ГЕОИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 528.063

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОБРАБОТКЕ ВНЕЦЕНТРЕННЫХ СПУТНИКОВЫХ GPS-ИЗМЕРЕНИЙ

О.О. УСОВА, канд. техн. наук В.А. БОНДАРЕНКО, А.А. БОРУН
(Полоцкий государственный университет)

В настоящее время на производстве большое распространение получили спутниковые методы определения координат с помощью GPS-приемников. Для геодезического применения спутниковых систем используется относительный метод. В некоторых ситуациях по нахождению приращений координат в относительном методе спутниковой геодезии встречаются случаи, когда технически невозможно установить GPS-приемник над центром пункта. Например, при выполнении работ на пунктах государственной геодезической сети, где установлены сигналы или пирамиды. Получение качественных измерений при помощи GPS-приёмников становится проблематичным. Это вызвано шумами, которые создают конструкции над центром пункта. Решением проблемы может быть увеличение времени измерения на станции и набор большого количества эпох для получения достоверных данных либо использование внецентренных измерений. Рассматриваются методы обработки внецентренных GPS-измерений, способ вычисления истинного азимута по пространственным координатам точек и оценка точности положения пункта, к которому приводятся измерения.

Введение. Если над центром пункта невозможно установить спутниковый приемник (например, для стенной марки), то измерения выполняют в стороне от центра пункта. Такие наблюдения дают внецентренные спутниковые измерения. Поправки δX, δY, δZ за центрировку вводят либо в координаты точки стояния приемника, либо δΔX, δΔY, δΔZ – в измеренные величины. Значения этих поправок одинаковы, хотя обозначаются они по-разному. Статья посвящена не только вычислению указанных выше поправок, но и их оценке точности по точностным характеристикам элементов центрировки m_A, m_l, m_h, где $A_{J,C}$ – азимут линейного элемента центрировки; $l_{J,C}$ – линейный элемент между точками J и C (J – точка стояния GPS приемника; C – центр пункта, к которому приводятся результаты центрировки); $h_{J,C}$ – превышение между J и C.

1. Дифференциальный (линейный) и прямой (нелинейный) поиск величин δX, δY, δZ

Рассмотрим задачу по переходу от X_J, Y_J, Z_J к X_C, Y_C, Z_C, зная элементы центрировки A, l, h. По пространственным координатам точки J вычисляют геодезические координаты B_J, L_J, H_J и находят δΔX, δΔY, δΔZ дифференциальным методом по формулам (обе антенны установлены по некоторой линии внецентренно):

$$\delta\Delta X = \delta X_2 - \delta X_1;$$

$$\delta\Delta Y = \delta Y_2 - \delta Y_1;$$

$$\delta X_1 = \frac{\delta X_1}{\delta B_1}\delta B_1 + \frac{\delta X_1}{\delta L_1}\delta L_1 + \frac{\delta X_1}{\delta H_1}\delta H_1;$$

$$\delta X_2 = \frac{\delta X_2}{\delta B_2}\delta B_2 + \frac{\delta X_2}{\delta L_2}\delta L_2 + \frac{\delta X_2}{\delta H_2}\delta H_2;$$

$$\delta Y_1 = \frac{\delta Y_1}{\delta B_1}\delta B_1 + \frac{\delta Y_1}{\delta L_1}\delta L_1 + \frac{\delta Y_1}{\delta H_1}\delta H_1; \qquad (1)$$

$$\delta Y_2 = \frac{\delta Y_2}{\delta B_2}\delta B_2 + \frac{\delta Y_2}{\delta L_2}\delta L_2 + \frac{\delta Y_2}{\delta H_2}\delta H_2;$$

$$\delta Z_1 = \frac{\delta Z_1}{\delta B_1}\delta B_1 + \frac{\delta Z_1}{\delta H_1}\delta H_1;$$

$$\delta Z_2 = \frac{\delta Z_2}{\delta B_2}\delta B_2 + \frac{\delta Z_2}{\delta H_2}\delta H_2,$$

где δB_1, δL_1, δH_1 – элементы центрировки одного приемника (на одном пункте); δB_2, δL_2, δH_2 – элементы центрировки другого приемника (на другом пункте).

Частные производные в формулах (1) для каждого из двух пунктов предлагается вычислять, используя следующие выражения [1]:

$$\frac{\delta X}{\delta B} = -(M+H)\sin B\cos L; \tag{2}$$

$$\frac{\delta X}{\delta L} = -(N+H)\cos B\sin L; \tag{3}$$

$$\frac{\delta X}{\delta H} = \cos B\cos L; \tag{4}$$

$$\frac{\delta Y}{\delta B} = -(M+H)\sin B\sin L; \tag{5}$$

$$\frac{\delta Y}{\delta L} = (N+H)\cos B\cos L; \tag{6}$$

$$\frac{\delta Y}{\delta H} = \cos B\sin L; \tag{7}$$

$$\frac{\delta Z}{\delta B} = (M+H)\cos B; \tag{8}$$

$$\frac{\delta Z}{\delta H} = \sin B; \tag{9}$$

где M и N – радиусы кривизны меридиана и первого вертикала для референц-эллипсоида соответственно.

Практическое применение формул (2) – (9) позволяет использовать геодезические координаты, не приведенные к центру пункта. В формулах (1) величины δB_1, δL_1, δH_1 и δB_2, δL_2, δH_2 должны быть известными с четырьмя значащими цифрами и вычисляются согласно выражениям [3]:

$$\delta B = \frac{l\cos A}{M};$$
$$\delta L = \frac{l\sin A}{\cos B\cdot N}, \tag{10}$$

где l – линейный элемент центрировки; A – азимут линейного элемента.

Применяя прямой способ, сначала вычисляют [2, 3]

$$\mathrm{B_C} = \mathrm{B_J} + \delta\mathrm{B} = \mathrm{B_J} + \frac{\mathrm{l\cos A}}{\mathrm{M}};$$
$$\mathrm{L_C} = \mathrm{L_J} + \delta\mathrm{L} = \mathrm{L_J} + \frac{\mathrm{l\sin A}}{\mathrm{\cos B\cdot N}}; \tag{11}$$
$$\mathrm{H_C} = \mathrm{H_J} + \delta\mathrm{H} = \mathrm{H_J} + \mathrm{h},$$

Зная $\mathrm{B_J}$, вычисляют δB, δL, δH, а затем находят

$$\mathrm{X_C} = (\mathrm{N_C} + \mathrm{H_C})\cos\mathrm{B_C}\cos\mathrm{L_C};$$
$$\mathrm{Y_C} = (\mathrm{N_C} + \mathrm{H_C})\cos\mathrm{B_C}\sin\mathrm{L_C}; \tag{12}$$
$$\mathrm{Z_C} = (\mathrm{N_C}(1-\mathrm{e}^2) + \mathrm{H_C})\sin\mathrm{B_C},$$

где e^2 – квадрат эксцентриситеты эллипсоида вращения.

Разности $\mathrm{X_C} - \mathrm{X_J}$; $\mathrm{Y_C} - \mathrm{Y_J}$; $\mathrm{Z_C} - \mathrm{Z_J}$ будут такими же, как и $\delta\Delta$X, $\delta\Delta$Y, $\delta\Delta$Z, полученные дифференциальным способом.

Рассмотрим вопрос о необходимой точности поиска B, L, H для вычисления поправок δB, δL, δH и δX, δY, δZ, которые найдем по программе USOVA.EXE, реализующей дифференциальный метод их нахождения. Программа разработана В.И. Мицкевичем и О.О. Усовой.

На рисунке 1, 2 приведены графики зависимости δX, δY, δZ от величин B, L.

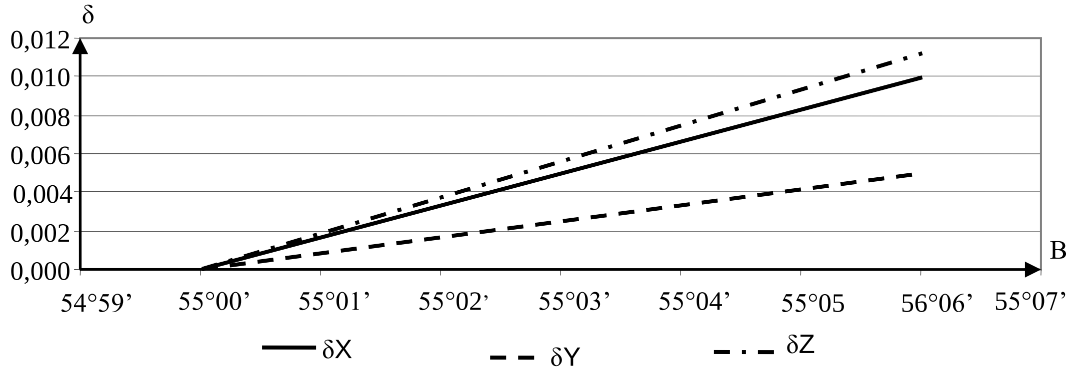

Рис. 1. Зависимость поправок δ от B

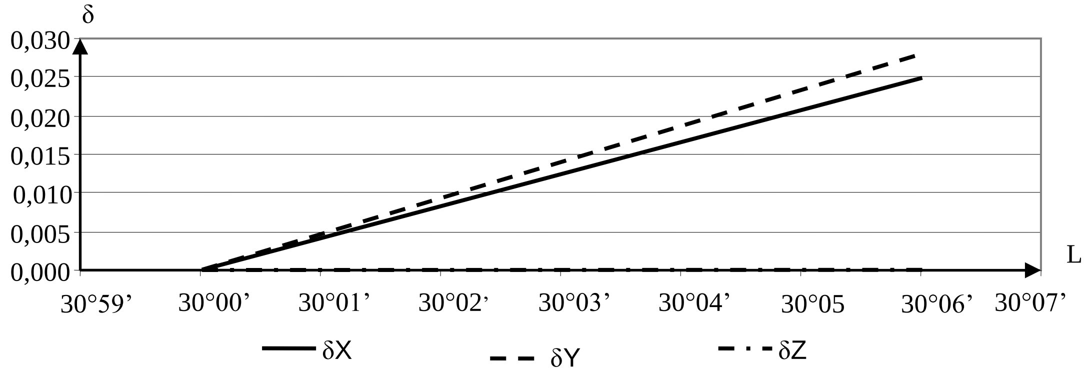

Рис. 2. Зависимость поправок δ от L

По графикам (см. рис. 1, 2) видно, что для поиска δ (δX, δY, δZ) с точностью 5 мм необходимо знать геодезическую широту и долготу, при вычислении δB и δL, с точностью до 60"

2. О вычислении истинного азимута по пространственным координатам точек и измеренным или уравненным приращениям ΔX, ΔY, ΔZ. Истинный азимут между точками 1 и 2 на эллипсоиде можно вычислить по геодезическим координатам первой точки B_1, L_1 и второй точки B_2, L_2, решая обратную геодезическую задачу на эллипсоиде.

Методика вычисления геодезических координат по пространственным координатам хорошо известна. Для первой точки из показаний GPS-приемника могут быть известны X_1, Y_1, Z_1 с определенной точностью. Зная эти координаты можно вычислить B_1, L_1, H_1 по известным формулам.

Для получения B_2, L_2 необходимо знать X_2, Y_2, Z_2. Чтобы получить точные значения азимута линии на эллипсоиде, предлагаем формулы:

$$X_2 = X_1 + \Delta X \;;$$

$$Y_2 = Y_1 + \Delta Y \;;$$

$$Z_2 = Z_1 + \Delta Z \;.$$

Исследования показали, что координаты X_1, Y_1, Z_1 должны быть известны при широте $B \approx 50°$ и длине стороны до 2 км с точностью до 80 м. По этим приближенным значениям можно получить сведения о B_1, L_1 с точностью до 3".

Приведем **пример**

Допустим, что GPS-приемником определены координаты X_1 = 3 175 373,0722 м, Y_1 = 1 833 364,0770 м, Z_1 = 5 201 610,0631 м, которым соответствуют B_1 = 55°00'03", L_1 = 30°00'03", H_1 = 100 м.

Предположим, что ΔX = 1000,0000 м, ΔY = 2000,0000 м, ΔZ = 100,0000 м, тогда $X_2 = X_1 + 1000$ м ; $Y_2 = Y_1 + 2000$ м ; $Z_2 = Z_1 + 100$ м , по которым вычислено B_2 = 54°59'15,4277", L_1 = 30°01'12,2716".

Решая обратную геодезическую задачу на эллипсоиде, получим для прямого азимута A_{12}= 140°03'24,6" и для обратного A_{21} = 320°04'21,4".

Значения азимутов будут известны с точностью до 3", если координаты первой точки будут следующими: X_1 = 3 175 434,7247 м; Y_1 = 1 833 358,6197 м; Z_1 = 5 201 574,5888 м. Сравнивая эти значения с предыдущими, видим, что они расходятся приблизительно на 60 м. Расчеты показали, что B_1 = 55°00'01", L_1 = 30°00'01". $X_2 = X_1 + 1000$ м ; $Y_2 = Y_1 + 2000$ м ; $Z_2 = Z_1 + 100$ м им соответствуют геодезические координаты B_2 = 54°59'13,4284", L_2 = 30°01'10,2717" и азимуты A_{12}= 140°03'21,6", A_{21} = 320°04'18,4". Как видим, азимуты расходятся примерно на 3".

При обработке внецентренных GPS-измерений согласно [1] вспомогательные точки a и b должны быть расположены относительно места стояния GPS-приемника над точной J на расстоянии до 100 м. X_J, Y_J, Z_J, снятые с GPS-приемника, могут быть известны с точностью до 6 м (на практике точность пространственных координат – до 5 м).

Имея точные измеренные значения ΔX_{Ja}, ΔY_{Ja}, ΔZ_{Ja}, ΔX_{Jb}, ΔY_{Jb}, ΔZ_{Jb} на вспомогательные точки a и b, можно получить для них X, Y, Z, решая обратную геодезическую задачу на эллипсоиде по двум линиям и геодезическим координатам B_2, L_2, найти азимут A_{12} и A_{21} на точки a, b. Зная этот азимут и горизонтальный угол на точке J, найдем азимут линейного элемента центрировки A с контролем от точек a и b.

3. Оценка точности при вычислении поправок за центрировку спутниковых приемников. Для априорной оценки точности поправок за центрировку спутникового приемника воспользуемся известными формулами [4, 5]:

$$m = \sigma_0 \sqrt{Q};$$

$$Q = FP^{-1}F^{T};$$

$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \tag{13}$$

где P – вес результатов измерений; F – частные производные функций определяемых величин по переменным.

В качестве переменных, подлежащих оценке точности, будем использовать следующие поправки за центрировку: $\delta\Delta X$, $\delta\Delta Y$, $\delta\Delta Z$. Расширенная псевдообратная матрица будет такой

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial\delta\Delta X}{\partial A} & \frac{\partial\delta\Delta X}{\partial l} & \frac{\partial\delta\Delta X}{\partial h} \\ \frac{\partial\delta\Delta Y}{\partial A} & \frac{\partial\delta\Delta Y}{\partial l} & \frac{\partial\delta\Delta Y}{\partial h} \\ \frac{\partial\delta\Delta Z}{\partial A} & \frac{\partial\delta\Delta Z}{\partial l} & \frac{\partial\delta\Delta Z}{\partial h} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Частные производные, входящие в матрицу F, будем находить методом численного дифференцирования. Например, для первого столбца

$$\frac{\partial\delta\Delta X}{\partial A} = \frac{(\delta\Delta X)_A - \delta\Delta X}{\delta A};$$

$$\frac{\partial\delta\Delta Y}{\partial A} = \frac{(\delta\Delta Y)_A - \delta\Delta Y}{\delta A}; \tag{15}$$

$$\frac{\partial\delta\Delta Z}{\partial A} = \frac{(\delta\Delta Z)_A - \delta\Delta Z}{\delta A},$$

где в числителе используется разность между поправками за центрировку измененными, при их приращении на величину δA ($(\delta\Delta X)_A$, $(\delta\Delta Y)_A$, $(\delta\Delta Z)_A$), и не измененными ($\delta\Delta X$, $\delta\Delta Y$, $\delta\Delta Z$).

Для того чтобы найти обратную матрицу весов Q_C для точки C с учетом Q_J для точки J, воспользуемся методом Ю.И. Маркузе [5]:

$$Q_C = R_{11}^{-1} + UQ_Z U^T; \tag{16}$$

$$U = R_{11}^{-1} R_{12};$$

$$R_{11} = a^T Pa; \quad R_{12} = a^T Pb;$$

$$Q_Z = (R_{22} - U^T R_{12})^{-1}; \tag{17}$$

$$R_{22} = Q_J^{-1} + b^T P b .$$

В нашем случае, так как между точками J и C существует двухсторонняя связь, матрица b, коэффициенты уравнения поправок связанные с пунктом J, равна матрице *a* со знаком минус. Поэтому

$$U = -E ;$$

$$R_{22} = Q_J^{-1} + a^T P a ;$$

$$Q_Z = (Q_J^{-1} + a^T P a + (-E) a^T P a)^{-1} = Q_J .$$

Следовательно,

$$Q_C = (a^T P a)^{-1} + Q_J$$

и окончательно

$$Q_C = F P^{-1} F^T + Q_J , \tag{18}$$

где Q_J – матрица, характеризующая точность пункта J, получаемая из уравнивания GPS-сети.

Для проверки правильности выражения (8) получим независимо матрицу Q_C следующим путем:

$$Q_C = F K F^T ; \tag{19}$$

$$K = P^{-1} + a Q_J a^T ; \tag{20}$$

$$a = P^{-\frac{1}{2}} (F P^{-\frac{1}{2}})^{+} . \tag{21}$$

Равенства (20) и (21) разработаны В.И. Мицкевичем.

Приведем **пример**

Геодезические координаты в точке стояния GPS-приемника примем такими: B = 55°00´00´´; L = 30°00´00´´; H = 121,562 м.

Элементы центрировки: A = 65°45´47´´; l = 19,850 м; h = 1,565 м.

По этим исходным данным, используя программу USOVA.EXE, получим: $\delta\Delta X$ = –14,0538 м; $\delta\Delta Y$ = 12,7868 м; $\delta\Delta Z$ = 5,9559 м.

Принимая при численном дифференцировании δA = 10"; δl = 0,01 м; δh = 0,01 м, найдем матрицу F в соответствии с формулами (14) и (15), используя программу USOVA.EXE:

$$F = \begin{pmatrix} 0.00004 & -0.75 & 0.49 \\ 0.00007 & 0.62 & 0.29 \\ -0.00005 & 0.23 & 0.82 \end{pmatrix}.$$

Полагая, σ_A = 20"; $\sigma_L = \sigma_h$ = 0.001 м, получим веса измерений $P_A = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_A^2} = 0{,}0025$; $P_L = P_h = 1$ и по формуле (18) найдем искомую матрицу:

$$Q_C = \begin{pmatrix} 0.8026 & -0.3230 & 0.2292 \\ -0.3230 & 0.4685 & 0.3804 \\ 0.2292 & 0.3804 & 0.7253 \end{pmatrix} + Q_J ;$$

Примем, например, $Q_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ и окончательно получим:

$$Q_C = \begin{pmatrix} 1.80 & -0.32 & 0.23 \\ -0.32 & 4.47 & 0.38 \\ 0.23 & 0.38 & 9.72 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись контрольными формулами (19) – (21), получим сначала матрицу, а по формуле (21):

$$a = \begin{pmatrix} -4666 & -7686 & 5506 \\ 0.759 & -0.605 & -0.240 \\ -0.498 & -0.299 & -0.816 \end{pmatrix},$$

затем по формуле (20) найдем матрицу K

$$K = \begin{pmatrix} 5.31\cdot 10^{8} & 3183 & -28952 \\ 3183 & 3.56 & 2.11 \\ -28952 & 2.11 & 7.60 \end{pmatrix}.$$

По формуле (19) получим такое же значение Q_C:

$$Q_C = \begin{pmatrix} 1.80 & -0.32 & 0.23 \\ -0.32 & 4.47 & 0.38 \\ 0.23 & 0.38 & 9.72 \end{pmatrix}.$$

По формуле $m = \sigma_0\sqrt{Q}$; , при $\mu = \sigma_0 = 1$, окончательно получим:

$$m_X = 1\sqrt{1,80} = 1,34 \text{ м};$$

$$m_Y = 1\sqrt{4,47} = 2,11 \text{ м};$$

$$m_Z = 1\sqrt{9,72} = 3,12 \text{ м}.$$

По результатам выполненных исследований можно сделать следующие выводы:

1) линейный дифференциальный метод вычисления поправок за центрировку и редукцию (1) – (10) и нелинейный метод, реализуемый по формулам (11) и (12), дают одни и те же значения X_C, Y_C, Z_C;

2) на практике мы не рекомендуем использовать дифференциальный метод поиска поправок δ в измеренные величины ΔX, ΔY, ΔZ, предлагая непосредственно находить X_C, Y_C, Z_C нелинейным методом из выражений (11), (12), так как в этом случае внецентренные координаты X_J, Y_J, Z_J , полученные из уравнивания, перевычисляются и приводятся к центру, не изменяя измеренные величины ΔX, ΔY, ΔZ;

3) оценку точности величин поправок $\delta\Delta X$, $\delta\Delta Y$, $\delta\Delta Z$ рекомендуется выполнять по формулам (13) – (15), по возможности используя программу USOVA.EXE только для тех пунктов, для которых были получены внецентренные координаты X_J, Y_J, Z_J.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимов, А.П. Поправки за центрировку спутниковых приемников / А.П. Герасимов, Н.А. Телышев // Геодезия и картография. – 2006. – № 6. – С. 17 – 19.
2. Закатов, П.С. Курс высшей геодезии / П.С. Закатов. – М.: Недра, 1976. – 511 с.
3. Уралов, С.С. Курс геодезической астрономии / С.С. Уралов. – М.: Недра, 1980. – 592 с.
4. Усова, О.О. Априорная оценка точности широт, долгот и азимутов в приближенных способах астрономии / О.О. Усова // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. F. Строительство. Прикладные науки. – 2007. – № 6. – С. 136 – 139.
5. Маркузе, Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1982. – 191 с.

Поступила 06.11.2008