УДК 528.063

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНОВЫХ И СПУТНИКОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

канд. техн. наук В.В. ЯЛТЫХОВ
(Полоцкий государственный университет);
канд. техн. наук П.М. ЛЕВДАНСКИЙ
(ООО Легром, Минск)

Анализируются результаты математической обработки по трем направлениям: многокритериальная оптимизация (МК) под условием минимума ошибки определения площади; многокритериальная оптимизация результатов геодезических измерений, приводящая к меньшей погрешности положения пунктов с одновременным возрастанием вероятности попадания в круг ошибок; статистическое обоснование метода многостепенной многокритериальной оптимизации. В первом направлении исследуется весовая функция при оценке точности площадей многоугольников по шести тестовым примерам; во втором – применяется новая дополнительная критериальная функция, использующая уровень значимости, вычисляемый с помощью вероятностного попадания в круг ошибок. Так же как и в первом случае, выполняется сравнение с методом наименьших квадратов (МНК). Однако здесь анализируются ошибки планового положения. Статистическое обоснование метода МК на примере обработки спутниковых наблюдений является примером третьего направления.

Введение. В методе МК используются две целевые функции (1.1) и дополнительная целевая функция вида (1.2), (2.2) – (2.5) и (3.1). Несмотря на то, что первоначально была применена дополнительная функция вида $\min(\max M)$, исследуются вопросы применения и других дополнительных целевых функций. При этом для разных задач дополнительные целевые функции в общем случае будут не одинаковые и будут приводить к результатам, с различной эффективностью применения.

В третьем разделе статьи впервые получена формула (3.8), показывающая, в каких случаях метод МК эффективен по сравнению с МНК.

1. Многокритериальная оптимизация под условием минимума ошибки определения площади

Рассмотрим случай многокритериальной оптимизации, когда при минимизации используются две целевые функции

$$\Phi_1(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_i \left| L_i(\mathrm{X}) \right|^{n_i}; \tag{1.1}$$

$$\Phi_2(\mathrm{X}) = \min(\mathrm{m}_s), \tag{1.2}$$

где m_s – средняя квадратическая ошибка определения только одной площади на весь объект. В результате минимизации функции $\Phi_1(X)$ отыскиваются показатели степени n_i в соответствии с минимумом функции $\Phi_2(X)$.

В таблице 1.1 приведены результаты μ, M_1 – M_4 и m_s для случая МНК, когда все n_i = 2,0. При этом взяты шесть тестовых примеров из [1, с. 93, 129, 153 (триангуляция); 179, 202 (трилатерация); 217 (линейно-угловая сеть)].

Во всех примерах площадь S бралась на границах между определяемыми пунктами: S_1 = 30652379 м^2; S_2 = 37593995 м^2; S_3 = 29333660 м^2; S_4 = 28370384 м^2; S_5 = 35074634 м^2; S_6 = 2677709 м^2.

Величины M_i, представленные в таблицах 1.1 – 1.4 вычислялись по методике, опубликованной в [2].

Таблица 1.1

Уравнивание по МНК

Обозначения	Номер страницы из [5] для геодезических сетей					
	93	129	153	179	202	217
	1	2	3	4	5	6
μ	0,608	1,139	0,831	1,053	1,098	0,452
M_1	0,0523	0,0475	0,0424	0,0595	0,0373	0,0077
M_2	0,0536	0,0292	0,0439	0,0766	0,0406	0,0141
M_3	0,0245	0,0387	0,0206	0,0392	–	0,0125
M_4	–	–	–	0,0589	–	–
m_s	232	173	177	117	131	11,5

В таблице 1.2 приведены результаты многокритериальной оптимизации, заключающейся в поиске n_i методом релаксации под условием (1.2). В процессе оптимизации изменились не только μ, $M_1 - M_4$ и m_s , но и координаты, по которым вычислялись площади: S_1 = 30652459 м²; S_2 = 37593944 м²; S_3 = 29333694 м²; S_4 = 28370386 м²; S_5 = 35074635 м²; S_6 = 2677707 м².

Таблица 1.2

Многокритериальная оптимизация

Обозначения	1	2	3	4	5	6
μ	0,509	1,074	0,659	0,884	0,565	0,324
M_1	0,0547	0,0505	0,0339	0,0779	0,0598	0,0061
M_2	0,0553	0,0355	0,0429	0,0930	0,0293	0,0134
M_3	0,0258	0,0444	0,0217	0,0537	–	0,0168
M_4	–	–	–	0,0769	–	–
m_s	176	145	109	111	78	7,3
$\frac{(m_s)_{n=2}}{m_s}$	1,3	1,2	1,6	1,05	1,7	1,6

По данным таблицы 1.2 видно, что в большинстве случаев минимизация m_s приводит к возрастанию ошибок M. В программе, по которой получены данные таблицы 1.2, предусмотрена обработка с использованием допуска $M_{\max} \le M_{доп}$. Здесь применена оптимизация с ограничениями, когда $M_{\max} > M_{доп}$ к значению $\Phi_2(X)$ прибавляется произвольно большое число.

В таблицах 1.1 и 1.2 для примеров 1, 2, 3 и 6 применялось уравнивание по углам, а в таблицах 1.3 и 1.4 по направлениям, по которым брался в обработку угол, замыкающий горизонт.

Таблица 1.3

Уравнивание по МНК по направлениям

Обозначения	1	2	3	6
μ	0,518	0,967	0,856	0,458
M_1	0,0289	0,0285	0,0318	0,0064
M_2	0,0291	0,0226	0,0294	0,0106
M_3	0,0151	0,0265	0,0189	0,0092
S	30652369	37594000	29333549	2677704
m_s	132	117	122	10,9

Таблица 1.4

Многокритериальная оптимизация функций (1.1) и (1.2) при уравнивании по направлениям

Обозначения	1	2	3	6
μ	0,434	0,921	0,714	0,260
M_1	0,0142	0,0240	0,0224	0,0044
M_2	0,0087	0,0284	0,0249	0,0080
M_3	0,010	0,0325	0,0196	0,0090
S	30652375	37593987	29333610	2677705
m_s	64,6	112	89,0	7,3

2. Многокритериальная оптимизация результатов геодезических измерений, приводящая к меньшей погрешности положения пунктов с одновременным возрастанием вероятности попадания в круг ошибок

Рассмотрим случай многокритериальной оптимизации, когда при минимизации используются две целевые функции:

$$\Phi_1(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_i \left| L_i(\mathrm{X}) \right|^{n_i}; \tag{2.1}$$

$$\Phi_2(\mathrm{X}) = \min \sum_{j=1}^{k} q_j M_j , \tag{2.2}$$

где N – количество результатов измерений; $P_i = \left(\frac{C_i}{\sigma_i} \right)^{n_i}$ – вес результата измерений; $L_i = T_i^{выч} - T_i^{изм}$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения; n_i – индивидуальный для каждого измерения показатель степени, который отыскивается соответствующим релаксационным способом под условием целевой функции (2.2); k – количество определяемых пунктов; $q = 1 - p$ – уровень значимости, вычисляемый по значению p – вероятности попадания в круг ошибок, определяемый в процессе минимизации численным способом из 1000 испытаний; M – значение ошибки планового положения пункта.

В таблице 2.1 приведены результаты оценки точности $\mu = \sqrt{V^{\mathrm{T}}\mathrm{P}V / r}$; M и вероятность попадания в круг ошибок радиуса M.

Таблица 2.1

Результаты минимизации по МНК и многокритериальная оптимизация (в скобках)

Обозначения	Номер страницы из [3] для геодезических сетей					
	93	129	153	179	202	217
1	2	3	4	5	6	7
μ	0,608 (0,485)	1,139 (1,140)	0,831 (0,822)	1,053 (0,984)	1,098 (0,941)	0,452 (0,426)
M_1	0,0523 (0,0414)	0,0475 (0,0471)	0,0424 (0,0421)	0,0595 (0,0480)	0,0373 (0,0419)	0,0077 (0,0071)
M_2	0,0536 (0,0374)	0,0292 (0,0289)	0,0439 (0,0437)	0,0766 (0,0626)	0,0406 (0,0340)	0,0141 (0,0125)
M_3	0,0245 (0,0115)	0,0387 (0,0388)	0,0206 (0,0208)	0,0392 (0,0261)	– (–)	0,0125 (0,0122)
M_4	– (–)	– (–)	– (–)	0,0589 (0,0477)	– (–)	– (–)
P_1	0,634 (0,645)	0,635 (0,635)	0,638 (0,644)	0,659 (0,677)	0,640 (0,651)	0,644 (0,643)
P_2	0,635 (0,646)	0,632 (0,630)	0,649 (0,650)	0,673 (0,655)	0,622 (0,624)	0,645 (0,654)
P_3	0,667 (0,675)	0,631 (0,632)	0,637 (0,635)	0,630 (0,623)	– (–)	0,641 (0,645)
P_4	– (–)	– (–)	– (–)	0,658 (0,673)	– (–)	– (–)

Кроме (2.2) мы апробировали следующие целевые функции:

$$\mathit{\Phi}_2(X) = \min(\min q \cdot \max M); \tag{2.3}$$

$$\mathit{\Phi}_2(X) = \min \sum_{j=1}^{k} \frac{M_j}{P_j}; \tag{2.4}$$

$$\mathit{\Phi}_2(X) = \min\left(\max \frac{M_j}{P_j} \right), \tag{2.5}$$

но только (2.2) дала наилучшие результаты для тестовых примеров.

3. Статистическое обоснование метода многостепенной многокритериальной оптимизации

Многостепенная оптимизация может иметь практическое применение, например, при уравнивании полигонометрии с двумя, а не с N группами степеней отдельно для целевых и линейных измерений.

Метод многостепенной, многокритериальной оптимизации предложен в [2] для поиска n_i под условием минимума второго критерия, например:

$$\Phi_2(\mathrm{X}) = \sum_{j=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{M}_j^2, \tag{3.1}$$

где K – количество определяемых пунктов с ошибкой положения [2];

$$\mathrm{M} = \mu' \sqrt{Q_{t,t} + Q_{t+1,t+1}}. \tag{3.2}$$

Здесь

$$\mu' = \sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}} \mathrm{P}_n V}{r}}, \tag{3.3}$$

где r – количество избыточных измерений;

$$V = \varphi(\hat{\mathrm{X}}) - \mathrm{T}; \tag{3.4}$$

$$Q = F \mathrm{P}_n^{-1} F^{\mathrm{T}}; \tag{3.5}$$

$$F = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}} C \mathrm{A})^{-1} \mathrm{A}^{\mathrm{T}} C. \tag{3.6}$$

Здесь A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; C – диагональная матрица весов с элементами [2]:

$$C_i = n_i (n_i - 1) \mathrm{P}_{n_i} \left| L_i(\mathrm{X}) \right|^{n_i}. \tag{3.7}$$

Минимизация функций (1.1) и (3.1) осуществляется методом проб и ошибок с поиском оптимальных степеней $n_j = 2{,}0 \pm 0{,}1$, принятых для всех измерений, числом итераций, не превосходящих 20.

Применение изложенного алгоритма эффективно при определенных условиях:

$$\mathrm{K}_1 \le \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N} - r} \le \mathrm{K}_2, \tag{3.8}$$

где N – количество результатов измерений.

Цель исследования – установить статистическим путем K_1 и K_2, в пределах которых целесообразно применение нового метода. Воспользуемся моделью космической линейной засечки, в которой первоначально используются 36 станций слежения, расположенные вблизи экватора. Шаг сетки по широте и долготе принят (6 × 6 по меридиану и параллели) 20 минут при H = 0 м. Геодезические координаты спутника B = L = 70′, при H = 200000 м. Рассматривалось 16 вариантов сети наблюдений с очередным исключением одного северного и южного пунктов слежения так, чтобы схема расположения пунктов оставалась симметричной. В каждом варианте обрабатывались результаты измерений с разными ошибками наблюдений, сгенерированными по нормальному закону из 30 испытаний. Таким образом, общее количество испытаний составило 480. Обработка вариантов выполнялась по МНК, поскольку всюду при поиске выполнялся минимум критерия (3.1). Остальные результаты исследований приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Результаты характеристик нового метода по сравнению с МНК

№ п/п	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-r}$	A, %	B, %	C, %	№ п/п	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-r}$	A, %	B, %	C, %
1	12,0	80	5,6	3,7	9	6,7	97	12	4,3
2	11,3	83	4,8	3,5	10	6,0	97	21	5,4
3	10,7	80	7,4	3,6	11	5,3	93	15	5,4
4	10,0	97	7,7	3,8	12	4,7	96	13	5,6
5	9,3	87	6,9	3,8	13	4,0	87	14	5,0
6	8,7	97	5,9	3,5	14	3,3	90	21	6,4
7	8,0	90	7,8	3,6	15	2,7	100	35	12
8	7,3	90	9,2	3,8	16	2,0	97	32	14

В колонке А таблицы 3.1 дано процентное соотношение уменьшение μ' в новом методе из 30 испытаний. Отсюда видно, что $M < M_{МНК}$ в 10 % случаев при $\mu' > \mu$.

В колонке В таблицы 3.1 указан наибольший из 30 испытаний процент уменьшения μ, вычисляемый по формуле:

$$m\ \% = \frac{M_{МНК} - M}{M_{МНК}} \cdot 100\ \%\,. \tag{3.9}$$

В колонке С таблицы 3.1 дано $m_{ср.}$% из 30 испытаний. По данным таблицы 3.1 видно, что эффективность нового метода очевидна при $K_1 = 2$ и $K_2 = 7$. При малом количестве измерений $N < 6$ ($r < 3$) новый метод при $M < M_{МНК}$ может привести к случайному результату. При большом количестве результатов измерений m мало и не превысит в среднем 5 %.

К недостатку нового метода по сравнению с МНК следует отнести то, что μ' имеет произвольную при разных n_i разность и не является средней квадратической ошибкой измерения, вес которого равен единице. Но если выполнить оценку точности функций по формулам (3.2) – (3.6) или определить из выражения:

$$m_F = \frac{\mu'}{\sqrt{P_F}} \tag{3.10}$$

для результатов измерений m_S, вес которых P_n, размерность m_K восстанавливается и

$$\gamma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} m_S^2}{N}} \approx \mu_{МНК}\,, \tag{3.11}$$

что доказывает правильность формулы (3.7).

Заключение. Результаты исследований позволяют сделать следующие выводы:

1) метод МК дает в 1,7 раза лучшую оценку точности площадей по сравнению с МНК в случае уравнивания геодезических сетей по углам. При уравнивании по направлениям в ряде случаев эффективность составляет 2,1 раза;

2) при применении вспомогательной целевой функции (2.2) ошибка в плановом положении пункта в наиболее слабом месте сети становится лучше в 1,3 раза. При этом вероятность попадания в круг ошибок увеличивается в 1,1 раза;

3) при использовании МК для обработки спутниковых измерений эффективность составляет в большинстве случаев 5 %, а при малом количестве избыточных измерений – до 13 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Применение многокритериальной оптимизации при проектировании и уравнивании геодезических сетей / В.И. Мицкевич [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2004. – № 4. – С. 77 – 79.
2. Левданский, П.М. О малости отклонений координат пунктов в методе многокритериальной оптимизации от их истинных значений / П.М. Левданский, С.Г. Шнитко // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия В. Прикладные науки. – 2006. – № 9. – С. 86 – 88.
3. О назначении весов измерений при уравнивании геодезических сетей методом Lp-оценок / О.Е. Гармаза [и др.]; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – 3 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.2002, № 766. – гд. 02 деп.
4. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 1999. – 9 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 28.06.1999, № 681. – гд. 99 деп.
5. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы): учеб. пособие для вузов / Н.В. Яковлев [и др.]. – М.: Недра, 1982. – 368 с.

Поступила 06.11.2008