УДК 519.6: 517.958

О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности за конечное число элементарных операций

Волосова Наталья Константиновна, аспирант
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
Басараб Михаил Алексеевич, профессор, доктор физ.-мат. Наук
Национальный исследовательский университет
Волосов Константин Александрович, профессор, доктор физ.-мат. наук;
Волосова Александра Константиновна, канд. физ.-мат. наук
Российский Университет Транспорта (МИИТ)
Пастухов Дмитрий Феликсович, канд. физ.-мат. наук;
Пастухов Юрий Феликсович, канд. физ.-мат. наук
Полоцкий государственный университет

Предложен алгоритм решения общей неоднородной краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности и с минимальным 9 точечным шаблоном на равномерной сетке. Получен метод прогонки в матричной форме за конечное число арифметических действий для достаточно гладкой аналитической правой части. Аналитическое решение сравнено с численным решением, подтверждающее шестой алгебраический порядок погрешности формул полученного алгоритма.

Ключевые слова: *метод прогонки в блочной форме, диагональные матрицы, уравнения математической физики, численные методы, уравнение Пуассона.*

About decision of the equation of the Poisson on rectangle with sixth rather inaccuracy for final number elementary operation

Volosova N.K., Basarab M.A., Volosov K. A., Volosova A. K., Pastuhov D. F., Pastuhov YU. F.

The Offered algorithm of the decision of the equation of the Poisson on rectangle with marginal condition Dirihle method прогонки in matrix form for final number arithmetical action for it is enough smooth of the analytical right part. The Analytical decision was compared to the numerical decision, confirming sixth algebraic order to inaccuracy molded the got algorithm.

Введение. Известны разностные уравнения Пуассона с 9 точечным шаблоном с погрешностью четвертого, шестого и восьмого порядка на равномерной сетке [5],[1]. Впервые предложена разностная схема с 6 порядком погрешности для уравнения Пуассона на прямоугольнике в матричной форме. Алгоритм прогонки в матричной форме для уравнения Пуассона на прямоугольнике будет полезен в стеганографии [5],[6],[7],[14],[15],[16] в задачах математической физики с оператором Лапласа [1],[3],[8],[9],[10],[11],[17] в уравнениях гидродинамики[13] $\Delta\psi = -\omega$.

Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольнике с неизвестной функцией $u(x,y)$ с неоднородными граничными условиями

$$\varphi_1(y),\varphi_2(y),\varphi_3(x),\varphi_4(x),x\in[a,b],y\in[c,d]$$

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=f(x,y),\ (x,y)\in D=(a,b)\times(c,d) \\ u(a,y)=\varphi_1(y),u(b,y)=\varphi_2(y),u(x,c)=\varphi_3(x),u(x,d)=\varphi_4(x),x\in[a,b],y\in[c,d] \end{cases} \tag{1}$$

Дифференциальной задаче (1) сопоставим разностную задачу (2), в которой два параметра h_1,h_2 - шаги равномерной сетки по координатным осям x,y соответственно[3]

$$\begin{cases} L_{h_1h_2}u_{h_1h_2}=f_{h_1h_2},\left(x_{h_1},y_{h_2}\right)\in D_{h_1h_2}:x_{h_1}\equiv x_n=a+nh_1,n=\overline{1,n_1-1},y_{h_2}\equiv y_m=c+mh_2,m=\overline{1,n_2-1} \\ l_{h_1h_2}u_{h_1h_2}\big|_{\Gamma_{h_1h_2}}=\varphi_{h_1h_2},\left(x_{h_1},y_{h_2}\right)\in\Gamma_{h_1h_2}:x_{h_1}\equiv x_n=a+nh_1,n=\overline{0,n_1},y_{h_2}\equiv y_m=c+mh_2,m=\overline{0,n_2},h_1=\dfrac{b-a}{n_1},h_2=\dfrac{d-c}{n_2} \end{cases} \tag{2}$$

$u_{h_1h_2}$ - неизвестная сеточная функция, решение задачи (2), h_1,h_2-шаги сетки, n_1,n_2 число интервалов разбиения сторон прямоугольника $[a,b],[c,d]$ соответственно, операторы $L_{h_1h_2},l_{h_1h_2}$ линейные. Для увеличения алгебраического порядка точности[3] для аппроксимации задачей (2) пусть $h_1=h_2=h,n_1=n_2=N.$

В работе[1, стр.73] показано, что на однородной равномерной сетке с 9 точечным симметричным шаблоном можно аппроксимировать уравнение Пуассона с шестым порядком погрешности в виде:

$$\frac{1}{h^2}\left(\frac{-10}{3}u_{m,n}+\frac{2}{3}\left(u_{m-1,n}+u_{m+1,n}+u_{m,n-1}+u_{m,n+1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{m-1,n-1}+u_{m+1,n-1}+u_{m-1,n+1}+u_{m+1,n+1}\right)\right)=f+\frac{h^2}{12}\left(f_{xx}+f_{yy}\right)+$$
$$+h^4\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)}+f_y^{(4)}\right)+\frac{1}{90}f_{xxyy}^{(4)}\right)+O\left(h^6\right),\quad n=\overline{1,n_1-1},m=\overline{1,n_2-1} \tag{3}$$

Умножая уравнение (3) на h^2, получим уравнение (4)

$$\frac{-10}{3}u_{m,n}+\frac{2}{3}\left(u_{m-1,n}+u_{m+1,n}+u_{m,n-1}+u_{m,n+1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{m-1,n-1}+u_{m+1,n-1}+u_{m-1,n+1}+u_{m+1,n+1}\right)=$$
$$=fh^2+\frac{h^4}{12}\left(f_{xx}+f_{yy}\right)+h^6\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)}+f_y^{(4)}\right)+\frac{1}{90}f_{xxyy}^{(4)}\right)+O\left(h^8\right)\equiv F_{m,n},\quad n=\overline{1,n_1-1},m=\overline{1,n_2-1} \tag{4}$$

Уравнение (4) можно переписать в матричном виде. Определим матрицы

$$a_{m,n}=\begin{cases}-\frac{10}{3},m=n;m=\overline{1,N-1},n=\overline{1,N-1}\\ \frac{2}{3},m=n+1\vee m=n-1\\ 0,m\geq n+2\vee m\leq n-2\end{cases},\qquad b_{m,n}=\begin{cases}\frac{2}{3},m=n;m=\overline{1,N-1},n=\overline{1,N-1}\\ \frac{1}{6},m=n+1\vee m=n-1\\ 0,m\geq n+2\vee m\leq n-2\end{cases} \tag{5}$$

Где A, B – симметрические 3-диагональные матрицы Теплица ранга N-1.

Если u_{m-1},u_m,u_{m+1} строки матрицы решения ранга N-1, то (4) и (6) эквивалентны:

$$Bu_{m-1}^T+Au_m^T+Bu_{m+1}^T=F_m^T\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{N-1}b_{s,k}u^T{}_{k,m-1}+\sum_{k=1}^{N-1}a_{s,k}u^T{}_{k,m}+\sum_{k=1}^{N-1}b_{s,k}u^T{}_{k,m+1}=F^T{}_{s,m},\overline{s=2,N-2}\Leftrightarrow$$
$$\sum_{k=1}^{N-1}b_{s,k}u_{m-1,k}+\sum_{k=1}^{N-1}a_{s,k}u_{m,k}+\sum_{k=1}^{N-1}b_{s,k}u_{m+1,k}=F_{m,s}\Leftrightarrow b_{s,s-1}u_{m-1,s-1}+b_{s,s}u_{m-1,s}+b_{s,s+1}u_{m-1,s+1}+$$
$$+a_{s,s-1}u_{m,s-1}+a_{s,s}u_{m,s}+a_{s,s+1}u_{m,s+1}+b_{s,s-1}u_{m+1,s-1}+b_{s,s}u_{m+1,s}+b_{s,s+1}u_{m+1,s+1}=F_{m,s},s=\overline{2,N-2} \tag{6}$$

Учитывая (5) при s=n, из (6) получим

$$\frac{1}{6}u_{m-1,n-1}+\frac{2}{3}u_{m-1,n}+\frac{1}{6}u_{m-1,n+1}+\frac{2}{3}u_{m,n-1}-\frac{10}{3}u_{m,n}+\frac{2}{3}u_{m,n+1}+\frac{1}{6}u_{m+1,n-1}+\frac{2}{3}u_{m+1,n}+\frac{1}{6}u_{m+1,n+1}=F_{m,n},m=\overline{2,N-2},n=\overline{1,N-1}$$

Сгруппируем слагаемые с равными коэффициентами в последнем уравнении

$$-\frac{10}{3}u_{m,n}+\frac{2}{3}\left(u_{m-1,n}+u_{m+1,n}+u_{m,n-1}+u_{m,n+1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{m-1,n-1}+u_{m-1,n+1}+u_{m+1,n-1}+u_{m+1,n+1}\right)=F_{m,n},m=\overline{2,N-2}$$

где $F_{m,n}=fh^2+\frac{h^4}{12}\left(f_{xx}+f_{yy}\right)+h^6\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)}+f_y^{(4)}\right)+\frac{1}{90}f_{xxyy}^{(4)}\right)+O\left(h^8\right)\Big|_{x=x_n,y=y_m}$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению (4). Уравнение $Bu_{n-1}^T+Au_n^T+Bu_{n+1}^T=F_n^T$ при n=1, N-1 имеет смысл, если положить $Au_1^T+Bu_2^T=F_1^T,Bu_{N-2}^T+Au_{N-1}^T=F_{N-1}^T$. В результате запишем систему матричных уравнений, в которой матрицы A, B определены формулой (5).

$$\begin{cases}Au_1^T+Bu_2^T=\overline{F_1^T}\\ Bu_{m-1}^T+Au_m^T+Bu_{m+1}^T=\overline{F_m^T},m=\overline{2,N-2}\\ Bu_{N-2}^T+Au_{N-1}^T=\overline{F_{N-1}^T}\end{cases} \tag{7}$$

Верхняя черта справа означает, что правая часть формулы (7), вообще говоря, не совпадает с правой частью формулы (4) в граничных узлах. В системе уравнений (7) квадратная матрица решений $u_{m,n}$ имеет ранг N-1, расширим её до ранга N+1 граничными условиями из постановки задачи (1)

$$u_{m,0}=\varphi_{1,m},u_{m,N}=\varphi_{2,m},u_{0,n}=\varphi_{3,n},u_{N,n}=\varphi_{4,n},m=\overline{0,N},n=\overline{0,N} \tag{8}$$

С учетом системы уравнений (7), краевых условий (8), формула (4) имеет теперь смысл при всех $m=\overline{1,N-1},n=\overline{1,N-1}$. Рассмотрим первое уравнение системы (7) в угловом узле равномерной сетки с индексами (m=s=1,n=1):

$$a_{1,1}u_{1,1}+a_{1,2}u_{1,2}+b_{1,1}u_{2,1}+b_{1,2}u_{2,2}=F_{1,1}\Leftrightarrow\frac{-10}{3}u_{1,1}+\frac{2}{3}u_{1,2}+\frac{2}{3}u_{2,1}+\frac{1}{6}u_{2,2}=\frac{-10}{3}u_{1,1}+\frac{2}{3}\left(u_{2,1}+u_{1,2}\right)+\frac{1}{6}u_{2,2}=\overline{F_{1,1}} \tag{9}$$

Правая часть (9) содержит черту и отличается от правой части (4)

$$\frac{-10}{3}u_{1,1}+\frac{2}{3}\left(u_{2,1}+u_{1,2}+u_{1,0}+u_{0,1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{2,2}+u_{0,2}+u_{2,0}+u_{0,0}\right)=\overline{F_{1,1}}+\frac{2}{3}\left(u_{1,0}+u_{0,1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{0,2}+u_{2,0}+u_{0,0}\right)\equiv F_{1,1}\Leftrightarrow$$

$\overline{F_{1,1}}\equiv F-\frac{2}{3}\left(u_{1,0}+u_{0,1}\right)-\frac{1}{6}\left(u_{0,2}+u_{2,0}+u_{0,0}\right)$, аналогично, для трех остальных узлов имеем

$$\begin{cases}\frac{-10}{3}u_{1,N-1}+\frac{2}{3}\left(u_{2,N-1}+u_{1,N-2}+u_{1,N}+u_{0,N-1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{2,N-2}+u_{0,N-2}+u_{2,N}+u_{0,N}\right)=F_{1,N-1}\\ \overline{F_{1,N-1}}\equiv F_{1,N-1}-\frac{2}{3}\left(u_{1,N}+u_{0,N-1}\right)-\frac{1}{6}\left(u_{0,N-2}+u_{2,N}+u_{0,N}\right)\\ \frac{-10}{3}u_{N-1,1}+\frac{2}{3}\left(u_{N-2,1}+u_{N-1,2}+u_{N-1,0}+u_{N,1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{N-2,2}+u_{N,2}+u_{N-2,0}+u_{N,0}\right)=F_{N-1,1}\\ \overline{F_{N-1,1}}\equiv F_{N-1,1}-\frac{2}{3}\left(u_{N-1,0}+u_{N,1}\right)-\frac{1}{6}\left(u_{N,2}+u_{N-2,0}+u_{N,0}\right)\\ \frac{-10}{3}u_{N-1,N-1}+\frac{2}{3}\left(u_{N-2,N-1}+u_{N-1,N-2}+u_{N-1,N}+u_{N,N-1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{N-2,N-2}+u_{N,N-2}+u_{N-2,N}+u_{N,N}\right)=F_{N-1,N-1}\\ \overline{F_{N-1,N-1}}\equiv F_{N-1,N-1}-\frac{2}{3}\left(u_{N-1,N}+u_{N,N-1}\right)-\frac{1}{6}\left(u_{N,N-2}+u_{N-2,N}+u_{N,N}\right)\\ \frac{-10}{3}u_{1,1}+\frac{2}{3}\left(u_{2,1}+u_{1,2}+u_{1,0}+u_{0,1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{2,2}+u_{0,2}+u_{2,0}+u_{0,0}\right)=F_{1,1}\\ \overline{F_{1,1}}\equiv F_{1,1}-\frac{2}{3}\left(u_{1,0}+u_{0,1}\right)-\frac{1}{6}\left(u_{0,2}+u_{2,0}+u_{0,0}\right)\end{cases}\tag{10}$$

где $F_{m,n}=fh^2+\frac{h^4}{12}\left(f_{xx}+f_{yy}\right)+h^6\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)}+f_y^{(4)}\right)+\frac{1}{90}f_{xxyy}^{(4)}\right)+O\left(h^8\right)\Big|_{x=x_n,y=y_m}$

Рассмотрим второе уравнение системы (7) для узла с координатами (m= 2,n= s=1), из (6) имеем:

$$b_{s,s-1}u_{m-1,s-1}+b_{s,s}u_{m-1,s}+b_{s,s+1}u_{m-1,s+1}+a_{s,s-1}u_{m,s-1}+a_{s,s}u_{m,s}+a_{s,s+1}u_{m,s+1}+b_{s,s-1}u_{m+1,s-1}+b_{s,s}u_{m+1,s}+b_{s,s+1}u_{m+1,s+1}=F_{m,s}\Leftrightarrow$$

$$b_{1,1}u_{1,1}+b_{1,2}u_{1,2}+a_{1,1}u_{2,1}+a_{1,2}u_{2,2}+b_{1,1}u_{3,1}+b_{1,2}u_{3,2}=\overline{F_{2,1}}\Leftrightarrow\frac{2}{3}u_{1,1}+\frac{1}{6}u_{1,2}-\frac{10}{3}u_{2,1}+\frac{2}{3}u_{2,2}+\frac{2}{3}u_{3,1}+\frac{1}{6}u_{3,2}=\overline{F_{2,1}}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{10}{3}u_{2,1}+\frac{2}{3}\left(u_{1,1}+u_{2,2}+u_{3,1}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{1,2}+u_{3,2}\right)=\overline{F_{2,1}}$$

Добавляя тождественно несколько слагаемых к левой и правой части последнего уравнения до полноты формулы (4), получим

$$-\frac{10}{3}u_{2,1}+\frac{2}{3}\left(u_{1,1}+u_{2,2}+u_{3,1}+u_{2,0}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{1,0}+u_{3,2}+u_{1,2}+u_{3,0}\right)=\overline{F_{2,1}}+\frac{2}{3}u_{2,0}+\frac{1}{6}\left(u_{1,0}+u_{3,0}\right)\equiv F_{2,1}\tag{11}$$

Аналогично формуле (11) для узла (m=2,n=s=1) для всех граничных узлов (m=1,n=1,…,N-1), (m=N-1,n=1,…,N-1), (m=1,…,N-1,n=1), (m=1,…,N-1,n=N-1) имеем

$$\begin{cases}-\frac{10}{3}u_{1,n}+\frac{2}{3}\left(u_{1,n-1}+u_{2,n}+u_{1,n+1}+u_{0,n}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{2,n-1}+u_{2,n+1}+u_{0,n-1}+u_{0,n+1}\right)=F_{1,n},n=\overline{2,N-2}\\ \overline{F_{1,n}}=F_{1,n}-\frac{2}{3}u_{0,n}-\frac{1}{6}\left(u_{0,n-1}+u_{0,n+1}\right),n=\overline{2,N-2}\\ -\frac{10}{3}u_{N-1,n}+\frac{2}{3}\left(u_{N-1,n-1}+u_{N-2,n}+u_{N-1,n+1}+u_{N,n}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{N-2,n-1}+u_{N-2,n+1}+u_{N,n-1}+u_{N,n+1}\right)=F_{N-1,n},n=\overline{2,N-2}\\ \overline{F_{N-1,n}}=F_{N-1,n}-\frac{2}{3}u_{N,n}-\frac{1}{6}\left(u_{N,n-1}+u_{N,n+1}\right),n=\overline{2,N-2}\\ -\frac{10}{3}u_{m,1}+\frac{2}{3}\left(u_{m-1,1}+u_{m,2}+u_{m+1,1}+u_{m,0}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{m-1,2}+u_{m+1,2}+u_{m-1,0}+u_{m+1,0}\right)=F_{m,1},m=\overline{2,N-2}\\ \overline{F_{m,1}}=F_{m,1}-\frac{2}{3}u_{m,0}-\frac{1}{6}\left(u_{m-1,0}+u_{m+1,0}\right),m=\overline{2,N-2}\\ -\frac{10}{3}u_{m,N-1}+\frac{2}{3}\left(u_{m-1,N-1}+u_{m,N-2}+u_{m+1,N-1}+u_{m,N}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{m-1,N-2}+u_{m+1,N-2}+u_{m-1,N}+u_{m+1,N}\right)=F_{m,N-1},m=\overline{2,N-2}\\ \overline{F_{m,N-1}}=F_{m,N-1}-\frac{2}{3}u_{m,N}-\frac{1}{6}\left(u_{m-1,N}+u_{m+1,N}\right),m=\overline{2,N-2}\\ \overline{F_{m,n}}=F_{m,n},\ \forall m,n\in\overline{2,N-2}\end{cases}\tag{12}$$

где $F_{m,n}=fh^2+\frac{h^4}{12}\left(f_{xx}+f_{yy}\right)+h^6\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)}+f_y^{(4)}\right)+\frac{1}{90}f_{xxyy}^{(4)}\right)+O\left(h^8\right)\Big|_{x=x_n,y=y_m}$

Таким образом, запись уравнений системы (7) с матрицами A,B, определенных формулой (5) во внутренних узлах (m=2,...,N-2,n=2,...,N-2), не отличается от формулы (4) – аппроксимации уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности. А во внутренних узлах следует использовать формулы (10) в четырех угловых граничных узлах или формулы (12) в граничных узлах на четырех отрезках.

Будем искать решение рекуррентно заданной системы матричных уравнений (7) в виде (13)

$$\begin{cases} u_m^T = \lambda_m u_{m+1}^T + \nu_m, m = \overline{1, N-2} \\ u_{N-1}^T = \nu_{N-1}, m = N-1 \end{cases} \tag{13}$$

Как следует из теории размерностей[2], в формуле (7) u_m^T, ν_m-векторы ранга N-1, а коэффициенты прогонки $\lambda_m, m = \overline{1, N-2}$ представляют собой квадратную матрицу того же ранга N-1. Где в (13) u_m^T обозначен вектор-столбец – транспонированная строка u_m с индексом m матрицы решения.

Из первого уравнения системы (7) имеем

$$u_1^T = -A^{-1}Bu_2^T + A^{-1}\overline{F_1^T} \Leftrightarrow \lambda_1 = -A^{-1}B, \nu_1 = A^{-1}\overline{F_1^T} \tag{14}$$

Где $\overline{F_1^T}$ обозначен вектор-столбец – транспонированная строка $\overline{F_1}$ с индексом m=1 матрицы правой части F уравнения Пуассона. Как следует из (13) $u_{m-1}^T = \lambda_{m-1}u_m^T + \nu_{m-1}$, преобразуем второе уравнение системы (7)

$$Bu_{m-1}^T + Au_m^T + Bu_{m+1}^T = \overline{F_m^T} \Leftrightarrow B\left(\lambda_{m-1}u_m^T + \nu_{m-1}\right) + Au_m^T + Bu_{m+1}^T = \overline{F_m^T}, \left(B\lambda_{m-1} + A\right)u_m^T = -Bu_{m+1}^T + \overline{F_m^T} - B\nu_{m-1} \Leftrightarrow$$

$$u_m^T = -\left(B\lambda_{m-1} + A\right)^{-1}Bu_{m+1}^T + \left(B\lambda_{m-1} + A\right)^{-1}\left(\overline{F_m^T} - B\nu_{m-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\lambda_m = -\left(B\lambda_{m-1} + A\right)^{-1}B, \nu_m = \left(B\lambda_{m-1} + A\right)^{-1}\left(\overline{F_m^T} - B\nu_{m-1}\right), m = \overline{2, N-2} \tag{15}$$

Используя последнее уравнение системы (7), решение (13), найдем u_{N-1}^T

$$Bu_{N-2}^T + Au_{N-1}^T = \overline{F_{N-1}^T}, u_{N-2}^T = \lambda_{N-2}u_{N-1}^T + \nu_{N-2} \Leftrightarrow B\left(\lambda_{N-2}u_{N-1}^T + \nu_{N-2}\right) + Au_{N-1}^T = \overline{F_{N-1}^T} \Leftrightarrow$$

$$\left(B\lambda_{N-2} + A\right)u_{N-1}^T = \overline{F_{N-1}^T} - B\nu_{N-2} \Leftrightarrow u_{N-1}^T = \left(B\lambda_{N-2} + A\right)^{-1}\left(\overline{F_{N-1}^T} - B\nu_{N-2}\right) \tag{16}$$

В силу второго уравнения (13) получим

$$\nu_{N-1} = u_{N-1}^T \tag{17}$$

Формулы (14),(15) назовем матричными формулами прогонки вперед, а формулы (17),(13) матричными формулами прогонки назад

$$u_m^T = \lambda_m u_{m+1}^T + \nu_m, m = \overline{N-2, 1} \tag{18}$$

Опишем построенный нами алгоритм прогонки для уравнения Пуассона в матричной форме (в добрых традициях мехмата МГУ[3,стр.587-588]).

1. По формуле $F^T{}_{m,n} = fh^2 + \frac{h^4}{12}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) + h^6\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}\right) + \frac{1}{90}f_{xxyy}^{(4)}\right) + O\left(h^8\right)\Big|_{x=x_n, y=y_m}$ вычислить правую часть уравнения Пуассона во всех внутренних узлах равномерной сетки прямоугольника (m=1,...,N-1;n=1,...,N-1). Краевые условия задачи (1) задают граничные условия матрицы решения $u_{m,0} = \varphi_{1,m}, u_{m,N} = \varphi_{2,m}, u_{0,n} = \varphi_{3,n}, u_{N,n} = \varphi_{4,n}, m = \overline{0, N}, n = \overline{0, N}$ (формула (8)).
2. Поправить правые части системы уравнений (7) (модифицировать правые части системы уравнений (7)) по формулам (10), (12) в узлах прямоугольного контура соседнего с граничным контуром, то есть найти $\overline{F_{m,n}}$ по величинам $F_{m,n}$ пункта 1.
3. Найти матричные коэффициенты прогонки вперед по формулам (14),(15) $m = \overline{1, N-2}$.
4. Найти вектор-строку u_{N-1}^T по формуле (16).
5. Найти остальные строки матрицы - решения u_m^T по формулам (18) $m = \overline{N-2, 1}$.

Приведем пример с аналитическим решением на классе элементарных функций[4]

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin(2x)\sin(3y), (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u(0, y) = u(\pi, y) = \sin(y), y \in [0, \pi] \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = \sin(x), x \in [0, \pi] \end{cases} \tag{19}$$

С решением (20)

$$u(x, y) = -\frac{1}{13}\sin(2x)\sin(3y) + \left(\left(\frac{1 - \mathrm{ch}(\pi)}{\mathrm{sh}(\pi)}\right)\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x)\right)\sin(y) + \left(\left(\frac{1 - \mathrm{ch}(\pi)}{\mathrm{sh}(\pi)}\right)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{ch}(y)\right)\sin(x) \tag{20}$$

В программе, написанной на FORTRAN, все массивы и функции имеют двойную точностью, использован пример (19) с решением (20). Обратные матрицы двойной точности в алгоритме (8),(10),(12),(14),(15),(16),(18) находятся библиотекой msImsl [12] с подпрограммой call dLinrg [12].

```
program puasson
integer(8),parameter::n1=201,n2=n1,n=n1-1;integer(8)::i,j,k,kk;
real(8)::a,b,c,d,pi,h,h1,h2,x,y;real(8)::delta(0:n1,0:n1),max,res(0:n1,0:n1);
real(8)::c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8;
real(8)::nu(n,n),lamda(n,n,n),u(0:n1,0:n1),ff(n,n),aa1(n,n),bb(n,n),aa(n,n),cc(n,n),u1(n,n);
real(8)::cch,ssh,a1,a2,b1,b2,f,t1,t2,f1,f2,f3,hh2,hh3,hh4,bb1(n,n);
cch(x)=(dexp(x)+dexp(-x))/2d0;ssh(x)=(dexp(x)-dexp(-x))/2d0;
a1(x,y)=dsin(y);a2(x,y)=dsin(y);b1(x,y)=dsin(x);b2(x,y)=dsin(x);f(x,y)=dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y);
f1(x,y)=-13d0*dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y)/12d0;f2(x,y)=97d0*dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y)/360d0;
f3(x,y)=4d-1*dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y);max=-1000d0;pi=2d0*dasin(1d0);a=0d0;b=pi;c=0d0;d=pi;
h1=(b-a)/dfloat(n1);h2=(d-c)/dfloat(n1);call cpu_time(t1);print*,h1,h2;do i=1,n;do j=1,n;
if(j==i)then;aa(i,j)=-10d0/3d0;bb(i,j)=2d0/3d0;elseif(j==i+1.or. j==i-1)then;aa(i,j)=2d0/3d0;
bb(i,j)=1d0/6d0;else;aa(i,j)=0d0;bb(i,j)=0d0;endif;enddo;enddo;do i=0,n1,1;
x=a+h1*dfloat(i);y=c+h2*dfloat(i);u(0,i)=b1(x,c);u(n1,i)=b2(x,d);u(i,0)=a1(a,y);
u(i,n1)=a2(b,y);enddo;hh2=h1*h1;hh3=hh2*hh2;hh4=hh3*hh2;do i=2,n-1,1;x=a+h1*dfloat(i);y=c+h2*dfloat(i);
ff(1,i)=(f(x,c+h2)*hh2+f1(x,c+h2)*hh3+(f2(x,c+h2)+f3(x,c+h2))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(0,i-1)+u(0,i+1))-(2d0/3d0)*u(0,i);
ff(n,i)=(f(x,d-h2)*hh2+f1(x,d-h2)*hh3+(f2(x,d-h2)+f3(x,d-h2))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(n1,i-1)+u(n1,i+1))-
(2d0/3d0)*u(n1,i);
ff(i,1)=(f(a+h1,y)*hh2+f1(a+h1,y)*hh3+(f2(a+h1,y)+f3(a+h1,y))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(i+1,0)+u(i-1,0))-(2d0/3d0)*u(i,0);
ff(i,n)=(f(b-h1,y)*hh2+f1(b-h1,y)*hh3+(f2(b-h1,y)+f3(b-h1,y))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(i+1,n1)+u(i-1,n1))-(2d0/3d0)*u(i,n1);
enddo;
ff(1,1)=(f(a+h1,c+h1)*hh2+f1(a+h1,c+h1)*hh3+(f2(a+h1,c+h1)+f3(a+h1,c+h1))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(0,0)+u(2,0)+u(0,2))-
(2d0/3d0)*(u(1,0)+u(0,1));
ff(n,1)=(f(a+h1,d-h1)*hh2+f1(a+h1,d-h1)*hh3+(f2(a+h1,d-h1)+f3(a+h1,d-h1))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(n1,0)+u(n1,2)+u(n1-
2,0))-(2d0/3d0)*(u(n1-1,0)+u(n1,1));
ff(1,n)=(f(b-h1,c+h2)*hh2+f1(b-h1,c+h2)*hh3+(f2(b-h1,c+h2)+f3(b-h1,c+h2))*hh4)-
(1d0/6d0)*(u(0,n1)+u(2,n1)+u(0,n1-2))-(2d0/3d0)*(u(0,n1-1)+u(1,n1));
ff(n,n)=(f(b-h1,d-h2)*hh2+f1(b-h1,d-h2)*hh3+(f2(b-h1,d-h2)+f3(b-h1,d-h2))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(n1,n1)+u(n1-
2,n1)+u(n1,n1-2))-(2d0/3d0)*(u(n1,n1-1)+u(n1-1,n1));
do i=2,n1-2;do j=2,n1-2;x=a+h1*dfloat(j);y=c+h2*dfloat(i);ff(i,j)=(f(x,y)*hh2+f1(x,y)*hh3+(f2(x,y)+f3(x,y))*hh4);
enddo;enddo;call obr(n,aa,aa1);lamda(1,1:n,1:n)=-matmul(aa1(1:n,1:n),bb(1:n,1:n));
nu(1,1:n)=matmul(aa1(1:n,1:n),ff(1,1:n));do i=2,n-1;bb1(1:n,1:n)=matmul(bb(1:n,1:n),lamda(i-1,1:n,1:n))+aa(1:n,1:n)
call obr(n,bb1,aa1);lamda(i,1:n,1:n)=-matmul(aa1(1:n,1:n),bb(1:n,1:n));
nu(i,1:n)=matmul(aa1(1:n,1:n),(ff(i,1:n)-matmul(bb(1:n,1:n),nu(i-1,1:n))));enddo;
bb1(1:n,1:n)=matmul(bb(1:n,1:n),lamda(n-1,1:n,1:n))+aa(1:n,1:n);call obr(n,bb1,aa1);
u1(n,1:n)=matmul(aa1(1:n,1:n),(ff(n,1:n)-matmul(bb(1:n,1:n),nu(n-1,1:n))));do i=n-1,1,-1;
u1(i,1:n)=matmul(lamda(i,1:n,1:n),u1(i+1,1:n))+nu(i,1:n);enddo;do i=1,n;do j=1,n;u(i,j)=u1(i,j);enddo;enddo;
max=-1d3;open(2, file='2.txt');do j=0,n1;do i=0,n1;x=a+h1*dfloat(j);y=c+h2*dfloat(i);
c1= dsin(y)*(cch(x)+ssh(x)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi));c2= dsin(x)*(cch(y)+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi));
c3= -dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y)/13d0;res(i,j)=c1+c2+c3;delta(i,j)= u(i,j)- res(i,j);
if( delta(i,j)<=0d0)then;delta(i,j)=-delta(i,j);endif;if( delta(i,j)>max)then;max=delta(i,j);
endif;if(mod(i,20)==0.and.mod(j,20)==0)then;2 write(2,*) x,y,res(i,j),u(i,j);endif;enddo;enddo;
print*,"norma C =",max;call cpu_time(t2);print*,"t2-t1=",t2-t1;
end program puasson;
subroutine obr(n,bb,aa1);use msimsl;
integer(8)::n,Lda,Ldainv;real(8)::ainv(n,n) ,bb(n,n),aa1(n,n);Lda=n;Ldainv=n;
call dLinrg(n,bb,n,ainv,n);aa1(:,:)=ainv(:,:);end subroutine;
```

Замечание 1. Программа вычисляет норму Чебышева разности между точным и численным решениями $\left\|u_{m,n}(numerical)-\left(u(exact)\right)_{m,n}\right\|_C^{n_1,n_2} = \max\limits_{m=0,n_1;n=0,n_2}\left|u_{m,n}(numerical)-\left(u(exact)\right)_{m,n}\right| = 10^{-12}$

с параметрами $n_1 = n_2 = 200$ (число интервалов сетки на стороне квадрата).

Замечание 2. Найдем порядок погрешности алгоритма (8),(10),(12),(14),(15),(16),(18) с матрицами (5). Программа возвращает норму Чебышева $\left\|u_{m,n}(numerical)-\left(u(exact)\right)_{m,n}\right\|_C^{n_1=50,n_2=50} = 1.269\cdot 10^{-9}$, а при удвоенном числе интервалов $\left\|u_{m,n}(numerical)-\left(u(exact)\right)_{m,n}\right\|_C^{n_1=100,n_2=100} = 1.969\cdot 10^{-11}$,то есть $p=6$:

$$\left\|u_{m,n}(numerical)-\left(u(exact)\right)_{m,n}\right\|_C^{n_1=50,n_2=50} / \left\|u_{m,n}(numerical)-\left(u(exact)\right)_{m,n}\right\|_C^{n_1=100,n_2=100} = 1.269\cdot 10^{-9}/1.969\cdot 10^{-11} \approx$$

$\approx 64{,}45 \approx 2^6 \Leftrightarrow p=6$.

Замечание 3. В работе[1] методами простой итерации и скалярной прогонки с числом итераций m=1800 ($n_1 = n_2 = 111$) с примером (19) норма Чебышева равна $\left\|u_{m,n}(numerical)-\left(u(exact)\right)_{m,n}\right\|_C^{n_1=111,n_2=111} = 2.428\cdot 10^{-11}$ за время $\Delta t = 58.2$ с. В то время как в данной работе норма невязки и время равны

$\left\|u_{m,n}(numerical)-\left(u(exact)\right)_{m,n}\right\|_C^{n_1=111,n_2=111}=1.06\cdot 10^{-11}$ $\Delta t=0{,}826$ с соответственно, то есть быстродействие нового алгоритма в 70 раз выше!

Отметим, как частный случай, из предложенного нами алгоритма можно получить "метод прогонки в блочной форме", описанный в общих чертах авторами Бахваловым Н.С., Жидковым Н.П., Кобельковым Г.М. [3,стр. 584-585]. Там уравнение Пуассона решается на прямоугольнике с равномерной сеткой (пятиточечный шаблон "крест") со 2-м порядком погрешности $p=2$

$$u_{m-1,n}+u_{m+1,n}+u_{m,n-1}+u_{m,n+1}-4u_{m,n}=F_{m,n}\equiv f_{m,n}h^2 \tag{22}$$

Где матрицы A,B имеют вид согласно[3,стр. 584-585]

$$a_{m,n}=\begin{cases}-4, m=n; m=\overline{1,N-1}, n=\overline{1,N-1}\\ 1, m=n+1\vee m=n-1\\ 0,|m-n|\geq 2\end{cases},\qquad b_{m,n}=\begin{cases}1, m=n; m=\overline{1,N-1}, n=\overline{1,N-1}\\ 0, m\neq n\end{cases} \tag{23}$$

Программа с алгоритмом (7)-(18), уравнением (22), матрицами (23), условиями примера (19) даёт норму Чебышева невязки $\left\|u_{m,n}(numerical)-\left(u(exact)\right)_{m,n}\right\|_C^{n_1=111,n_2=111}=1.027\cdot 10^{-4}$ за время $\Delta t=0{,}312$ с. То есть норма невязки с алгоритмом (7)-(18), уравнением (4), матрицами (5) с равными параметрами меньше в 10^7 раз, чем в алгоритме (7)-(18) в [3,стр. 584-585]!

Определение 1. Говорят, что матрица A монотонна, если обратная к ней матрица имеет неположительные (неотрицательные) элементы.

Определение 2. Бесконечной нормой $\|A\|_\infty$ квадратной матрицы $\left\|a_{i,j}\right\|\in R^{(N-1)\times(N-1)}$ называется число $\|A\|_\infty=\max\limits_{i=\overline{1,N-1}}\sum\limits_{j=1}^{N-1}\left|a_{i,j}\right|$.

С учетом определений 1,2 справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Невырожденная матрица со строгим диагональным преобладанием элементов является монотонной, если диагональные элементы отрицательны (положительны), а недиагональные элементы положительны (отрицательны). Например, A-монотонна, B-немонотонна, хотя и A ,и B имеют строгое диагональное преобладание элементов[14].

Теорема 2. Невырожденная матрица со строгим диагональным преобладанием и с диагональными отрицательными (положительными) элементами, а недиагональными положительными (отрицательными) элементами имеет верхнюю оценку бесконечной нормы для обратной матрицы (последняя оценка использует матрицу (5))[14].

$$r_m(A)=\left|a_{m,m}\right|-\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N-1}\left|a_{m,n}\right|, \underset{*}{R}\equiv\min_{m=\overline{1,N-1}}\left(\left|a_{m,m}\right|-\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N-1}\left|a_{m,n}\right|\right)=\min_{m=\overline{1,N-1}}r_m(A)>0, \left\|A^{-1}\right\|_\infty\leq\frac{1}{\underset{*}{R}}=\frac{1}{(10/3-2\cdot 2/3)}=\frac{1}{2}$$

Теорема 3 (достаточные условия устойчивости алгоритма (8)-(18)). Пусть выполнены условия:

1)Трехдиагональные матрицы Теплица A,B симметрические ранга N-1 $a_{n,n+1}=a_{n-1,n}, b_{n,n+1}=b_{n-1,n}, \forall n=\overline{2,N-2}$

2)Матрица A монотонная с отрицательными диагональными элементами и положительными недиагональными элементами, B положительная матрица $a_{n-1,n}\cdot a_{n,n}<0, b_{n,m}>0, \forall n=\overline{2,N-2}, \forall|n-m|\leq 1$.

3) $\underset{*}{R}\equiv\min\limits_{m=\overline{1,N-1}}\left(\left|a_{m,m}\right|-\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N-1}\left|a_{m,n}\right|\right)=\min\limits_{m=\overline{1,N-1}}r_m(A)=\left|a_{m,m}\right|-2\left|a_{m,m-1}\right|\geq 2\|B\|_\infty, \left|a_{m,m}\right|\geq\frac{10}{3}\|B\|_\infty, \left|a_{m,m-1}\right|\leq\frac{2}{3}\|B\|_\infty$

4) $\exists\max\limits_{m=\overline{1,N-1}}\left\|\overline{F_m^T}\right\|_\infty\equiv\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty=\max\limits_{m=\overline{1,N-1}}\sum\limits_{n=1}^{N-1}\left|f_{m,n}\right|<+\infty$

Тогда:

1) $\|\lambda_m\|_\infty\leq 1, \forall m=\overline{1,N-1}$

2)формулы прогонки (14),(15),(16) корректны, то есть

$$\|\nu_n\|_\infty\leq n\frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty}<\infty, n=\overline{1,N-1}, \left\|u_{N-2}^T\right\|_\infty\leq(2N-3)\frac{\left\|\overline{F^T}\right\|_\infty}{\|B\|_\infty}<+\infty$$

Замечание 4. Матрицы A,B, определенные формулой (4), удовлетворяют условиям 2), 3) **Теоремы 3**:

$$|a_{m,m}| \ge \frac{10}{3}\|B\|_\infty \Leftrightarrow \left(\frac{10}{3} \ge \frac{10}{3}\right); |a_{m,m-1}| \le \frac{2\|B\|_\infty}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le \frac{2}{3}, \|B\|_\infty = \frac{2}{3} + 2\frac{1}{6} = 1, |a_{m,m}| - 2|a_{m,m-1}| \ge 2\|B\|_\infty \Leftrightarrow \left|\frac{-10}{3}\right| - 2\cdot 1 = 2 \ge 2$$

Доказательство проведем по индукции. Матрица A^{-1} обратная к симметрической матрице A также симметрическая. Заметим, что матрицы A+B и A-B имеют диагональное преобладание и для них выполнены условия **Теорем 1** и **2**, тогда к A+B и A-B применима верхняя оценка бесконечной нормы обратных к ним матриц (**Теорема 2**). Поскольку

$$\|\lambda_1\|_\infty = \|-A^{-1}B\|_\infty \le \|A^{-1}\|_\infty \|B\|_\infty$$

1)Для **базы индукции** при k=1, используя **Теорему 2,** имеем

$$\|\lambda_1\|_\infty = \|-A^{-1}B\|_\infty \le \|A^{-1}\|_\infty \|B\|_\infty \overset{T1}{\le} \frac{1}{\underset{*}{R}}\|B\|_\infty = \frac{\|B\|_\infty}{|a_{m,m}| - 2|a_{m,m-1}|} \overset{3)}{\le} \frac{\|B\|_\infty}{2\|B\|_\infty} = \frac{1}{2} \le 1$$

$$\|\nu_1\|_\infty = \|A^{-1}\overline{F_1^T}\|_\infty \le \|A^{-1}\|_\infty \|\overline{F_1^T}\|_\infty \le \frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{2\|B\|_\infty} \le \frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{\|B\|_\infty}$$

База индукции проверена.

Индуктивный переход. Пусть верно $\|\lambda_k\| \le 1, \forall k = \overline{1,n-1}$. Тогда имеем

$$\underset{*}{R}(A-B) \ge \underset{*}{R}(B\lambda_{n-1}+A) \ge \underset{*}{R}(B+A) \Leftrightarrow |a_{n,n}-b_{n,n}| - 2|a_{n,n-1}-b_{n,n-1}| \ge \underset{*}{R}(B\lambda_{n-1}+A) \ge |a_{n,n}+b_{n,n}| - 2|a_{n,n-1}+b_{n,n-1}| \Leftrightarrow$$

$$|a_{n,n}| + |b_{n,n}| - 2(|a_{n,n-1}| - |b_{n,n-1}|) \ge \underset{*}{R}(B\lambda_{n-1}+A) \ge |a_{n,n}| - |b_{n,n}| - 2(|a_{n,n-1}| + |b_{n,n-1}|)$$

$$\|\lambda_n\|_\infty = \|-(B\lambda_{n-1}+A)^{-1}B\|_\infty \le \frac{\|B\|_\infty}{\underset{*}{R}(B\lambda_{n-1}+A)} \le \frac{\|B\|_\infty}{|a_{n,n}|-|b_{n,n}|-2(|a_{n,n-1}|+|b_{n,n-1}|)} = \frac{\|B\|_\infty}{|a_{n,n}|-2|a_{n,n-1}|-\|B\|_\infty} \le \frac{\|B\|_\infty}{2\|B\|_\infty - \|B\|_\infty} = 1$$

Первая часть **теоремы 1** доказана $\forall k = \overline{1,n} \subset \overline{1,N-2}$.

2)Обозначим $\exists \max_{m=\overline{1,N-1}} \|\overline{F_m^T}\|_\infty \equiv \|\overline{F^T}\|_\infty = \max_{m=\overline{1,N-1}} \sum_{n=1}^{N-1} |f_{m,n}| < +\infty$. Так как $\|\lambda_n\|_\infty \le 1, \forall n = \overline{1,N-2}$,

База индукции: $\|\nu_1\|_\infty = \|A^{-1}\overline{F_1^T}\|_\infty \le \|A^{-1}\|_\infty \|\overline{F_1^T}\|_\infty \le \frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{2\|B\|_\infty} \le \frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{\|B\|_\infty}$ проверена.

Индуктивный переход. Пусть $\|\nu_k\|_\infty < \infty, \forall k = \overline{1,n-1}$,тогда

$$\|\nu_n\|_\infty = \|(B\lambda_{n-1}+A)^{-1}(\overline{F_n^T} - B\nu_{n-1})\|_\infty \le \|(B\lambda_{n-1}+A)^{-1}\|_\infty \|(\overline{F_n^T}-B\nu_{n-1})\|_\infty \le \frac{\|(\overline{F_n^T}-B\nu_{n-1})\|_\infty}{\underset{*}{R}(B\lambda_{n-1}+A)} \le \frac{\|\overline{F_n^T}\|_\infty + \|B\|_\infty\|\nu_{n-1}\|_\infty}{\|B\|_\infty} \le$$

$$\frac{\|\overline{F_n^T}\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|\nu_{n-1}\|_\infty \le \frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|\nu_{n-1}\|_\infty \le 2\frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|\nu_{n-2}\|_\infty \le \ldots \le (n-1)\frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|\nu_1\|_\infty \le n\frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{\|B\|_\infty} < +\infty \qquad (24)$$

$$\|u_{N-1}^T\|_\infty = \|\nu_{N-1}\|_\infty = \|(B\lambda_{N-2}+A)^{-1}(\overline{F_{N-1}^T} - B\nu_{N-2})\|_\infty \le \|(B\lambda_{N-2}+A)^{-1}\|_\infty \|\overline{F_{N-1}^T} - B\nu_{N-2}\|_\infty \le \frac{\|\overline{F_{N-1}^T}\|_\infty + \|B\|_\infty \|\nu_{N-2}\|_\infty}{\|B\|_\infty} \le$$

$$\frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|\nu_{N-2}\|_\infty \le (N-1)\frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{\|B\|_\infty} < +\infty. \qquad (25)$$

С учетом формул(24),(25) имеем

$$\|u_{N-2}^T\|_\infty = \|\lambda_{N-2}u_{N-1}^T + \nu_{N-2}\|_\infty \le \|\lambda_{N-2}\|_\infty \|u_{N-1}^T\|_\infty + \|\nu_{N-2}\|_\infty \le \|u_{N-1}^T\|_\infty + \|\nu_{N-2}\|_\infty = (N-1)\frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{\|B\|_\infty} + (N-2)\frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{\|B\|_\infty} = (2N-3)\frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{\|B\|_\infty} < +\infty \quad (26)$$

Теорема 3 доказана.

Литература:

1. Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
2. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерностей.- М.:Наука,1973,577 С.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы/Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 7-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний,2011.- 636 с.: ил. – (Классический университетский учебник).
4. Пикулин В.П. Практический курс по уравнениям математической физики: учеб. пособие / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М.: Наука, 1995. – 224 с.
5. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности // Евразийское Научное Объединение. – 2019. № 6-1 (52). С. 4-11.
6. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии//Мир транспорта. -2019. -Т.17. № 3(82). -С. 16-39.
7. Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR-кода в стеганографии/ С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов //Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.
8. Пастухов Д.Ф. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 60–74.
9. Пастухов Д.Ф. К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи Дирихле для волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 167–186.
10. Пастухов Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона в параллелепипеде с шестым порядком погрешности/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–174.
11. Волосова Н.К. и др. Векторный аналог метода прогонки для решения трех - и пятидиагональных матричных уравнений/ Н.К. Волосова и др. // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 101–115.
12. Бартеньев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL: Ч.1. – М.:ДИАЛОГ – МИФИ, 2001. – 437 с.
13. A. Salih Streamfunction - Vorticity Formulation//Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach 2013-.
14. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 2-1 (52). С. 11-17.
15. Волосова Н.К. и др. Эффективная итерационная формула для краевой задачи уравнения Пуассона со сложно распределенными источниками// Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: сб. материалов науч. конф., Герценовские чтения – 2019, СПб.,08-12 апр. 2019 г./ Рос. гос. пед. ун-т им. А.И. Герцена. – СПб, 2019. – С. 201-208.
16. Козлов А.А. Преобразование подобия на множестве полукватернионов / А.А. Козлов, К.С. Суравнева, И.Л.Жалейко // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 115–123.