, то *f* называют локальным экраном или локальным спутником, а в случае, когда все значения *f* – классы Фиттинга, *f* называют функцией Хартли или *H*-функцией.

Первоначальные попытки исследования локальных функций формации были предприняты в работе Райта [3], где описан наибольший локальный спутник формации всех нильпотентных групп. Наибольший локальный спутник произвольной локальной формации в классе S всех конечных разрешимых групп описан Дерком [4]. В дальнейшем Н.Т. Воробьев [5], используя результаты Л.А. Шеметкова [6] о формационных нормализаторах, расширил результат Дерка на класс частично разрешимых групп. Вместе с тем в теории классов Фиттинга задача описания наибольшей локальной функции класса Фиттинга в общем виде до настоящего времени не рассматривалась. В этом направлении были получены только некоторые результаты [7], относящиеся к описанию наибольшей функции Хартли специального вида и [8] по описанию наибольшей функции произведения $\mathsf{F}\mathsf{N}_\pi$ непустого класса Фиттинга F и класса N_π всех нильпотентных π-групп.

Основной результат настоящей работы – описание в терминах радикалов наибольшей локальной функции произвольного разрешимого локального класса Фиттинга F. В частности, установлено, что класс Фиттинга N всех нильпотентных групп определяется локальной функцией f такой, что f не является функцией Хартли и значения $f(p)$ для каждого простого p – классы всех тех и только тех групп, радикалы Фиттинга которых являются p-группами.

В данной работе нами рассматриваются только конечные разрешимые группы.

Класс групп X называют:

– S_n-замкнутым, если $G\in\mathsf{X}$ и $N\lhd G$, следует $N\in\mathsf{X}$;

– N_0-замкнутым, если из условия $G=N_1N_2$, где $N_i\lhd G$ и $N_i\in\mathsf{X}$ ($i=1,2$), следует $G\in\mathsf{X}$;

– D_0-замкнутым, если из $G_i\in\mathsf{X}$ для любого $i=1,\ \dots,\ r$, следует $G_1\times\ldots\times G_r\in\mathsf{X}$.

Класс групп X называется классом Фиттинга, если он одновременно S_n-замкнут и N_0-замкнут. Из определения следует, что для любого непустого класса Фиттинга X в любой группе G существует единственная X-максимальная нормальная подгруппа G_{X} группы *G*. Ее называют X-радикалом G. Через $\mathsf{F}\mathsf{H}$ обозначают произведение классов Фиттинга F и H – класс всех тех групп G, для которых $G/G_{\mathsf{F}}\in\mathsf{H}$.

Известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна. Произведением $\mathfrak{XY}$ классов групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ [9] называют класс всех тех групп G, которые имеют такую нормальную $\mathfrak{X}$-подгруппу N, что $G/N \in \mathfrak{Y}$. Если $\mathfrak{X} = \varnothing$ или $\mathfrak{Y} = \varnothing$, то полагают $\mathfrak{XY} = \varnothing$.

Заметим также, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для любых групп G и H справедливо равенство: $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и классов Фиттинга впервые был предложен Хартли [10]. Всякое отображение $f : \mathbb{P} \to \{$ *классы Фиттинга* $\}$ называется функцией Хартли или *H*-функцией [11]. Через $Supp(f) = \{p \in \mathbb{P} \mid f(p) \neq \varnothing\}$ обозначают носитель *f*.

Пусть $LR(f) = \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$, где π – носитель *H*-функции f. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным [10], если $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой *H*-функции f. Функцию Хартли f класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют приведенной, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех простых p. Любой локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется наибольшей приведенной *H*-функцией F такой, что $F(p)\mathfrak{N}_p = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $F(p)$ – класс Локетта для всех простых p [12].

В этой работе мы используем метод построения локальных классов Фиттинга с помощью конструкции $\mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$ посредством локальных функций f, значения которых в общем случае не являются классами Фиттинга. Мы говорим, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется локальной функцией f, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$ и локальная функция f в общем случае не является *H*-функцией.

Если все значения локальной функции f являются S_n-замкнутыми классами групп, то функция f называется S_n-замкнутой. Локальная функция f называется $< S_n, D_0 >$-замкнутой, если класс $f(p)$ для каждого простого p одновременно нормально-наследственен (S_n-замкнут) и замкнут относительно конечных прямых произведений (D_0-замкнут).

Следуя Л.А. Шеметкову [2], любое непустое множество Ω – локальных функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, будем считать частично упорядоченным с отношением $\leq$, которое задается следующим образом. Если $f, h \in \Omega$, то $f \leq h$ в том и только в том случае, когда $f(p) \subseteq h(p)$ для всех простых p. Наибольший элемент множества Ω назовем наибольшей локальной функцией класса $\mathfrak{F}$.

Возникает общая задача существования и описания наименьших, наибольших локальных функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. В настоящей работе эта задача решается для случая наибольшей нормально-наследственной и замкнутой относительно конечных прямых произведений ($< S_n, D_0 >$-замкнутой) локальной функции. Кроме того, описаны новые локальные задания классов Фиттинга посредством локальных функций, определяемых радикалами групп.

Другие определения и обозначения при необходимости можно найти в [2, 9].

ЛЕММА 1 [9]. *Если группа* N *субнормальна в группе* G *и* $\mathfrak{F}$ *– непустой класс Фиттинга, то* $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$.

Для непустых классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ через $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ обозначим класс всех групп, $\mathfrak{F}$-радикалы которых содержатся в $\mathfrak{X}$.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}$ *– непустые классы Фиттинга. Тогда:*

1) *класс групп* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ *является* S_n*-замкнутым;*
2) *если* $\mathfrak{F}$ *– класс Локетта, то класс групп* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ *является* D_0*-замкнутым;*
3) *если* $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{X}$ *для некоторого простого* p, *то* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$.

Доказательство. Докажем вначале, что класс групп $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ является S_n-замкнутым.

Очевидно, что $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \subseteq S_n\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$. Пусть $G \in S_n\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$. Тогда существует группа $K \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ такая, что $G \triangleleft K$. Значит, по лемме 1 $G_{\mathfrak{F}} = G \cap K_{\mathfrak{F}} \subseteq K_{\mathfrak{F}}$. Кроме того, $G \cap K_{\mathfrak{F}} \triangleleft K$ и поэтому $G_{\mathfrak{F}} \triangleleft K_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$. Отсюда получаем, $G \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ и $S_n\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$. Таким образом, класс $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ является S_n-замкнутым.

Докажем, что если $\mathfrak{F}$ – класс Локетта, то класс групп $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ является D_0-замкнутым.

Очевидно, что $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \subseteq D_0\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$. Пусть группа $G \in D_0\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$. Тогда в G существуют нормальные подгруппы G_i такие, что $G_i \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$, где $i = 1, ..., r$ и $G = G_1 \times \ldots \times G_r$. Покажем, что $G \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$. Так как $\mathfrak{F}$ – класс Локетта, то $G_{\mathfrak{F}} = (G_1)_{\mathfrak{F}} \times \ldots \times (G_r)_{\mathfrak{F}}$. Но $G_i \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ и, следовательно, $(G_i)_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$ для $i \in \{1, \ldots, r\}$. Поскольку $\mathfrak{X}$ является классом Фиттинга и $(G_i)_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$, то $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ и $D_0\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$. Итак, класс $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ является D_0-замкнутым.

Покажем теперь, что если $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{X}$ для некоторого простого p, то $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$.

Очевидно, что $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{N}_p$. Пусть группа $G \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{N}_p$. Тогда существует нормальная подгруппа K группы G такая, что $K \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$, причем $G/K \in \mathfrak{N}_p$. Ввиду изоморфизма $G_{\mathfrak{F}}K/K \cong G_{\mathfrak{F}}/(G_{\mathfrak{F}} \cap K)$ и леммы 1 получаем $G_{\mathfrak{F}}K/K \cong G_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{F}}$. Но $G/K \in \mathfrak{N}_p$ и поэтому фактор $G_{\mathfrak{F}}K/K$ является p-группой. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_p$. Так как $K \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$, то $K_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$. Тогда $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{X}$ и $G \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$, что доказывает равенство $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Если непустой класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *определяется некоторой* S_n*-замкнутой локальной функцией* f, *то* $\pi(\mathfrak{F}) = Supp(f)$.

Доказательство. Пусть $\pi = Supp(f)$. Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi} \cap (\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$, то $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq Supp(f)$. Пусть $p \in Supp(f)$ и Z_p – циклическая группа простого порядка p.

Покажем, что $Z_p \in \mathfrak{F}$. Действительно, $f(p) \neq \varnothing$ и $(1) \subseteq f(p)$. Следовательно, учитывая определение произведения классов групп, $Z_p \in \mathfrak{N}_p \subseteq f(p)\mathfrak{N}_p \subseteq f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Если $q \in Supp(f)$ и $q \neq p$, то снова по определению произведения классов групп $Z_p \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{S}_{q'} \subseteq \mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'} \subseteq f(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}$.

Таким образом, $Z_p \in \mathfrak{S}_{\pi} \cap (\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) = \mathfrak{F}$. Это означает, что $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi(\mathfrak{F}) = Supp(f)$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальный класс Фиттинга с наибольшей приведенной H-функцией* F, $\pi = Supp(F)$. *Если* $\mathfrak{F}$ *определяется некоторой* $< S_n, D_0 >$*-замкнутой локальной функцией* f, *то* $\mathfrak{F} \cap f(p) \subseteq F(p)$ *для всех* $p \in \pi$.

Доказательство. По лемме 3 $\pi = Supp(f)$ и, значит, $f(p) \neq \varnothing$ для всех $p \in \pi$.

Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in (\mathfrak{F} \cap f(p)) \setminus F(p)$ для некоторого p из π. Тогда группа G комонолитична и ее комонолит $G_{F(p)}$. Поэтому $G/G_{F(p)} \cong Z_q$ для $q \in \pi$ и $q \neq p$.

Далее положим $X = G \wr Z_p = [K]Z_p$, где K – база регулярного сплетения *X*. Поскольку $F(p)$ – класс Локетта и $G \notin F(p)$, то ввиду X.2.1a [9] $X_{F(p)} = K_1$, где K_1 – база регулярного сплетения $X_1 = G_{F(p)} \wr Z_p$. Ввиду свойств сплетений (см., например, A.18.2d [9])

$$X / X_{F(p)} = X / K_1 \cong (G / G_{F(p)}) \wr Z_p.$$

Учитывая $G/G_{F(p)} \cong Z_q$, получаем $X / X_{F(p)} \cong Z_q \wr Z_p \notin \mathfrak{S}_{p'}$. Тогда $X / X_{F(p)} \notin \mathfrak{S}_{p'}$.

С другой стороны, поскольку $X = [K]Z_p$, то из свойств полупрямого произведения следует, что $X / K \cong Z_p \in \mathfrak{N}_p$. Но $G \in f(p)$ и класс $f(p)$ является D_0-замкнутым, поэтому $K \in f(p)$. Также по лемме 5 [13] локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является классом Локетта и $G \in \mathfrak{F}$, значит, $K \in \mathfrak{F}$. Тогда по определению произведения классов групп, получим $X \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \cap f(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \cap f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$.

Поскольку $\mathfrak{F}$ определяется локальной функцией f, то

$$X \in (\mathfrak{S}_{\pi} \cap f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \cap (\cap_{\substack{r\neq p \\ r\in\pi}} f(r)\mathfrak{N}_r\mathfrak{S}_{r'}))\mathfrak{N}_p \cap f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} =$$

$$= \mathfrak{S}_{\pi} \cap f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p \cap (\cap_{\substack{r\neq p \\ r\in\pi}} f(r)\mathfrak{N}_r\mathfrak{S}_{r'}) \cap f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} =$$

$$= \mathfrak{S}_{\pi} \cap f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \cap (\cap_{\substack{r\neq p \\ r\in\pi}} f(r)\mathfrak{N}_r\mathfrak{S}_{r'}) = \mathfrak{F}.$$

Таким образом, $X \in \mathfrak{F} = LR(F)$ и, значит, $X / X_{F(p)} \in \mathfrak{S}_{p'}$. Получили противоречие с тем, что $X / X_{F(p)} \notin \mathfrak{S}_{p'}$. Это завершает доказательство того, что $\mathfrak{F} \cap f(p) \subseteq F(p)$ для всех $p \in \pi$.

Лемма доказана.

Новые локальные задания и наибольшую $< S_n, D_0 >$-замкнутую локальную функцию класса Фиттинга в терминах радикалов описывает

ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга с H-функцией f и наибольшей приведенной H-функцией F, $\pi = Supp(F)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F}$ *определяется S_n-замкнутой локальной функцией g такой, что*

$$g(p) = \begin{cases} \mathfrak{F}_{f(p)\mathfrak{N}_p}, \text{ при } p \in \pi; \\ \varnothing \qquad\quad, \text{ при } p \in \pi' \end{cases}$$

и $g(p) = D_0 g(p)$, $g(p) = g(p)\mathfrak{N}_p$ *для всех* $p \in \pi$;

2) $\mathfrak{F}$ *определяется наибольшей $< S_n, D_0 >$-замкнутой локальной функцией x такой, что $x(p) = \mathfrak{F}_{F(p)}$ для всех $p \in \pi$ и $x(p) = \varnothing$ для всех $p \in \pi'$.*

Доказательство. Так как по лемме 5 [13] локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является классом Локетта, то по лемме 2 локальная функция g является S_n-замкнутой, $g(p) = D_0 g(p)$ и $g(p) = g(p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \pi$.

Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi} g(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$.

Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для любого простого p из множества π и $G / G_{f(p)} \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Но $(G_{f(p)})_\mathfrak{F} \trianglelefteq G_{f(p)} \in f(p)$ – класс Фиттинга, и поэтому $(G_{f(p)})_\mathfrak{F} \in f(p) \subseteq f(p)\mathfrak{N}_p$. Следовательно, $G_{f(p)} \in g(p)$. Далее, по определению произведения классов групп получаем, что $G \in g(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для любого p из π и поэтому $G \in \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi} g(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) = \mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Докажем обратное включение $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$. Легко видеть, что группа G комонолитична и ее комонолит $G_\mathfrak{F}$. Учитывая $G \in \mathfrak{M}$, получаем $G \in g(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для всех $p \in \pi$. По определению произведения классов групп существует нормальная подгруппа N из G такая, что $N \in g(p)$ и $G / N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$.

Покажем, что $G \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Так как $G_\mathfrak{F}$ – комонолит группы G, то либо $N \le G_\mathfrak{F}$, либо $N = G$.

Пусть $N \le G_\mathfrak{F}$. Тогда, учитывая $N = N_\mathfrak{F}$ и $N \in g(p)$, имеем $N = N_\mathfrak{F} \in f(p)\mathfrak{N}_p$. Значит, $G / N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ и $N \in f(p)\mathfrak{N}_p$. Следовательно, по определению произведения классов групп получим, что $G \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$.

Пусть $N = G$. Так как $N \in g(p)$, то $G_\mathfrak{F} \in f(p)\mathfrak{N}_p$. Поэтому либо $G_\mathfrak{F} = G_{f(p)\mathfrak{N}_p}$, либо $G = G_{f(p)\mathfrak{N}_p}$.

Если $G = G_{f(p)\mathfrak{N}_p}$, то $G \in f(p)\mathfrak{N}_p \subseteq f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$.

Пусть $G_\mathfrak{F} = G_{f(p)\mathfrak{N}_p}$. Так как $G_\mathfrak{F}$ – комонолит группы G, то $G / G_\mathfrak{F} \cong Z_q$ для $q \in \pi$. Значит, $G / G_{f(p)\mathfrak{N}_p} \cong Z_q$ для $q \in \pi$. Если $q = p$, то $G \in f(p)\mathfrak{N}_p \subseteq f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Если $q \ne p$, то $G \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q \subseteq f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$.

Таким образом, $G \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для любого простого p из π. Кроме того, $G \in \mathfrak{S}_\pi$ и поэтому $G \in \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) = \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$.

Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение.

Согласно первому утверждению теоремы класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется $< S_n, D_0 >$-замкнутой локальной функцией x такой, что $x(p) = \mathfrak{F}_{F(p)}$ для всех $p \in \pi$ и $x(p) = \varnothing$ для всех $p \in \pi'$.

Покажем, что x – наибольшая $< S_n, D_0 >$-замкнутая локальная функция класса $\mathfrak{F}$. Пусть h – произвольная $< S_n, D_0 >$-замкнутая локальная функция, определяющая класс $\mathfrak{F}$.

Покажем, что $h(p) \subseteq x(p)$ для любого p из π. Если $G \in h(p)$, то $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F} \cap h(p)$. Но по лемме 4 $\mathfrak{F} \cap h(p) \subseteq F(p)$ и поэтому $G_{\mathfrak{F}} \in F(p)$. Следовательно, $G \in x(p)$ и $h(p) \subseteq x(p)$ для любого p из π. Это означает, что $h \le x$. Второе утверждение теоремы доказано.

Теорема доказана.

В частности, справедливо

СЛЕДСТВИЕ [8]. *Класс Фиттинга* $\mathfrak{N}$ *всех нильпотентных групп определяется наибольшей* $< S_n, D_0 >$*-замкнутой локальной функцией* x *такой, что* $x(p) = (G \mid G_{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}_p)$ *и* $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ *для всех простых* p.

Очевидно, что каждая *H*-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ является локальной функцией. В связи с этим возникает следующий вопрос: существуют ли классы Фиттинга, определяемые локальными функциями, которые не являются H -функциями?

Доказательство того, что наибольшая $< S_n, D_0 >$-замкнутая локальная функцией x класса Фиттинга $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп не является H -функцией и тем самым утвердительный ответ на указанный выше вопрос дает теорема [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628 – 648.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. Wright, C.R. B. On screens and L-Izers of Finite Solvable Groups / C.R. Wright // Math. Z. – 1970. – Vol. 115, № 4. – P. 273 – 282.
4. Doerk, K. Die maximale lokale Erklärung einer gessägtigten Formation / K. Doerk // Math. Z. – 1973. – Bd. 133, № 2. – S. 33 – 135.
5. Воробьев, Н.Т. Максимальные экраны и характеризация f-проекторов / Н.Т. Воробьев // Докл. АН БССР. – 1978. – Т. 22, № 1. – С. 9 – 11.
6. Шеметков, Л.А. Факторизация непростых конечных групп / Л.А. Шеметков // Алгебра и логика. – 1976. – Т. 15, № 6. – С. 684 – 715.
7. Воробьев, Н.Т. О максимальных и минимальных групповых функциях локальных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та. – 1992. – № 7. – С. 60 – 69.
8. Загурский, В.Н. Максимальные функции Хартли классов Фиттинга / В.Н. Загурский, Н.Т. Воробьев // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 2. – С. 46 – 50.
9. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
10. Hartley, B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193 – 207.
11. Воробьев, Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. матем. жарнал. – 1996. – Т. 37, № 6. – С. 1296 – 1302.
12. Воробьев, Н.Т. О наибольшей приведенной функции Хартли / Н.Т. Воробьев // Изв. Гомельского гос. ун-та. – 1999. – Т. 1(15). – С. 8 – 3.
13. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161 – 168.
14. Загурский, В.Н. О квазилокальных функциях Хартли / В.Н. Загурский // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2005. – № 4. – С. 26 – 27.

Поступила 28.05.2008