УДК 528.063

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ РЕКУРРЕНТНЫМ МЕТОДОМ Lp-ОЦЕНОК

А.А. СКРИПЛЁНОК
(Полоцкий государственный университет)

Рекуррентное уравнивание широко используется при проектировании и при математической обработке различных геодезических сетей. Статья посвящена разработке эффективных рекуррентных способов без составления нормальных уравнений высотных и плановых сетей. Благодаря исследованиям Ю.И. Маркузе рекуррентный способ уравнивания применяется везде, где он оказывается полезным, например, при обработке измерений по алгоритму Lp-оценок. Все рассмотренные в статье методики реализованы в программах для ПК. В первой ее части рекуррентный способ используется при частичном обнулении весов результатов измерений, что позволило автоматизировать выбор начальной весовой матрицы; во второй части обсуждается применение исследуемого способа при оптимальном проектировании весов результатов измерений; в третьей части рекуррентный способ распространен на случаи применения метода Lp-оценок. Приведенные формулы имеют большое значение при математической обработке наземных и спутниковых геодезических измерений.

Введение. При построении геодезических сетей, в которых используются избыточные результаты измерений, всегда возникает задача уравнивания. Её решение преследует основную цель – получение наилучших неизвестных параметров, оценить их точность и точность характеристики функций измеренных и уравниваемых величин. Все эти вопросы решаются с позиций рекуррентного способа уравнивания.

1. Применение рекуррентного способа уравнивания при исключении из обработки результатов измерений, путём частичного обнуления их весов

Рекуррентное уравнивание геодезических сетей, основанное на последовательном учете некоррелированных измерений с уравнением поправок:

$$\nu_i = a_i \delta x_i + l_i , \tag{1.1}$$

позволяет решать многие задачи уравнительных вычислений с применением формул:

$$Q_i = Q_{i-1} - \left(1/q_i\right) \mathrm{Z}_i^{\mathrm{T}} \mathrm{Z}_i ; \tag{1.2}$$

$$\mathrm{Z}_i^{\mathrm{T}} = Q_{i-1} a_i^{\mathrm{T}} ; \tag{1.3}$$

$$q_i = 1/\mathrm{P}_i + a_i \mathrm{Z}_i^{\mathrm{T}} , \tag{1.4}$$

где Q_{i-1} – при i = 1 равняется Q_0 – начальная обратная матрица, выбор которой впервые получен Ю.И. Маркузе [1]; $\mathrm{P}_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$ – вес i-го измерения; a_i – коэффициент параметрических уравнений поправок i-го измерения.

Как отмечалось в [2], для исключения какого-либо избыточного измерения используется формула:

$$q_i = -1/\mathrm{P}_i + a_i \mathrm{Z}_i^{\mathrm{T}} , \tag{1.5}$$

что соответствует обнулению веса i-го измерения.

В общем случае, когда в результате изменения веса P_i на величину $\Delta\mathrm{P}_i$, вместо (1.4) имеем

$$q_i = 1/\Delta\mathrm{P}_i + a_i \mathrm{Z}_i^{\mathrm{T}} , \tag{1.6}$$

которая является более общей, приводящей к формуле (1.5), когда $\Delta\mathrm{P}_i = -\mathrm{P}_i$.

Отметим, что при $\Delta\mathrm{P}_i = -\mathrm{P}_i$ происходит исключение только избыточных измерений, так как при использовании выражения (1.2) для необходимого измерения получим деление на ноль. В связи с этим мы предлагаем выполнить частичное обнуление веса при исключении измерения с использованием равенства:

$$\Delta\mathrm{P}_i = \varepsilon - \mathrm{P}_i , \tag{1.7}$$

где ε – малая величина, выбираемая из такого расчета, чтобы равенство

$$\frac{1}{\mathrm{P}_i} + a_i \mathrm{Z}_i^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mathrm{P}_i - \varepsilon} - a_i \mathrm{Z}_i^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{P}_i} - \frac{1}{\mathrm{P}_i - \varepsilon} \approx \frac{-\varepsilon}{\mathrm{P}_i^2} = \frac{1}{10^{\frac{m}{2}}} , \tag{1.8}$$

не было равно нулю при $\mathrm{P} \geq 1$, где m – количество знаков в разрядной сетке ЭВМ.

Приведем **пример:**

Пусть $m = 16$, а Р = 10^4, тогда $\varepsilon = 1$ или $m = 16$, Р = 1, тогда $\varepsilon = 10^{-8}$.

С применением равенства (1.8) можно исключать не только избыточные, но и необходимые измерения, и тем самым получить оптимальное значение матрицы Q_0. Независимо от приведенных выше примеров нами получено

$$Q_0^{опт.} = \frac{Q}{\varepsilon}, \tag{1.9}$$

где Q – обратная матрица, равная $(A^{T}PA)^{-1}$.

В заключение отметим, что предложенная формула (1.6) имеет практическое значение не только при проектировании геодезических сетей, но также позволяет получать $Q_0^{опт.}$.

2. Поиск оптимальных весов результатов измерений с применением рекуррентного способа уравнивания

Рекуррентное уравнивание геодезических сетей, основанное на последовательном учете некоррелированных измерений с уравнением поправок

$$\nu_i = a_i \delta x_i + l_i, \tag{2.1}$$

позволяет решать многие задачи уравнительных вычислений с применением формул:

$$Q_i = Q_{i-1} - \left(1/q_i\right) Z_i^{T} Z_i, \tag{2.2}$$

$$Z_i^{T} = Q_{i-1} a_i^{T}, \tag{2.3}$$

$$q_i = 1/\mathrm{P}_i + a_i Z_i^{T}, \tag{2.4}$$

где Q_{i-1} – при $i = 1$ равняется Q_0 – начальная обратная матрица, выбор которой впервые получен Ю.И. Маркузе [1]; $\mathrm{P}_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$ – вес i-го измерения; a_i – коэффициент параметрических уравнений поправок i-го измерения.

Вместо (2.4) можно использовать следующую формулу:

$$q_i = 1/\Delta\mathrm{P}_i + a_i Z_i^{T}, \tag{2.5}$$

которая является более общей, так как позволяет рекуррентным способом получить

$$\Delta Q = Q_i - Q_{i-1} \quad \text{при } \mathrm{P}_i = \mathrm{P}_i + \Delta\mathrm{P}_i,$$

где $\Delta\mathrm{P}_i$ – приращение к весу результата i-го измерения. Например, при использовании в [6, 7]

$$\mathrm{P}_{\mathrm{K},i} = \left|\mathrm{P}_i + \Delta\mathrm{P}_i\right| = \left|\mathrm{P}_i + \frac{\mathrm{P}_i}{5}\mathrm{K}_i\right|, \tag{2.6}$$

где $\mathrm{K}_i(20 \le \mathrm{K} \le 20)$ – коэффициент для каждого измерения, отыскиваемый методом проб и ошибок (для значений K_i, $\mathrm{K}_i + 1$, $\mathrm{K}_i - 1$) под условием двух целевых функций:

$$\Phi_1(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}_{\mathrm{K},i} L_i^2(\mathrm{X}), \tag{2.7}$$

$$\Phi_2(\mathrm{X}) = \sum_{j=1}^{t} \left|\mathrm{M}_j - \mathrm{M}_{доп.}\right|, \tag{2.8}$$

где M_j – ошибка положения определяемого пункта; $\mathrm{M}_{доп.}$ – ее допустимая величина; $L(\mathrm{X}) = \varphi(X) - \mathrm{T}$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения; t – количество определяемых пунктов.

Поскольку отыскиваются веса измерений в рамках метода наименьших квадратов (МНК) при уравнивании, когда используется равенство

$$\delta\mathrm{X} = -\left(\mathrm{A}^{T}\mathrm{P}_{\mathrm{K}}\mathrm{A}\right)^{-1} \mathrm{A}^{T}\mathrm{P}_{\mathrm{K}} L, \tag{2.9}$$

то вместо (2.7) можно записать

$$\Phi_1(\mathrm{X}) = V^{T}\mathrm{P}_{\mathrm{K}} V, \tag{2.10}$$

где V – вектор поправок в результаты измерений.

Величина M_j используемая в (2.8), вычисляется по формулам:

$$M = \mu_j \sqrt{Q_{tt} + Q_{t+1,t+1}}\,, \tag{2.11}$$

$$\mu_j = \sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}} \mathrm{P}_{\mathrm{K}} V}{r}}\,. \tag{2.12}$$

При этом

$$Q_{tt} = (Q_{tt})_{i-1} + \Delta Q_{tt}\,; \tag{2.13}$$

$$\Delta Q_{tt} = -\left(1/q_i \right) Z_i^{\mathrm{T}} Z_i \tag{2.14}$$

с трехкратным применением формул (2.5) и (2.6) для K_i, $K_i + 1$, и $K_i - 1$.

Формулы (2.8) – (2.14) применимы при проектировании геодезических сетей, когда вместо (2.11) используют

$$M = \sigma_0 \sqrt{Q_{tt} + Q_{t+1,t+1}}\,. \tag{2.15}$$

3. Рекуррентное уравнивание и оценка точности геодезических сетей методом Lp-оценок

Рекуррентное уравнивание геодезических сетей широко используется в практике математической обработки результатов геодезических измерений. В каких бы случаях рекуррентный способ не применялся, он везде приводит к разработке эффективных и надежных алгоритмов.

Метод Lp-оценок, разработанный в [6] и опубликованный в статьях [7, 8], нашел применение как универсальный способ робастного уравнивания в линейном и нелинейном случаях обработки измерений. Оценки, получаемые этим методом, совпадают с оценками метода максимального правдоподобия [9]. Вопрос реализации метода Lp-оценок на основе рекуррентного способа уравнивания является актуальным и легко разрешим, поскольку в формуле [3]

$$q_i = 1/\mathrm{P}_i + a_i Z_i^{\mathrm{T}} \tag{3.1}$$

необходимо заменить вес P_i на [10]

$$c_i = p_i \left| L_i\left(X \right) \right|^{n-2}, \tag{3.2}$$

где

$$L(X) = \varphi\left(X \right) - T \tag{3.3}$$

есть свободный член линейного параметрического уравнения; n – показатель степени.

Обозначая через $G = A^{\mathrm{T}}CA$ информационную матрицу Фишера, на основе рекуррентного способа запишем [3]:

$$Z_i^{\mathrm{T}} = G_{i-1}^{-1} a_i^{\mathrm{T}}\,;$$

$$G_i^{-1} = G_{i-1}^{-1} - \left(1/q_i \right) Z_i^T Z_i\,, \tag{3.4}$$

где a_i – коэффициент параметрического уравнения поправок для i-го измерения.

Процесс уравнивания осуществляется итеративным путем

$$X_{j+1} = X_j + \delta X_{j+1}\,, \tag{3.5}$$

до тех пор пока

$$\left| \delta x_{max} \right|_{j+1} < \left| \delta x_{\max} \right|_j\,, \tag{3.6}$$

при этом в начальном приближении X_1 вычисляют при $n = 2.0$.

Оценку точности функций измеренных и уравненных величин в методе Lp-оценок можно выполнить по формулам [6, 10]:

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}\,;$$

$$\frac{1}{P_F} = fQf^T\,;$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}}\,;$$

$$P = \left(\frac{1}{\sigma} \right)^n;$$

$$Q = G^{-1}A^{T}DAG^{-1}; \tag{3.7}$$

$$D = P\left|V\right|^{2(n-2)},$$

$$V = \varphi\left(\hat{X}\right) - T,$$

где G^{-1} – обратная матрица, получаемая рекуррентным способом по формулам (3.1) – (3.4).

Матрицу обратных весов можно получить по-другому [10]:

$$Q = FP^{-1}F^{T}; \tag{3.8}$$

$$F = G^{-1}A^{T}C, \tag{3.9}$$

что легко проверить подстановкой F в (3.8) и сравнить с (3.7).

В таблице приведены результаты оценки точности геодезических сетей при разных n.

n	μ	M_1	M_2
1.01	2.298	0.1857	0.1731
	2.298	0.1542	0.1303
	2.299	0.1914	0.1797
	2.299	0.9128	1.1702
1.1	2.252	0.1818	0.1680
	2.252	0.5830	0.4371
	2.254	0.1718	0.1616
	2.254	0.2851	0.2905
1.2	2.185	0.1237	0.1325
	2.185	0.4403	0.4709
	2.186	0.1202	0.1310
	2.186	0.1261	0.1442
1.3	2.128	0.1038	0.1248
	2.128	0.1166	0.1010
	2.128	0.1038	0.1248
	2.128	0.1084	0.1238
1.4	2.078	0.0957	0.1219
	2.078	0.0850	0.1050
	2.078	0.0957	0.1218
	2.078	0.0987	0.1210
1.5	2.033	0.0916	0.1198
	2.033	0.0924	0.1212
	2.033	0.0915	0.1197
	2.033	0.0942	0.1174
1.6	1.990	0.0892	0.1179
	1.990	0.0956	0.1285
	1.990	0.0892	0.1179
	1.990	0.0922	0.1153
1.7	1.950	0.0896	0.1198
	1.950	0.0887	0.1177
	1.950	0.0896	0.1198
	1.950	0.0990	0.1293
1.8	1.911	0.0829	0.1072
	1.911	0.0834	0.1082
	1.911	0.0829	0.1072
	1.911	0.0795	0.0909
1.9	1.874	0.0809	0.1027
	1.874	0.0809	0.1029
	1.874	0.0809	0.1027
	1.874	0.0802	0.0972
2.0	1.840	0.0805	0.1018
	1.840	0.0805	0.1018
	1.840	0.0805	0.1018
	1.840	0.0805	0.1018
3.0	1.570	0.0989	0.1327
	1.570	0.0991	0.1335
	1.570	0.0989	0.1327
	1.570	0.0994	0.1347

Примечание. Пример из [11, с. 160] – триангуляция.

Для каждого *n* даны μ и ошибка положения М в следующих четырех строках:

строка 1 – нелинейное уравнивание и линейный метод оценки точности в методе Lp-оценок;

строка 2 – нелинейный метод уравнивания и нелинейная оценка точности с применением формулы [6]:

$$F = \frac{\hat{X}_{\delta} - \hat{X}}{\delta}, \tag{3.10}$$

строка 3 – рекуррентное уравнивание по (3.5) и линейная оценка точности

$$F = \left(A^T C A\right)^{-1} A^T C \tag{3.11}$$

без использования матрицы G^{-1};

строка 4 – рекуррентное уравнивание по (3.5) и линейная оценка точности с использованием формул (3.8) и (3.9) с применением матрицы G^{-1}.

По данным таблицы на основе сравнения при одинаковых *n* можно сделать следующие **выводы:**

1) первый метод (смотри при разных *n* строку 1) является надежным при любых *n*;
2) оценка точности во втором методе (строка 2) может выполняться на интервале $1.6 \le n < 3.0$;
3) третий метод (строка 3 для разных *n*) по своим характеристикам не уступает первому методу;
4) в четвертом методе (рекуррентный способ) оценка точности может выполняться на интервале $1.6 \le n < 3.0$, так же как и во втором методе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркузе, Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1982. – 191 с.
2. Маркузе, Ю.И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1989. – 248 с.
3. Маркузе, Ю.И. Основы уравнительных вычислений: учеб. пособие для вузов / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1990. – 240 с.
4. Многокритериальная оптимизация нивелирных сетей традиционными и нетрадиционными методами / В.И. Мицкевич [и др.]. – Новополоцк, 2002. – 4 с. – Деп. в ЦНИИГАиК 17.09.2002, № 778 – гд. 2002.
5. Мицкевич, В.И. Определение оптимального плана измерений при заданной точности искомых параметров сети многокритериальным методом / В.И. Мицкевич, А.А. Скрипленок, В.В. Ялтыхов. – Новополоцк, 2003. – 4 с. – Деп. в ЦНИИГАиК 1.09.2003, № 807 – гд. 2003.
6. Мещеряков, Г.А. Об уравнивании геодезических измерений с учетом закона распределения ошибок / Г.А. Мещеряков, С.Д. Волжанин, В.В. Киричук // Геодезия и картография. – 1984. – № 2. – С. 9 – 11.
7. Мицкевич, В.И. Уравнивание и оценка точности геодезических засечек под различными критериями оптимальности решения / В.И. Мицкевич, В.В. Ялтыхов // Геодезия и картография. – 1994. – № 7. – С. 14 – 16.
8. Волжанин, С.Д. Уравнивание геодезических сетей методом Lp-оценок / С.Д. Волжанин // Геодезия, картография и аэросъемка. – Львов, 1984. – № 40. – С. 20 – 23.
9. Маркузе, Ю.И. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей / Ю.И. Маркузе, Е.Г. Бойко, В.В. Голубев. – М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 1994. – 431 с.
10. Мицкевич, В.И. Уравнивание и оценка точности геодезических сетей методом Ньютона / В.И. Мицкевич, В.В. Ялтыхов // Полоц. гос. ун-т. – 1999. – 6 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 22.03.1999. – № 658 – гд. 99 деп.
11. Рабинович, Б.Н. Практикум по высшей геодезии / Б.Н. Рабинович. – М.: Геодезиздат, 1961. – 339 с.

Поступила 16.10.2008