УДК 528.063

АНАЛИЗ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

П.В. СУББОТЕНКО
(Полоцкий государственный университет)

Многокритериальная оптимизация как новая методика при уравнивании возникла на основе обобщения метода L_p-оценок, применяемого для математической обработки геодезических сетей. Недостаток метода L_p-оценок заключается в постоянстве показателя степени n (n = 2, – метод наименьших квадратов, n = 1, – метод наименьших модулей). Причём степень n берётся неизменной для всех разнородных результатов измерений. Для того чтобы в полигонометрии для углов применить одну степень, а для сторон – другую, разработана соответствующая методика многокритериальной оптимизации. Так, если степени n определены не средствами математической статистики, а под условием минимума максимальной ошибки положения пункта в слабом месте сети, то получим многокритериальную оптимизацию, так как в поиске решения участвуют два, а в некоторых случаях даже три критерия. Представлены итоги исследований по разработке многокритериального метода (МК).

Введение. Метод многокритериальной оптимизации развивался последовательно: были разработаны универсальные алгоритмы уравнивания и оценки точности для способа L_p-оценок; многостепенные методы уравнивания с использованием не одной степени n, а нескольких степеней n_i, включая общий случай, когда для каждого измерения отыскивается своя степень; многокритериальная оптимизация, позволяющая отыскивать индивидуальные степени под условием дополнительных критериев. Благодаря новой методике, вопреки известной теореме Гаусса – Маркова, были получены результаты оценки точности планового положения пунктов в 1,3 раза меньше, чем классический метод наименьших квадратов. Одновременно с этим не только уменьшается обусловленность матрицы Гессе, но и в ряде случаев возрастает вероятность попадания в круг ошибок на определяемых пунктах в слабом месте геодезических сетей.

Основная часть. В статье [1] для осуществления многокритериальной оптимизации вместо формулы

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{x} P_i^{\frac{n}{2}} \left|L_i(X)\right|^n \tag{1}$$

предлагается минимизировать целевую функцию по формуле:

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{x} \frac{c}{\sigma_i^{n_i}} \left|L_i(X)\right|^{n_i}, \tag{2}$$

где c – произвольная постоянная, а n_i – может быть для каждого измерения разное. Такая постановка задачи имеет практическое значение, когда, например, при уравнивании линейно-угловой сети для линейных и угловых измерений можно брать разные показатели степени n.

Практика показала, что алгоритм минимизации функций (1) и (2) ничем не отличается и лишь требует незначительного усложнения исходной информации, когда при многокритериальной оптимизации кроме σ_i требуется задавать ещё индивидуально степень n_i [1].

В работе [2] для минимизации функции (2) предлагается метод Ньютона.

При одном скалярном показателе эффективности решения было замечено, что при n = [1,0 – 1,4] метод Ньютона не сходится. При многокритериальном уравнивании метод Ньютона может сходиться, если для части измерений выполняется многокритериальная оптимизация на конкретных примерах линейно-угловых геодезических сетей. Было рассмотрено 2 примера. На их основании выяснилось, что если для части измерений n_i = 1,0 метод Ньютона сходится, то для других измерений $n_i \neq 1{,}0$.

Авторами в [3] предлагается при оценке точности в методах одно- и многокритериальной оптимизации использовать общую формулу:

$$m_F = \mu\sqrt{\frac{1}{P_F}}, \tag{3}$$

в которой

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}}. \tag{4}$$

Рассмотрено вычисление μ и ошибки положения определяемых пунктов M на примере геодезического четырёхугольника и линейно-угловой сети. Первый пример показал, что чем меньше μ, тем меньше M. То есть эффективность оценок повышается с уменьшением μ и не является наименьшей для метода наименьших квадратов. Во втором примере при многокритериальной оптимизации получена наименьшая ошибка положения пункта.

При поиске оптимального n минимизировалась целевая функция [4]:

$$G = \sum_{j=1}^{K} M_j \ , \tag{5}$$

где K – число определяемых пунктов геодезической сети.

В работе [4] показаны значения оптимального n для шести примеров геодезических сетей. Поиск общего для всех измерений оптимального n осуществлялся методом релаксации с шагом $\Delta n = \pm\, 0{,}1$.

Также в [4] показаны значения оптимальных n_i для тех же примеров, только в случае многокритериальной оптимизации. Поиск n осуществлялся методом приближений. Сначала для всех измерений принималось $n = 2{,}0$. Затем для каждого измерения выбирался показатель степени n_i с шагом $\Delta n = \pm\, 0{,}1$ и запоминалось n_i с наименьшим значением G. Число полных приближений, когда просматривались все измерения, не превышало 20.

Здесь же приведены значения спектрального числа обусловленности: c_1 – при $n = 2$; c_2 – при n оптимальном, но общим для всех измерений и c_3 – для случая многокритериальной оптимизации.

Выяснилось, что обусловленность общеизвестной матрицы Q для случая многокритериальной оптимизации при условии минимума функции (5), как правило, лучше, чем при $n = 2$.

Авторами в [5] обсуждаются практические результаты математической обработки реальной GPS-сети, содержащей 29 исходных и определяемых пунктов с измеренными пространственными приращениями координат ΔX, ΔY и ΔZ по 65 линиям. Уравнивание и оценка точности выполнялась раздельно по ΔX, ΔY и ΔZ с использованием программы NIWA2, предназначенной для обработки нивелирных сетей.

При одном и том же n были уравнены следующие построения:

A – свободная сеть GPS, опирающаяся на один исходный пункт (обычный метод уравнивания);

B – нуль-свободная сеть, результаты уравнивания которой были получены относительно виртуальной сети для GPS средней плоскости (уравнивалось при любом n без исходных пунктов);

C – нуль-свободная сеть с начальными координатами относительно исходных пунктов, которых было 2;

D – несвободная сеть, опирающаяся на 2 исходных пункта (обычный метод уравнивания).

В процессе уравнивания и оценки точности изменялась n на 0,1 и результаты оценки точности по четырём вариантам (A, B, C и D) были представлены в виде графиков для наибольшей ошибки положения.

По результатам обработки был сделан вывод, что одинаковую эффективность для данного примера имеют оценка и результаты оценки точности на отрезке $1{,}6 \le n \le 2{,}4$, следовательно, данную сеть GPS можно уравнивать и оценивать традиционным методом наименьших квадратов. При $n < 1{,}6$ и $n > 2{,}4$ эффективность оценок резко снижается.

В работе [6] приводятся общие формулы многокритериального уравнивания и оценки точности нивелирных сетей под условием минимакса. Поиск минимума целевой функции предлагается осуществлять методом релаксации, изменяя степени на величину $\Delta n = \pm\, 0{,}1$.

На примере, приведённом в статье [6], получены следующие данные:

- результаты уравнивания и оценки точности свободной сети с исходным пунктом № 96 при $n = 2{,}0$ для всех измерений;

- оценка точности свободной нивелирной сети и с исходным пунктом № 96 в случае многокритериальной оптимизации с нахождением степеней n;

- результаты уравнивания и оценки точности для нуль-свободной нивелирной сети от средней плоскости и в случае многокритериальной оптимизации;

- результаты уравнивания и оценки точности для нуль-свободной нивелирной сети относительно исходных пунктов и в случае многокритериальной оптимизации.

По этим результатам сделаны следующие выводы.

1) величины отметок H, указанных в колонках 2, 5 и 7 (табл. 2 – 4 в [6]), будут близкими к их соответствующим значениям, найденным без многокритериальной оптимизации;

2) результаты оценки точности при изменении степени n принимают другие и меньшие значения после многокритериальной оптимизации;

3) при обработке разностей эпох наблюдений следует уравнивать по разностям измерений, чтобы получить адекватную оценку точности.

В статье [7] говорится о том, что преимуществом метода многокритериальной оптимизации по сравнению с классическими (МНК и МНМ) является большая гибкость. Например, для угловых измерений можно принять степень $n = 2{,}0$, а для линейных наблюдений – степень $n = 1{,}0$.

Область применения многокритериальной оптимизации может быть обширной. Этим способом возможно уравнивание любых локальных геодезических сетей при числе определяемых пунктов не более десяти, т.е. в тех случаях, когда из-за малости выборки трудно установить закон распределения погрешностей измеренных величин и можно принять любые, даже индивидуальные для каждого измерения степени.

Также в статье [7] приводится сравнение результатов уравнивания по МНК с многокритериальным методом на 6 примерах. По этим данным видно, что ошибка M_i во втором случае уменьшилась в 1,2 – 1,5 раза, а вероятность попадания в круг ошибок в некоторых случаях даже возросла с одновременным уменьшением числа обусловленности.

Статья [8] посвящена проблеме определения оптимального плана измерений при заданной точности искомых параметров сети и минимальном числе повторений наблюдений. Здесь рассматривается решение аналогичной задачи с применением целевых функций:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^{N} P_{k,i} L_i^2(X), \tag{6}$$

$$\Phi_2(X) = \min(\max M). \tag{7}$$

Известно, что веса измерений при уравнивании должны быть определены до обработки и оставаться неизменными. Так требует теория уравнительных вычислений. В статье [8] предпринимается попытка уточнения весов измерений в процессе уравнивания. Приведены результаты вычислений по традиционной (МНК) и новой методикам, доказывающие преимущество нового метода.

Наибольший практический интерес имеет задача поиска оптимальных весов измерений до уравнивания в процессе проектирования. Также приведены результаты вычислений в пользу многокритериальной оптимизации.

В статье [9] на примере рассматривается уравнивание нивелирной сети методом наименьших квадратов и многокритериальной оптимизации с поиском лучших весов. Новый метод в основном даёт лучший результат.

В работе [10] рассматривается многокритериальная оптимизация для нуль-свободных геодезических сетей (в которых нет исходных пунктов).

Исследователями в [11] предлагалось использовать один и тот же нелинейный алгоритм Ньютона, основанный на применении матрицы Гессе, для уравнивания свободных, несвободных и нуль-свободных геодезических сетей при следующих показателях степени: $1{,}5 \le n \le 1{,}99$; $2{,}01 \le n \le 3{,}0$, за исключением $n = 2{,}0$, означающий обработку по методу наименьших квадратов (для сетей без исходных пунктов). Полученные результаты уравнивания нуль-свободных сетей сравнивались с вариационным методом регуляризации, с методом, основанным на применении псевдообратной матрицы нормальных уравнений, а также с алгоритмами Lp-оценок, обобщёнными на случай регуляризованного решения.

В статье [10] приводится обобщённая многокритериальная оптимизация на случай уравнивания нуль-свободных геодезических сетей. Это значительно расширило рамки выбора показателя степени n и одновременно позволило уравнивать нуль-свободные сети.

Здесь же рассмотрен пример уравнивания сети триангуляции. Представлены результаты многокритериального уравнивания сети триангуляции с исходными пунктами 4 и 5 и свободной геодезической сети [10, табл. 3]. Также приведены поправки в измерения и ошибки положения из уравнивания после обработки нуль-свободной многокритериальной оптимизации. Результаты оценки точности нуль-свободной сети справедливо оказались завышенными по сравнению с сетью с исходными пунктами.

Если выполнить оценку точности свободной триангуляции с исходными пунктами 4 и 5, то при $n = 2$ мы получим M_i, большие по сравнению с многокритериальным методом, поскольку n_i отыскивались под условием минимума ошибки положения.

Далее выполнено одностепенное уравнивание той же нуль-свободной геодезической сети при $n = 2{,}1$. При этом M_i оказались меньшими в многокритериальной нуль-свободной сети.

Был сделан вывод, что поиск степеней n_i достаточно выполнить один раз для свободной геодезической сети, опирающейся на два исходных пункта и с последующим переходом к нуль-свободной сети по методике, изложенной в [10]. Здесь же были повторены все предыдущие вычисления для нового примера (сеть триангуляции с тремя исходными и тремя определяемыми пунктами). Результаты счёта показали, что для нуль-свободного уравнивания достаточно выполнить уравнивание свободной сети и получить координаты нуль-свободной геодезической сети по методике, описанной в статье. Оказалось, что при уравнивании триангуляции программой многокритериального уравнивания пользоваться было не надо.

Исследования показали, что этой программой необходимо пользоваться для сетей трилатерации и линейно-угловых сетей, взяв начальные координаты методом трансформирования.

В статье [12] предлагается использование метода многокритериальной оптимизации для обработки результатов повторных нивелирных измерений (эпох) при определении осадок сооружений.

Если предположить, что из двух эпох наблюдения нам известны уравненные отметки пунктов, то их разность характеризует осадку сооружений. Уравнивание выполняется как с применением исходных пунктов, так и без них (нуль-свободная геодезическая сеть) До недавнего времени уравнивали нуль-свободную сеть, используя превышения, выполненные в каждой эпохе. Более современный подход заключается в том, что за измеренные величины берут не превышения, а разности превышений между эпохами [12].

В статье [13] рассматривается случай многокритериальной оптимизации, когда при минимизации используются две целевые функции:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i \left| L_i(X) \right|^{n_i} ; \tag{8}$$

$$\Phi_2(X) = \min(\max M) . \tag{9}$$

Взято шесть тестовых примеров (триангуляция – 3, трилатерация – 2 и линейно-угловая сеть). Приведены результаты обработки примеров по МНК, методом релаксации многокритериальной оптимизации с поиском n_i с шагом $\delta_i = 0{,}1$, методом релаксации многокритериальной оптимизации с поиском n_i с шагом $\delta_i = 0{,}25$ и $\delta_i = 0{,}025$, методом многокритериальной оптимизации с использованием способа Якоби, методом многокритериальной оптимизации с использованием способа Коши.

В заключении отмечено, что предпочтение стоит отдать методу релаксации как наиболее надёжному при решении задачи многокритериальной оптимизации.

Названные выше методы использовались только для поиска n_i, а оценка точности выполнялась путём численного вычисления матрицы F способом, опубликованным в [2].

В статье [14] сравниваются результаты оптимизации на примерах триангуляции и линейно-угловой сети при их уравнивании по углам и направлениям. В обоих случаях $L(X)$ вычисляется для углов, но во втором варианте берутся углы, замыкающие горизонт, что близко к уравниванию по направлениям.

Для уравнивания используются две целевые функции (8) и (9), объединённые тем, что n_i в первой из них отыскивается под условием (9), в котором M – ошибка положения определяемого пункта.

По данным сравнения видно, что ошибки при уравнивании по углам больше, чем при уравнивании по направлениям примерно в 2 раза, а многокритериальная оптимизация дала улучшение в обоих случаях в 1,2 раза.

В статье [15] рассматривается проблема уравнивания методом многокритериальной оптимизации под условием минимума ошибки определения площади. Применяются целевые функции:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i \left| L_i(X) \right|^{n_i} ; \tag{10}$$

$$\Phi_2(X) = \min(m_S) , \tag{11}$$

где m_S – средняя квадратическая ошибка определения только одной площади на весь объект.

Заключение. Взято шесть тестовых примеров (триангуляция – 3, трилатерация – 2 и линейно-угловая сеть). Во всех примерах площадь S бралась на границах между определяемыми пунктами. В процессе многокритериальной оптимизации под условием (11) изменились не только значения ошибок пунктов, но и координаты, по которым вычислялись площади. По данным сравнения выяснилось, что в большинстве случаев минимизация m_S приводит к возрастанию ошибок M.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мицкевич, В.И. Применение метода релаксации при многокритериальном уравнивании и оценке точности геодезических сетей / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 1999. – 4 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99, № 680 – гд.

2. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 1999. – 5 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99, № 681 – гд.
3. Скорик, О.Г. Оценка точности функций измеренных и уравненных величин при обработке геодезических сетей методами одно- и многокритериальной оптимизации / О.Г. Скорик, В.Г. Стержанов, С.Г. Шнитко;/ Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2000. – 10 с. – Деп. В ОНТИ ЦНИИКАиК 25.09.2000, № 713 – гд. 2000.
4. Скорик, О.Г. Выбор показателей степени в целевой функции для параметрических уравнений под условием минимума ошибок положения пунктов / О.Г. Скорик, В.Г. Стержанов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2000. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.09.2000, № 714 – гд. 00.
5. Левданский, П.М. Одностепенная многокритериальная оптимизация GPS-измерений под условием минимакса / П.М. Левданский, В.И. Мицкевич, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – 2 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.02, № 769 – гд. 02 деп.
6. Гармаза, О.Е. К вопросу многокритериального уравнивания нивелирных сетей / О.Е. Гармаза [и др.]; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.02, № 774 – гд. 02 деп.
7. Мицкевич, В.И. Особенности уравнительных вычислений по методу многокритериальной оптимизации / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.02, №776 – гд. 02 деп.
8. Мицкевич, В.И. Применение многокритериальной оптимизации для поиска оптимальных весов результатов измерений / В.И. Мицкевич [и др.]; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – 4 с. Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.05.02, № 777 – гд. 02 деп.
9. Мицкевич, В.И. Многокритериальная оптимизация нивелирных сетей традиционными и нетрадиционными методами / В.И. Мицкевич [и др.]; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – 4 с. Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.02, № 778 – гд. 02 деп.
10. Левданский, П.М. Многокритериальное уравнивание нуль-свободных плановых геодезических сетей / П.М. Левданский, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов // Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – 8 с. Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.11.02, № 783 – гд. 02 деп.
11. Мицкевич, В.И. Сравнение методик уравнивания геодезических сетей без исходных пунктов / В.И. Мицкевич, В.Г. Стержанов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2000. – 10 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК, 25.09.2000, №723 – гд. 00.
12. Гармаза, В.М. Многокритериальная оптимизация осадок сооружения / В.М. Гармаза, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – 6 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.11.02, № 793 – гд. 02 деп.
13. Мицкевич, В.И. Сравнение результатов минимизации двух целевых функций при многокритериальной оптимизации плановых геодезических сетей / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2003. – 6 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 1.09.03, № 801 – гд. 03 деп.
14. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание плановых геодезических сетей по углам и направлениям / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2003. – 3 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 1.09.03, № 802 – гд. 03 деп.
15. Мицкевич, В.И. Многокритериальная оптимизация под условием минимума ошибки определения площади / В.И. Мицкевич [и др.]; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2003. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 1.09.03, № 803 – гд. 03 деп.

Поступила 16.10.2008