

УДК528.235(043.3)

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ВЫЧИСЛЕНИЙ В ПРОЕКЦИИ МЕРКАТОРА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ТЕРРИТОРИИ ЛИВИИ

А.А. АКРЕШ МОХАММЕД САБРИ
(Полоцкий государственный университет)

Приведены выражения для коэффициентов в обращенном ряде до десятой степени проекции Меркатора. Это позволяет применять проекцию для изображения значительных по размерам территорий с точностью, достаточной для решения научных и практических задач геодезии. Произведена оценка точности алгоритма вычислений для зоны с разностями долгот в 16° применительно к территории Ливии с широтой главной точки проекции 26.5° . Показано, что вся территория Ливии может быть изображена в одной координатной зоне с долготой осевого меридиана в 17.25° . Исследованы некоторые численные характеристики проекции для пунктов, расположенных в разных местах, произведены контрольные вычисления путем прямого и обратного перехода (плоские координаты – геодезические координаты). Приводятся результаты вычислений.

Введение. Ливия находится в Северной Африке и, как известно, имеет большую территорию. Граничные точки имеют географические координаты: $\varphi_s = 19^\circ 30' 29.80'' N$; $\varphi_N = 33^\circ 09' 55.63'' N$; $\lambda_w = 9^\circ 24' 28.96'' E$; $\lambda_E = 25^\circ 05' 46.12'' E$. Как видно, разность долгот близка к 15° , а разность широт – к 14° . При использовании традиционных подходов и алгоритмов вычислений в геодезических проекциях территория Ливии может быть изображена в нескольких координатных зонах, что создает целый ряд проблем практического применения плоских систем координат. Увеличение размеров зон приводит при этом к существенному снижению точности вычислений и возрастанию искажений геометрических элементов.

В настоящее время в Ливии используют проекцию Меркатора в 6° (Universal Transverse Mercator) UTM с четырьмя зонами и 2-х градусную проекцию Libyan Transverse Mercator LTM с девятью зонами. Точность вычисления угловых элементов составляет $0,005'' - 0,01''$ на цифровых картах, что не является достаточным для GPS-систем (точность $0,0003'' - 0,0002''$). В связи с этим возникают проблемы, в том числе при необходимости преобразования координат из одной системы в другую, из одной проекции в другую. Также существуют проблемы в определении зон. Для устранения этих проблем, по нашему мнению, нужно решить следующие задачи:

- обеспечение точности, достаточной как для цифровых карт, так и соответствующей точности GPS-систем;

- поиск оптимального решения в пределах одной координатной зоны для всей территории Ливии.

1. Алгоритм в проекции Меркатора. В геодезической литературе широко известны формулы геодезических проекций, основанные на разложениях в ряды до восьмой степени. В работах [6 и др.] приведены формулы с удержанием девяти членов разложения.

Исследования показывают, что для условий Ливии необходимо иметь формулы до десяти членов разложения, чтобы обеспечить необходимую точность, соответствующую точности современных измерений, основанных на спутниковых системах позиционирования.

Нами получены коэффициенты характеристических уравнений проекций класса, определенного алгоритмом профессора В.П. Подшивалова. Коэффициенты определяются следующими выражениями для поперечно-цилиндрических проекций (UTM):

$$C_1 = \frac{m_0 \cdot c \cdot \cos B_0}{V};$$

$$C_2 = -\frac{C_1 \cdot \sin B_0}{2};$$

$$C_3 = \frac{C_1 \cdot \cos^2 B_0}{6} (t g^2 B_0 - V^2);$$

$$C_4 = \frac{C_1}{24} \sin B_0 \cos^2 B_0 (5 - t g^2 B_0 + 9\eta^2 + 4\eta^4);$$

$$C_5 = \frac{C_1}{120} \cos^4 B_0 (5 + 14\eta^2 - 18t g^2 B_0 - 58\eta^2 \cdot t g^2 B_0 + 13\eta^4 - 73\eta^4 \cdot t g^2 B_0 + t g^4 B_0 + 4\eta^6 - 28\eta^6 \cdot t g^2 B_0);$$

$$\begin{aligned}
C_6 &= \frac{C_1}{720} \sin B \cdot \cos^4 B_0 (58t g^2 B_0 + 330\eta^2 \cdot t g^2 B_0 + 511\eta^4 \cdot t g^2 B_0 - 61 - 270\eta^2 - t g^4 B_0 - 477\eta^4); \\
C_7 &= \frac{C_1}{5040} \cos^6 B_0 (479t g^2 B_0 - 61 - 331\eta^2 + 3359\eta^2 \cdot t g^2 B_0 - 179t g^4 B_0 + 5348\eta^2 t g^4 B_0 + t g^6 B_0); \\
C_8 &= \frac{C_1}{40320} \sin B_0 \cdot \cos^6 B_0 (1385 + 11021\eta^2 - 3111t g^2 B_0 - 47537\eta^2 t g^2 B_0 + 27104\eta^2 \cdot t g^4 B_0 + 543t g^4 B_0 - t g^6 B_0); \\
C_9 &= \frac{C_1}{362880} \cos^8 B_0 (19028t g^2 B_0 - 1385 - 12406\eta^2 + 259443\eta^2 t g^2 B_0 - \\
&\quad - 18270t g^4 B_0 - 483438\eta^2 \cdot t g^4 B_0 + 1636t g^6 B_0 + 136613\eta^2 \cdot t g^6 B_0 - t g^8 B_0); \\
C_{10} &= \frac{C_1}{3628800} \sin B_0 \cdot \cos^8 B_0 (50521 + 704488\eta^2 - 206276t g^2 B_0 - 4455987\eta^2 \cdot t g^2 B_0 + \\
&\quad + 101166t g^4 B_0 + 4286640\eta^2 \cdot t g^4 B_0 - 4916t g^6 B_0 - 686345\eta^2 \cdot t g^6 B_0 + t g^8 B_0).
\end{aligned} \tag{1}$$

В коэффициентах C_6 отброшен член с множителем η^6 , а в коэффициентах $C_7 - C_{10}$ - с множителем η^4 .

Такие коэффициенты до десяти членов обеспечивают в плоских координатах точность 0.001 м при разности долгот крайних точек $L = 18^\circ$.

Для обратного перехода получены коэффициенты путем обращения степенного ряда, которые являются универсальными и работают для любой проекции указанного класса:

$$\begin{aligned}
C'_1 &= \frac{1}{C_1}; & C'_2 &= -\frac{C_2}{C_1^3}; & C'_3 &= \frac{1}{C_1^5} (2C_2^2 - C_1 C_3); & C'_4 &= \frac{1}{C_1^7} (5C_1 C_2 C_3 - C_1^2 C_4 - 5C_2^3); \\
C'_5 &= \frac{1}{C_1^9} (3C_1^2 C_3^2 + 6C_1^2 C_2 C_4 + 14C_2^4 - 21C_1 C_2^2 C_3 - C_1^3 C_5); \\
C'_6 &= \frac{1}{C_1^{11}} (7C_1^3 C_2 C_5 + 7C_1^3 C_3 C_4 - 28C_1^2 C_2 C_3^2 - 28C_1^2 C_2^2 C_4 - 42C_2^5 + 84C_1 C_2^3 C_3 - C_1^4 C_6); \\
C'_7 &= \frac{1}{C_1^{13}} \left(4C_1^4 C_4^2 + 8C_1^4 C_2 C_6 + 8C_1^4 C_3 C_5 - 12C_1^3 C_3^3 - 36C_1^3 C_2^2 C_5 - 72C_1^3 C_2 C_3 C_4 + \right. \\
&\quad \left. + 132C_2^6 + 120C_1^2 C_2^3 C_4 + 180C_1^2 C_2^2 C_3^2 - 330C_1 C_2^4 C_3 - C_1^5 C_7 \right); \\
C'_8 &= \frac{1}{C_1^{15}} \left(9C_1^5 C_2 C_7 + 9C_1^5 C_3 C_6 + 9C_1^5 C_4 C_5 - 45C_1^4 C_2^2 C_6 - 45C_1^4 C_2 C_4^2 - 45C_1^4 C_3^2 C_4 - 90C_1^4 C_2 C_3 C_5 + 165C_1^3 C_2 C_3^3 + \right. \\
&\quad \left. + 165C_1^3 C_2^2 C_5 - 429C_2^7 + 495C_1^2 C_2^2 C_3 C_4 + 495C_1^2 C_2^4 C_4 - 990C_1^2 C_2^3 C_3^2 + 1287C_1 C_2^5 C_3 - C_1^6 C_8 \right); \\
C'_9 &= \frac{1}{C_1^{17}} \left(1430C_2^8 - C_1^7 C_9 + 5C_1^6 C_2^2 + 37C_1^4 C_3^4 + 10C_1^6 C_3 C_7 + 10C_1^6 C_4 C_6 + 10C_1^6 C_2 C_8 - 55C_1^5 C_2^2 C_7 - 55C_1^5 C_3^2 C_5 - \right. \\
&\quad \left. - 55C_1^5 C_3 C_4^2 - 110C_1^5 C_2 C_4 C_5 - 110C_1^5 C_2 C_3 C_6 + 220C_1^4 C_2^3 C_6 + 330C_1^4 C_2^2 C_4^2 + 660C_1^4 C_2 C_3^2 C_4 + \right. \\
&\quad \left. + 660C_1^4 C_2 C_3 C_5 - 715C_1^3 C_2^4 C_5 - 1425C_1^3 C_2^2 C_3^3 - 2860C_1^3 C_2^2 C_3 C_4 + 2002C_1^2 C_2^5 C_4 + 5005C_1^2 C_2^4 C_3^2 - \right. \\
&\quad \left. - 5005C_1 C_2^6 C_3 \right); \\
C'_{10} &= \frac{1}{C_1^{19}} \left(11C_1^7 C_2 C_9 + 11C_1^7 C_3 C_8 + 11C_1^7 C_4 C_7 + 11C_1^7 C_5 C_6 - 22C_1^6 C_4^3 - 66C_1^6 C_2 C_5^2 - 66C_1^6 C_2^2 C_8 - -66C_1^6 C_3^2 C_6 - \right. \\
&\quad \left. - 132C_1^6 C_2 C_4 C_6 - 132C_1^6 C_2 C_3 C_7 - 132C_1^6 C_3 C_4 C_5 + 286C_1^5 C_2^3 C_7 + 286C_1^5 C_3^3 C_4 + 858C_1^5 C_2^2 C_4 C_5 + \right. \\
&\quad \left. + 858C_1^5 C_2^2 C_3 C_6 + 858C_1^5 C_2 C_3 C_4^2 + 858C_1^5 C_2 C_2^2 C_5 - 1001C_1^4 C_2^4 C_6 - 1001C_1^4 C_4 C_3^4 - 2002C_1^4 C_2^2 C_4^2 + \right. \\
&\quad \left. + 3083C_1^3 C_2^5 C_5 - 4004C_1^4 C_2^3 C_3 C_5 - 4862C_2^9 - 6078C_1^4 C_2^2 C_3^2 C_4 - 8008C_1^2 C_2^6 C_4 + 10010C_1^3 C_2^3 C_3^3 + \right. \\
&\quad \left. + 15015C_1^3 C_2^4 C_3 C_4 + 19448C_1 C_2^7 C_3 - 24024C_1^2 C_2^5 C_3^2 - C_1^8 C_{10} \right);
\end{aligned} \tag{2}$$

2. О точности алгоритма поперечно-цилиндрической проекции Меркатора. Для практического применения общего алгоритма геодезических проекций, возникает важный вопрос о точности вычислений плоских и геодезических координат (прямая и обратная задачи проекций), при этом будем полагать зона с разностями долгот $L = 16^\circ$ и средней широте $B_0 = 26.5^\circ$ для всей территории Ливии с десятью коэффициентами C_j, C'_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$).

Плоские прямоугольные координаты вычисляются по гармоническим формулам [1]:

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^n C_j P_j; \quad y = y_0 + \sum_{j=1}^n C_j Q_j. \tag{3}$$

Полгрешности этих формул рассчитываются из следующих выражений [1]:

$$\begin{aligned} \delta x &\leq \sum_{j=1}^n P_j \delta C_j + C_{j+1} P_{j+1}; \\ \delta y &\leq \sum_{j=1}^n Q_j \delta C_j + C_{j+1} Q_{j+1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (4) можно записать следующие выражения после отбрасывания величины η^6 в коэффициенте C_6 в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta x &\leq \sum_{j=1}^n P_6 \delta C_6 + C_{j+1} P_{j+1}; & \delta y &\leq \sum_{j=1}^n Q_6 \delta C_6 + C_{j+1} Q_{j+1}; \\ \delta C_6 &= \frac{e^6}{56} c \cdot \cos^6 B_0 \leq 0.035 \cos^6 B_0 \quad (m) \end{aligned} \tag{5}$$

Для частного масштаба длин и сближения меридианов, вычисляют погрешности по формулам [1]:

$$\begin{aligned} \delta m &\leq \frac{1}{mr^2} (k_1 \delta k_1 + k_2 \delta k_2); & \delta \gamma &\leq \frac{1}{m^2 r^2} (k_2 \delta k_1 - k_1 \delta k_2); \\ k_1 &= -\sum_{j=1}^n j C_j Q_{j-1}; & k_2 &= \sum_{j=1}^n j C_j P_{j-1}; \\ \delta k_1 &\leq 6Q_3 \delta C_6 + (j+1) C_{j+1} Q_j; & \delta k_2 &\leq 6P_5 \delta C_6 + (j+1) C_{j+1} P_j; \end{aligned} \tag{6}$$

При обратном переходе геодезические координаты на поверхности эллипсоида также получают погрешности, определяемые следующими уравнениями [1]:

$$\begin{aligned} B &= B_0 + \sum_{j=1}^n C_j' P_j'; & L &= L_0 + \sum_{j=1}^n C_j' Q_j'; \\ \delta B &\leq \sum_{j=1}^n P_6' \delta C_6' + C_{j+1}' P_{j+1}'; & \delta L &\leq \sum_{j=1}^n Q_6' \delta C_6' + C_{j+1}' Q_{j+1}'; \\ \delta C_6' &= e^6 \cdot C_6' \cos B_0 \leq 3.974 \cos B_0 \cdot 10^{-49} \quad (m^{-5}) \end{aligned} \tag{7}$$

В обратном переходе масштаб и сближение меридианов имеют погрешности, определяемые по формулам [1]:

$$\begin{aligned} \delta m &\leq m^3 r^2 (k_1' \delta k_1' + k_2' \delta k_2'); & \delta \gamma &\leq m^2 r^2 (k_2' \delta k_1' - k_1' \delta k_2'); \\ k_1' &= \sum_{j=1}^n j C_j' Q_{j-1}'; & k_2' &= \sum_{j=1}^n j C_j' P_{j-1}'; \\ \delta k_1' &\leq 6Q_3' \delta C_6' + (j+1) C_{j+1}' Q_j'; & \delta k_2' &\leq 6P_5' \delta C_6' + (j+1) C_{j+1}' P_j'. \end{aligned} \tag{8}$$

Применительно к территории Ливии численные значения величин, рассчитанных по приведенным формулам, с одной координатной зоной и разностью долгот в 16° градусов, широты средней точки проекции $B_0 = 26.5^\circ$, приведены в таблице 1

Таблица 1

Величины	L = 8°, B ₀ = 26.5°	L = 7°, B ₀ = 26.5°	L = 6°, B ₀ = 26.5°
dC ₆	0.01796442	0.01796442	0.01796442
dx	0.0030 м	0.0010 м	0.0003 м
dy	-0.0285 м	-0.0112 м	-0.0038 м
k ₁	360337.8626	314371.4492	268777.03
k ₂	5745699.0315	5737775.9079	5730911.924
δk ₁	-0.17441587	-0.068516479	-0.02329683022
δk ₂	-1.42846380	-0.643189130	-0.25579135368
δm	-0.0000002014	-0.000000091	-0.00000003597
δγ	-0.00000001177	-0.0000000046	-0.00000000157
γ	3.5885685948	3.1360872643	2.6851771065
x	2957282.23256	2951394.86437	2946306.43483

y	799105.83048	698895.14816	598813.50601
---	--------------	--------------	--------------

Для обратного перехода аналогичные характеристики приведены в таблице 2.

Таблица 2

x	2957282.23256	2951394.86437	2946306.43483
y	799105.83048	698895.14816	598813.50601
dC ₆	3.9743587752*10 ⁻⁴⁹	3.9743587752*10 ⁻⁴⁹	3.9743587752*10 ⁻⁴⁹
dB	-0.0000,0000,4065	-0.0000,0000,1397	-0.0000,0000,0407
dL	-0.0000,0003,4255	-0.0000,0001,3409	-0.0000,0000,4545
k' ₁	-1.0872247758*10 ⁻⁸	-9.52037715*10 ⁻⁹	-8.165644*10 ⁻⁹
k' ₂	1.73361379772*10 ⁻⁷	1.737619383*10 ⁻⁷	1.7410933*10 ⁻⁷
δk' ₁	-2.16075734045*10 ⁻¹⁴	-8.55595767*10 ⁻¹⁵	-2.92953558*10 ⁻¹⁵
δk' ₂	-3.01433690769*10 ⁻¹³	-1.34760883*10 ⁻¹³	-5.32693743*10 ⁻¹⁴
δm'	-6.01370418303*10 ⁻⁴⁷	-2.706941721*10 ⁻⁴⁷	-1.07634506*10 ⁻⁴⁷
δγ'	1.765558828018*10 ⁻³⁵	7.703246198*10 ⁻³⁶	2.848028662*10 ⁻³⁶
γ'	-3.5885682719	-3.1360871661	-2.6851770818
B	26.5000,0000,4067	26.5000,0000,1062	26.5000,0000,0265
L	7.9999,9999,54698	6.9999,9999,87426	5.9999,9999,9752

3. Анализ Проекции Меркатора в одной зоне для территории Ливии. При условии использования одной координатной зоны для всей территории Ливии с разностями долгот dL = 16°, где осевой меридиан имеет долготу L₀ = 17,25° и широту средней точки B₀ = 26,5°, изучаем характеристики нескольких пунктов, расположенных в различных местах, вначале при вычислении плоских координат и затем в переходе к геодезическим координатам. Представляем для линейных размеров зоны 2 000 000. 0000 м, где осевой меридиан имеет абсциссу 1000,000.0000 м. Все результаты приведены в таблицах 3 – 6.

Таблица 3

В прямой задаче				В обратной задаче		
1	B	33	X	Y	B	32.9999,99962
	dL	7.75			L	7.7499,99912
	γ	4.2393,89331			γ	-4.2393,87954
2	B	33	X	Y	B	32.9999,999751
	dL	5.75			L	5.7500,000060
	γ	3.1391,92237			γ	-3.1391,93417
3	B	33	X	Y	B	33.0000,0000,10
	dL	3			L	3.0000,0000,22
	γ	1.6349833057			γ	-1.6349833092

Таблица 4

В прямой задаче				В обратной задаче		
1	B	26	X	Y	B	26.0000,0000,44
	dL	7.75			L	7.7499,9999,93
	γ	3.4144789946			γ	-3.4144786464
2	B	26	X	Y	B	26.0000,0000,09
	dL	5.75			L	5.7500,0000,037
	γ	2.5276023974			γ	-2.52760237286
3	B	26	X	Y	B	26.0000,0000,056
	dL	3			L	3.0000,0000,017
	γ	1.3161010043			γ	-1.3161010043

Таблица 5

В прямой задаче				В обратной задаче		
1	B	20	X	Y	B	20.0000,00086
	dL	7.75			L	7.7500,00044
	γ	2.665279199			γ	-2.665273929
2	B	20	X	Y	B	19.9999,9999,904
	dL	5.75			L	5.7500,0001,80
	γ	1.9725701042			γ	-1.9725695621
3	B	20	X	Y	B	20.0000,0000,80
	dL	3			L	2.9999,9999,747

γ	1.0269038349		γ	-1.02690401762
----------	--------------	--	----------	----------------

Таблица 6

		В прямой задаче			В обратной задаче	
Триполи	B	32.9000,00000	X	Y	B	32.8999,9999,66
	dL	-4.1666,6666,67	3649432.7602	389975.5015	L	-4.1666,6667,55
	γ	2.2660836628			γ	-2.2660841782
Бен-Гази	B	32.1018,3055,5	X	Y	B	32.10183,0557,61
	L	2.8223,9722,22	3556696.6424	266453.7249	L	2.8223,9722,45
	γ	1.5007781628			γ	-1.500778198
Мусрата	B	32.3374,6388,8	X	Y	B	32.3374,6388,66
	L	-2.0238,6666,67	3581137.9844	190558.0382	L	-2.0238,6666,57
	γ	1.08290252			γ	-1.0829024446
Алкувра	B	24.1698,9166,6	X	Y	B	24.1698,9166,79
	L	6.1417,7222,22	2687902.8942	624924.3479	L	6.1417,7222,21
	γ	2.5228909283			γ	-2.5228910061
Егдямис	B	30.1480,0000,0	X	Y	B	30.1480,0000,76
	L	-7.7468,2500,0	3362056.7960	747497.4914	L	-7.7468,2500,93
	γ	3.9088097509			γ	-3.9088093789

Заключение. Показаны преимущества применения новых систем координат в проекции Меркатора вместо старых систем UTM, LTM, LTM-16, что являлось целью исследования; при этой вся территория Ливии представлена в одной координатной зоне с разностями долгот 16° и средней широтой 26,5°, с долготой осевого меридиана 17,25°. На основе анализа приведенных результатов исследований получены следующие выводы:

- проекции Меркатора с десятью коэффициентами характеристического уравнения в одной зоне лучше, чем UTM, LTM, LTM-16, точность вычисления координат от 0,009 до 0,0001 м;
- погрешности в обратном переходе при широте 33° и разности долгот 7,75° не превышают 0,0042 и 0,009 м, и при широте 33° и разности долгот в 5,75° не превышают 0,002 и 0,0007 м;
- погрешности в обратном переходе при широте 26° и разности долгот в 7,75° не превышают величин 0,0004 и 0,0001 м, при этом в большинстве случаев вычисление ведется практически без ошибок;
- погрешности в обратном переходе при широте 20° и разности долгот 7,75° не превышают 0,0095 и 0,0002 м, в большинстве случаев вычисление ведется практически без ошибок;
- предлагаемый путь формирования систем плоских координат для территории Ливии удобен для любого пользователя, не имеющего большого опыта работы в такой системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подшивалов, В.П. Теоретические основы формирования координатной основы для геоинформационных систем / В.П. Подшивалов. – Новополоцк: ПГУ, 1998.
2. Морозов, В.П. Курс сфероидической геодезии / В.П. Морозов. – М.: Недра, 1979.
3. Бугаевский, Л.М. Математическая картография / Л.М. Бугаевский. – М.: Златоуст, 1998.
4. Багратуни, Г.В. Курс сфероидической геодезии / Г.В. Багратуни. – М.: Геодез. лит., 1962.
5. Соловьев, М.Д. Математическая картография / М.Д. Соловьев. – М.: Недра, 1969.
6. Huryeu and Padshyvalau: Autometed design of coordinate system for long linear obyeects, SCAN – GIS – 2007, Norway. – P. 147 – 157.

Поступила 06.11.2008