ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.063

ПОИСК КОЭФФИЦИЕНТОВ КОРРЕЛЯЦИИ МЕЖДУ ИЗМЕРЕНИЯМИ ПОСЛЕ ИХ УРАВНИВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ О ПЕРЕНОСЕ ОШИБОК

канд. техн. наук, доц. А.М. ДЕГТЯРЁВ, д-р техн. наук, проф. В.И. МИЦКЕВИЧ,
канд. техн. наук, доц. И.П. ШЕВЕЛЕВ
(Полоцкий государственный университет)

Фундаментальная теорема о переносе ошибок широко используется в уравнительных вычислениях, выполняемых с помощью параметрического способа уравнивания. В первую очередь это касается вопросов оценки точности, применяемой при математической обработке результатов геодезических измерений. Обычно здесь использовалась расширенная псевдообратная матрица, имеющая стандартное обозначение F. Эту матрицу можно находить как численно, используя разложение функции f_i по формуле Тейлора с точностью до членов первого порядка, так и аналитически. В статье хотя и используется фундаментальная теорема, согласно которой $K_u = FK_YF^T$ осуществляется переход от корреляционной матрицы K_Y к матрице K_u, однако вместо F применяется идемпотентная матрица D = AF с последующим вычислением корреляционной матрицы $K_u = DK_YD^T$ и определением по K_u корреляционной матрицы K_r с единичными элементами на диагонали и коэффициентами корреляции вне диагонали.

Введение. Как отмечалось в [1, 2], в практике обработки измерений часто приходится составлять линейные комбинации из компонент Y_1, Y_2, …, Y_N случайного вектора Y

$$u_i = d_{i1}Y_1 + d_{i2}Y_2 + \ldots + d_{iN}Y_N,\ \ i = 1, 2, \ldots, t, \tag{1}$$

где d – постоянные величины; N – количество результатов измерений; *t* – число параметров.

Вводя вектор $u = \left(u_1, u_2, \ldots, u_t\right)^T$ и матрицу $D_{t\times N}$, зависимость (1) можно записать в виде:

$$u = DY, \tag{2}$$

где *u* – линейная векторная функция случайного вектора Y.

Теорема. Вектор u = DY, есть t-мерный случайный вектор с математическим ожиданием

$$M_u = DZ \tag{3}$$

и корреляционной матрицей

$$K_u = D\,K_Y\,D^T, \tag{4}$$

где в (3) Z – вектор-столбец математических ожиданий компонент случайного вектора Y; K_Y – корреляционная матрица случайного вектора Y.

Результаты теоремы можно приближенно распространить и на случай нелинейных функций

$$u_i = f_i\left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\right),\ \ i = 1, 2, \ldots, t, \tag{5}$$

если в окрестности вектора Y = Z уравнения (5) допускают линеаризацию:

$$u_i \approx f_i\left(z_1, z_2, \ldots, z_N\right) + \sum_{j=1}^{N}\left\{\left(Y_j - z_j\right)\left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right|_Z\right\},$$

а

$$D_{t\times N} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial Y_1}\right|_Z & \left.\frac{\partial f_1}{\partial Y_2}\right|_Z & \ldots & \left.\frac{\partial f_1}{\partial Y_N}\right|_Z \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left.\frac{\partial f_t}{\partial Y_1}\right|_Z & \left.\frac{\partial f_t}{\partial Y_2}\right|_Z & \ldots & \left.\frac{\partial f_t}{\partial Y_N}\right|_Z \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Основная часть. Для вычисления коэффициентов корреляции после уравнивания воспользуемся изложенной выше теоремой и формулами (4), (6), полагая

$$M_u = \begin{pmatrix} f_1(z_1, z_2, \ldots z_N) \\ f_2(z_1, z_2, \ldots z_N) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_N(z_1, z_2, \ldots z_N) \end{pmatrix},$$

где N – количество результатов измерений. Решение поставленной задачи выполним для одного треугольника триангуляции произвольной формы с углами β_K. Тогда для уравненных углов имеем

$$M_u = \begin{pmatrix} \beta_1 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180)/3 \\ \beta_2 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180)/3 \\ \beta_3 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180)/3 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

и после дифференцирования (7) получим Якобиан (6) в виде:

$$D_{N\times N} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что матрица D = D · D · … · D является идемпотентной и согласно (4) при $K_Y = E$ найдем

$$K_r = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$

с коэффициентами корреляции r после уравнивания, равными –0,5.

Такую же матрицу (8) получим для другого треугольника нивелирования:

$$M_u = \begin{pmatrix} h_1 - (h_1 + h_2 + h_3)/3 \\ h_2 - (h_1 + h_2 + h_3)/3 \\ h_3 - (h_1 + h_2 + h_3)/3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Нетрудно доказать, что при решении задачи о нахождении коэффициентов корреляции матрица D будет такой:

$$D_{N\times N} = A\left(A^T K_Y^{-1} A\right)^{-1} A^T K_Y^{-1} = AF. \tag{10}$$

где $A_{N\times t}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок.

Например, для произвольного треугольника триангуляции

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2{,}76 & -13{,}06 \\ 11{,}10 & -2{,}15 \\ -13{,}86 & 15{,}21 \end{pmatrix}$$

и для нивелирного треугольника

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

мы получим из-за одинаковых формул (7) и (9) одну и ту же матрицу D, показанную в (8), используя равенство (10).

Отметим, что матрица D при диагональной K_Y будет симметричной, а при недиагональной K_Y – несимметричной.

Так как D идемпотентная матрица, то

$$K_u = DK_Y D^T = DK_Y = K_Y D^T$$

и

$$K_u = AQA^T,$$

где

$$Q = (A^T K_Y^{-1} A)^{-1}.$$

Классический необобщённый метод МНК, как правило, реализуется в большинстве программ, включая алгоритмы CREDO-DIALOG, в матричной форме. Этот способ программируется с использованием следующих формул:

$$V_{N\times 1} = A_{N\times t}\delta X_{t\times 1} + L_{N\times 1}, \tag{11}$$

где используют векторы и матрицы:

$$V_{N\times 1} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}; \qquad \delta X_{t\times 1} = \begin{pmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \\ \vdots \\ \delta X_t \end{pmatrix}; \qquad L_{N\times 1} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_N \end{pmatrix};$$

$$A_{N\times t} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{Nt} \end{pmatrix}; \qquad P_{N\times N} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_N \end{pmatrix}.$$

Здесь $P_{N\times N}$ – диагональная матрица весов, некоррелированных измерений, используемая при отыскании неизвестных $\delta X_{t\times 1}$ под условием:

$$\Phi_1(\hat{X}) = \sum_{i=1}^{N} P_i V_i^2 = \min. \tag{12}$$

Поскольку число неизвестных $\delta X_{t\times 1}$ меньше количества уравнений N, то система (11) называется переопределённой и для получения однозначного решения под условием МНК обычно переходят к нормальным уравнениям, которые можно получить, умножая слева (11) на $A^T P$:

$$A_{t\times N}^T P_{N\times N} V_{N\times 1} = A_{t\times N}^T P_{N\times N} A_{N\times t}\delta X_{t\times 1} + A_{t\times N}^T P_{N\times N} L_{N\times 1},$$

где в левой части получаем градиент целевой функции $\Phi(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i L_i^2(X)$, а он в точке минимума равен нулю.

Обозначим $R = A^T PA$, $B = A^T PL$ соответственно через матрицу коэффициентов нормальных уравнений R и вектор свободных членов нормальных уравнений B. С учётом обозначений имеем

$$R_{t\times t}\delta X_{t\times 1} + B_{t\times 1} = 0, \tag{13}$$

откуда

$$\delta X_{t\times 1} = -Q_{t\times t} B_{t\times 1}, \tag{14}$$

где $Q_{t\times t} = R_{t\times t}^{-1}$ – обратная весовая матрица, используемая не только при уравнивании, но и при оценке точности функции.

С применением расширенной псевдообратной матрицы

$$F_{t\times N} = (A_{t\times N}^T P_{N\times N} A_{N\times t})^{-1} A_{t\times N}^T P_{N\times N} \tag{15}$$

формула (4) примет вид:

$$\delta X_{t\times 1} = -F_{t\times N} L_{N\times 1}\,. \tag{16}$$

В обобщённом МНК [2] вместо P используется корреляционная матрица измерений равная

$$\left(K_n\right)_{N\times N} = P_n^{-\frac{1}{2}} K_r P_n^{-\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

где $\left(K_r\right)_{N\times N}$ – корреляционная матрица с единицами по диагонали и коэффициентами корреляции вне её; n – показатель степени, равный 2 для МНК и 1 для МНМ (метода наименьших модулей).

Таким образом, в обобщённом МНК вместо (15) будем иметь

$$F = (A^T K_n^{-1} A)^{-1} A^T K_n^{-1}\,. \tag{18}$$

Для корреляционной матрицы после уравнивания $(K_u)_{N\times N}$ получили следующие формулы:

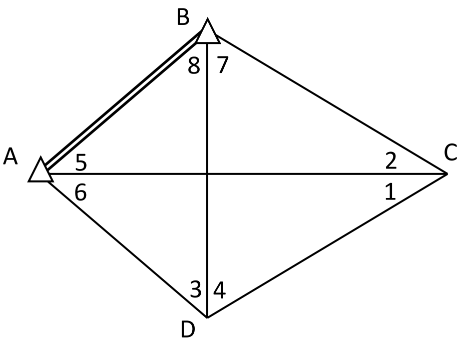
$$D_{N\times N} = A_{N\times t} F_{t\times N}\,; \tag{19}$$

$$(K_u)_{N\times N} = DK_n = AQA^T\,, \tag{20}$$

где D – идемпотентная матрица ($D = D\cdot D\cdot \ldots \cdot D$); Q – обратная весовая матрица

Числовой пример

Рассмотрим геодезический четырёхугольник (рисунок)



Геодезический четырёхугольник

Номер угла	Измеренные углы
1	50° 01′ 55″
2	41° 41′ 41″
3	26° 57′ 40″
4	27° 14′ 40″
5	37° 58′ 22″
6	75° 45′ 05″
7	61° 01′ 37″
8	39° 18′ 30″

Координаты исходных пунктов $x_A = 1100.00$ м; $y_A = 100.00$ м; $x_B = 1650.00$ м; $y_B = 640.00$ м.

Предварительные координаты определяемых пунктов: $x_C = 1230.00$ м; $y_C = 1230.00$ м; $x_D = 100.00$ м; $y_D = 500.00$ м.

Уравнивание выполним по направлениям, используя матрицу $A_{8\times 4}$, составленную для восьми углов:

$$A = \begin{bmatrix} -98.22 & -104.03 & -81.15 & 127.84 \\ -60.14 & -186.19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 83.04 & 45.81 \\ -81.15 & 127.84 & 69.22 & 4.16 \\ -179.37 & 23.81 & 0 & 0 \\ 179.37 & -23.81 & -71.12 & -177.81 \\ 239.51 & 162.38 & 11.92 & -132.0 \\ 0 & 0 & -11.92 & 132.0 \end{bmatrix};$$

При $P = E$ корреляционная матрица K_r будет такой:

$$K_n = K_r = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ & & sim & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & -0.5 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Корреляционные матрицы для уравнивания углов геодезического четырёхугольника при $P = K = E$ следующие:

$$K_u = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.1 & -0.5 & -0.4 & 0.0 & -0.1 & -0.4 & 0.5 \\ & 1.0 & 0.3 & -0.3 & -0.1 & 0.1 & -0.5 & -0.3 \\ & & 1.0 & 0.2 & -0.5 & -0.6 & 0.0 & 0.1 \\ & & & 1.0 & 0.7 & -0.6 & 0.1 & -0.2 \\ & & & & 1.0 & -0.1 & -0.4 & -0.4 \\ & & sim & & & 1.0 & 0.4 & -0.4 \\ & & & & & & 1.0 & 0.0 \\ & & & & & & & 1.0 \end{pmatrix},$$

С использованием матрицы K_n для обобщённого МНК получим

$$K_u = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.5 & -0.7 & -0.4 & 0.0 & 0.1 & -0.1 & 0.6 \\ & 1.0 & 0.4 & -0.1 & 0.1 & 0.1 & -0.5 & -0.6 \\ & & 1.0 & 0.2 & -0.4 & -0.6 & 0.0 & 0.0 \\ & & & 1.0 & 0.5 & -0.8 & 0.0 & -0.3 \\ & & & & 1.0 & 0.2 & -0.5 & -0.7 \\ & & sim & & & 1.0 & 0.1 & -0.5 \\ & & & & & & 1.0 & 0.4 \\ & & & & & & & 1.0 \end{pmatrix}$$

Сравнивая матрицы K_u, полученные для углов геодезического четырёхугольника, можно сказать, что теснота корреляционных связей выше при уравнивании геодезического четырёхугольника по направлениям (второй случай матрицы K_u), чем по углам.

В **заключение** отметим, что выполненные в статье теоретические разработки позволяют универсальным путем вычислять коэффициенты корреляции спутниковых GPS-измерений, которые обычно уравниваются спутниковым приемником на станции наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жданюк, Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений / Б.Ф. Жданюк. – М.: Сов. радио, 1978. – 384 с.
2. Маркузе, Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1982. – 191 с.

Поступила 14.04.2008