

МЕХАНИКА

УДК 539.31: 534.1

О РАЗВЕТВЛЕНЧЕСКОМ КРИТЕРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается возможность единой математической формулировки задач упругопластической потери устойчивости для двух подходов: Энгессера – Кармана и Шенли. Рассуждения проводятся для модели стержня и фермы Мизеса. Процесс деформирования систем за пределом упругости считается квазистатическим. Материал деформируемых элементов характеризуется билинейной диаграммой зависимости между напряжениями и деформациями. Показано, что критические нагрузки, соответствующие указанным выше подходам, определяются из единого аналитического условия – условия ветвления решений некоторой системы уравнений, характеризующих условия равновесия и отпорность стержневой системы отклонениям от исходной формы равновесия. Сделан анализ зависимости критической нагрузки от отпорности системы. Показано, что различие потери устойчивости согласно подходам Энгессера – Кармана и Шенли заключается в стационарности или нестационарности ветви кривой равновесных состояний в точке бифуркации.

Введение. При решении задач упругопластической устойчивости с использованием разветвленческого критерия известны два подхода: Энгессера – Кармана [1] и Шенли [2]. Часто считается, что указанные подходы приводят к различной постановке задач: в первом случае исследуется бифуркация форм равновесия при стационарной нагрузке ($dP = 0$); во втором – бифуркация процесса деформирования в условиях продолжающегося нагружения ($dP > 0$). Кроме того, существенным затруднением при исследовании потери упругопластической устойчивости согласно подходу Шенли является отсутствие общих аналитических признаков достижения критического состояния в условиях продолжающегося нагружения [3].

Некоторые общие положения и идеи об особенностях применения подхода Шенли к исследованию упругопластической устойчивости были высказаны в [4, 5]. Представляя нагрузку в форме степенного ряда с неопределенными коэффициентами, Л.А. Шаповаловым в работах [6, 7] показана возможность общего подхода при решении задач упругопластической потери устойчивости для стержня и кольца.

Постановка вопроса. В данной работе делается попытка единого математического подхода к решению задач упругопластической потери устойчивости стержневых систем, отличного от изложенного в [6, 7], и получения соответствующего аналитического признака. Рассуждения проводятся для модели упругопластического стержня (рис. 1).

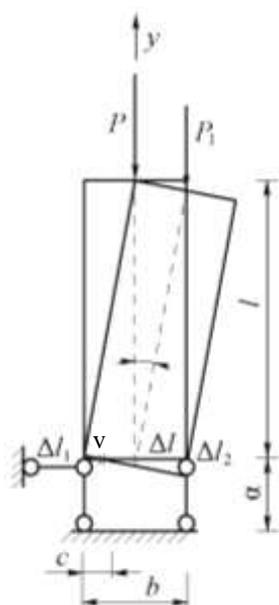


Рис. 1. Модель упругопластического стержня

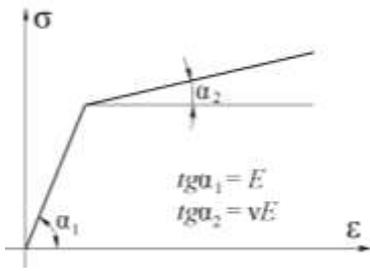
Процесс деформации за пределом упругости считается квазистатическим. Материал деформируемых элементов характеризуется билинейной диаграммой $\sigma - \epsilon$ (рис. 2).

Следуя [8], рассмотрим порядок определения критических нагрузок согласно подходу Энгессера – Кармана и Шенли. Для произвольного конечного отклоненного положения системы справедливы следующие уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_c \dots - (\Delta N_1 + \Delta N_2) \frac{b}{2} + P_1 l \sin \varphi &= 0; \\ \sum y \dots (-\Delta N_1 + \Delta N_2) - (P_1 - P) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Приращения усилий в деформируемых стержнях $\Delta N_1, \Delta N_2$ связаны с изменениями их длин соотношениями:

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= EF \frac{\Delta l_1}{a}; \\ \Delta N_2 &= \nu EF \frac{\Delta l_2}{a}. \end{aligned} \quad (2)$$

Рис. 2. Билинейная диаграмма $\sigma - \epsilon$

Для определения изменения длин стержней справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{b}{2} \operatorname{tg} \varphi - \Delta l; \\ \Delta l_2 &= \frac{b}{2} \operatorname{tg} \varphi + \Delta l. \end{aligned} \quad (3)$$

Смысл φ и Δl очевиден из рисунка 1.

При определении критической нагрузки по Энгессеру – Карману уравнения равновесия (1) составляют для смежного отклоненного положения системы в предположении неизменности нагрузки $P_1 = P$ ($dP = 0$).

С учетом соотношений (2), (3) они принимают вид:

$$\begin{aligned} \sum M_c \dots \frac{EF(1-\nu)}{2a} dl + \left[Pl - \frac{EFb^2}{4a}(1-\nu) \right] d\varphi &= 0; \\ \sum y \dots (1+\nu)dl - \frac{(1-\nu)b}{2} d\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) образуют однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно двух бифуркационных величин $d\varphi$ и dl . Из условия равенства нулю определителя системы (4) находят значение критической нагрузки $P_{кр} = P^{**}$, где $P^{**} = \frac{EFb^2}{al} \frac{\nu}{(1-\nu)}$ – приведенно-модульная нагрузка.

Для определения критической нагрузки согласно Шенли уравнения равновесия (1) составляют при малых конечных отклонениях системы с учетом приращения нагрузки $P_1 = P + \Delta P$, которые с учетом линеаризации относительно φ имеют вид:

$$\begin{aligned} \sum M_c \dots \frac{EFb(1-\nu)}{2a} \Delta l - \frac{EFb^2(1+\nu)}{4a} \varphi + (P + \Delta P)l\varphi &= 0; \\ \sum y \dots \frac{EF(1+\nu)}{a} \Delta l - \frac{EFb(1-\nu)}{2a} \varphi - \Delta P &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Неоднородную систему уравнений (5) разрешают относительно малых, но конечных величин Δl и φ . Найденные величины подставляют в условие разгрузки одного из опорных стержней в отклоненном положении

$$\frac{\varphi b}{2} \geq \Delta l, \quad (6)$$

и получают, что отклоненный процесс деформирования возможен при условии $P \geq P^*$. Следовательно,

критическая нагрузка $P_{кр} = P^*$, где $P^* = \frac{EFb^2}{al} \frac{\nu}{2}$ – касательно-модульная нагрузка.

При таком определении критической нагрузки, соответствующей концепции Шенли, затеняется математическая сущность задачи. Чтобы показать это, все дальнейшие рассуждения будем проводить в предположении бесконечной малости величин Δl , φ , ΔP .

Перепишем условие разгрузки одного из опорных стержней (6) в форме:

$$\frac{b}{2} \frac{d\varphi}{dl} \geq 1. \quad (7)$$

Ввиду переменности левой части (7) это соотношение можно записать в виде равенства:

$$\frac{b}{2} \frac{d\varphi}{dl} = k, \quad (8)$$

где k некоторый переменный коэффициент геометрической природы.

Как следует из левой части (8), коэффициент k характеризует положение центра вращения (точка ν на рисунке 1) при бесконечно малых отклонениях.

Расстояние до точки ν от левого стержня определяется по формуле:

$$c = \frac{b(k-1)}{2k}. \quad (9)$$

Рассматривая систему уравнений равновесия (2) совместно с условием (6), получим однородную систему трех линейных алгебраических уравнений относительно бифуркационных величин dl , $d\varphi$ и dP при двух неизвестных параметрах: силовом – P и геометрическом – k :

$$\frac{EF(1-\nu)b}{2a} dl - \left[Pl - \frac{EF(1+\nu)b^2}{4a} \right] d\varphi = 0; \tag{10}$$

$$\frac{EF(1+\nu)}{a} dl - \frac{EF(1-\nu)b}{2a} d\varphi - dP = 0;$$

$$kdl - \frac{b}{2} d\varphi = 0. \tag{11}$$

Дальнейшее решение задачи заключается в отыскании критических значений параметра нагрузки, при которых однородная система линейных алгебраических уравнений (10), (11) имеет нетривиальные решения. Из условия равенства нулю определителя этой системы уравнений получим выражение для критической нагрузки как функцию от k :

$$P_{кр} = \frac{EFb^2}{al} \Phi(k, \nu), \tag{12}$$

где

$$\Phi(k, \nu) = \frac{k(1+\nu) - (1-\nu)}{4k}. \tag{13}$$

Формула (12) связывает критическую нагрузку с параметром k . Безразмерная функция $\Phi(k, \nu)$ описывает отпорность системы бесконечно малым отклонениям. Следовательно, введенный параметр k следует рассматривать как геометрическую характеристику, которая наряду с физической характеристикой ν влияет на отпорность системы таким отклонениям. Из условия совместности соотношения (8) с уравнениями равновесия следует, что k может изменяться в следующем интервале $k \in [1, \infty)$. Таким образом, формула (12) определяет плотное множество критических нагрузок.

Используя второе уравнение равновесия (7), получим

$$\frac{dP}{d\varphi} = \frac{EFb}{2a} \left[\frac{(1+\nu)}{k} - (1-\nu) \right]. \tag{14}$$

Выражение (14) можно рассматривать как начальное условие задачи, определяющее стационарность или нестационарность ветви кривой равновесных состояний в точке бифуркации. На рисунке 3 приведены совмещенные графики выражений (8), (13), (14) для случая $\nu = 0,5$.

Из графиков, приведенных на рисунке 3, следует:

1. При $k = 1$, когда $c = 0$, $\frac{dP}{d\varphi} > 0$ и $P_{кр} = P_*$, происходит бифуркация процесса деформирования при наименьшем значении отпорности системы боковым отклонениям.

2. При $k = k_{**} = \frac{1+\nu}{1-\nu}$, когда $c = c_{**} = \frac{\nu}{1+\nu} b$, $\frac{dP}{d\varphi} = 0$ и $P_{кр} = P_{**}$, происходит бифуркация форм равновесия при значении отпорности системы $\Phi(k_{**}, \nu) = \frac{\nu}{1+\nu}$.

3. При всех $k \in (1, k_{**})$, когда $c \in (0, c_{**})$, $\frac{dP}{d\varphi} > 0$ и $P_{кр} \in (P_*, P_{**})$, происходит бифуркация процесса деформирования при промежуточных значениях отпорности системы и в условиях увеличения действующей нагрузки.

4. При всех $k \in (k_{**}, \infty)$, когда $c \in \left(c_{**}, \frac{b}{2} \right)$, $\frac{dP}{d\varphi} < 0$ и $P_{кр} \in \left(P_{**}, \frac{EFb^2(1+\nu)}{4al} \right)$, происходит бифуркация процесса деформирования при промежуточных значениях отпорности системы, но с уменьшением действующей на систему нагрузки. Такой тип бифуркации возможен для стержней, входящих в состав разгружающихся систем [9, 10].

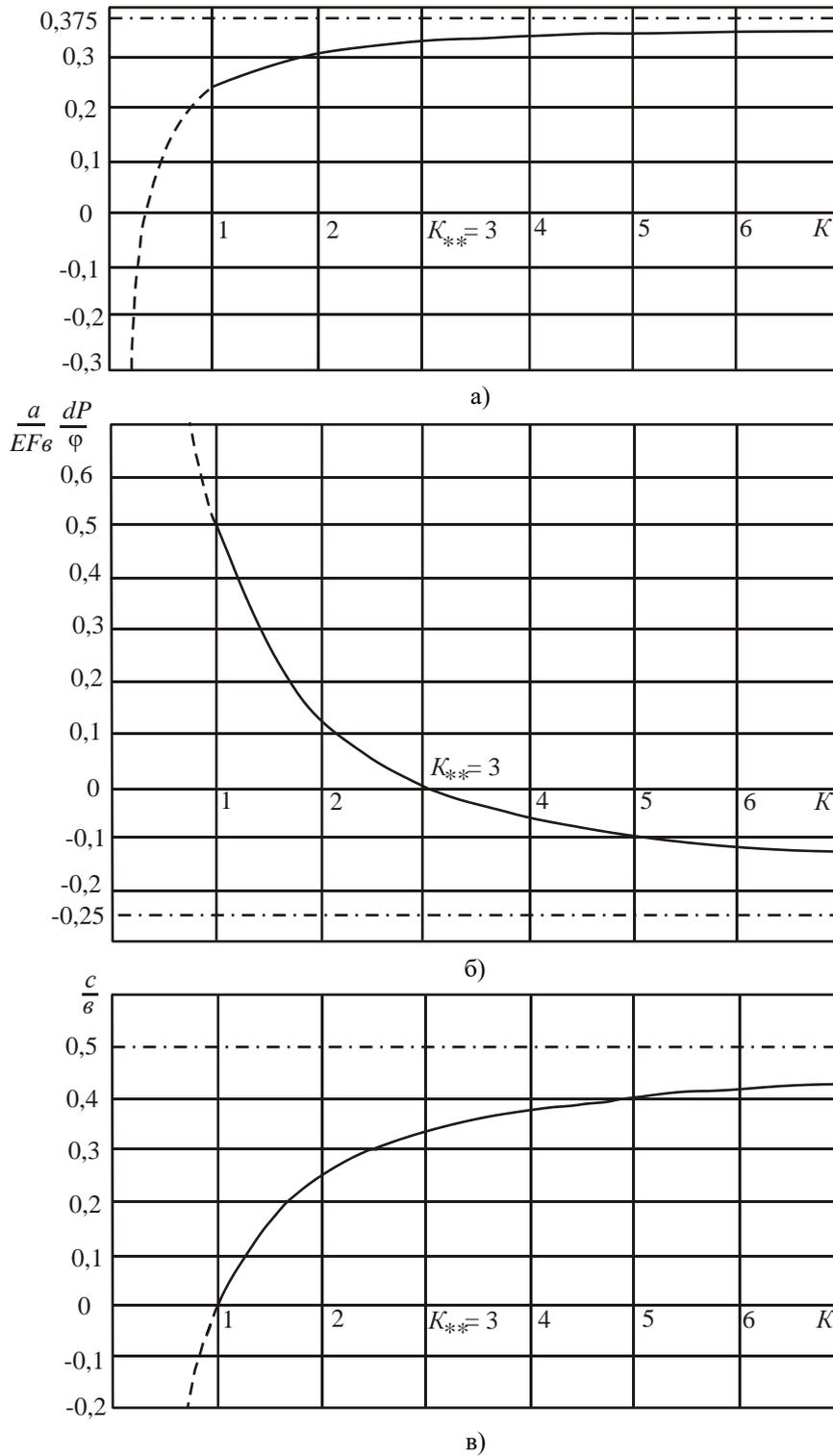


Рис. 3. Совмещенные графики а, б, в выражений соответственно (8), (13), (14) для случая $\nu = 0,5$

Примечание. Участки, показанные пунктиром, соответствуют значениям k , несовместным с уравнениями равновесия.

Заметим, что если при решении задачи упругопластической устойчивости с использованием разветвленного критерия исходить из предположения о нестационарности внешней нагрузки ($dP \neq 0$), т.е. рассматривать бифуркацию процесса, то значение k в принципе не может быть определено из основных

уравнений задачи. Оно определяется характером и интенсивностью внешнего возмущения. Самому неблагоприятному случаю соответствует значение $k = 1$.

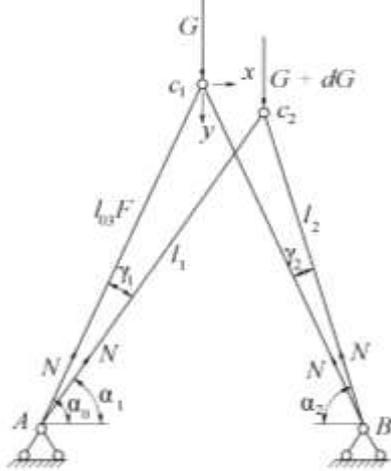


Рис. 4. Ферма Мизеса

На примере фермы Мизеса (рис. 4) покажем возможность применения изложенного подхода к исследованию бифуркации процесса деформирования упругопластических шарнирно-стержневых систем.

Решение выполним с учетом допущения Мизеса о сохранении прямолинейности стержней при бифуркации системы.

Геометрическая нелинейность не учитывается.

Для смежного отклоненного положения системы составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum y...N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 - (G + dG) &= 0; \\ \sum x...N_1 \cos \alpha_1 - N_2 \cos \alpha_2 &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где N_1, N_2 – продольные силы соответственно в левом и правом стержнях системы. Сжимающие усилия считаются положительными.

Кинематические и силовые величины, описывающие систему в смежном положении, представим в виде:

$$\begin{aligned} l_i &= l_0 - (-1)^i dl_i; \\ \alpha_i &= \alpha_0 - (-1)^i \gamma_i; \\ N_i &= N - (-1)^i dN_i; \\ &(i = 1, 2), \end{aligned} \tag{16}$$

где $N = \frac{G}{2 \sin \alpha_0}$ – статический параметр невозмущенной формы равновесия; dN_i, dl_i, γ_i – соответственно бифуркационные силовые и кинематические величины.

Для упругопластической фермы Мизеса вследствие различия законов догрузки и разгрузки в стержнях системы справедливы соотношения:

$$|dN_1| \neq |dN_2|, |dl_1| \neq |dl_2|, |\gamma_1| \neq |\gamma_2|. \tag{17}$$

С учетом (17) уравнения равновесия (15) примут вид:

$$\begin{aligned} \sum y...(dN_1 - dN_2) \sin \alpha_0 + N \cos \alpha_0 (\gamma_1 - \gamma_2) - dG &= 0; \\ \sum x...(dN_1 + dN_2) \cos \alpha_0 - N \sin \alpha_0 (\gamma_1 + \gamma_2) &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Для силовых бифуркационных величин с учетом принятой диаграммы $\sigma - \epsilon$ (см. рис. 1) справедливы соотношения:

$$dN_i = v^{i-1} EF \frac{dl_i}{l_0}. \tag{19}$$

В свою очередь приращения длин dl_i связаны с приращениями углов γ_i соотношениями:

$$\begin{aligned} dl_1 &= l_0 [\gamma_1 \operatorname{ctg} 2\alpha_0 + \gamma_2 (\operatorname{ctg} \alpha_0 - \operatorname{ctg} 2\alpha_0)]; \\ dl_2 &= l_0 [\gamma_1 (\operatorname{ctg} \alpha_0 - \operatorname{ctg} 2\alpha_0) + \gamma_2 \operatorname{ctg} 2\alpha_0]. \end{aligned} \tag{20}$$

Формулы (20) получены из тригонометрических соотношений в ΔC_2B (см. рис. 4) с учетом линеаризации относительно γ_i .

Используя условие разгрузки одного из стержней, например первого ($dl_1 \geq 0$), и вводя параметр k аналогично тому, как это было сделано выше, получим

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha_0}{\operatorname{ctg} 2\alpha_0} \frac{\gamma_2}{(\gamma_2 - \gamma_1)} = k. \tag{21}$$

Так же как и ранее, $k \in [1, \infty)$.

Подставляя (19), (20) в уравнения равновесия (18) и рассматривая их совместно с (21), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно бифуркационных величин γ_1, γ_2, dG .

Из условия равенства нулю определителя такой системы получим

$$P_{кр} = 2EF \sin \alpha_0 \Phi(k, \nu), \quad (22)$$

где

$$\Phi(k, \nu) = \frac{\nu \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 + [(1-\nu) - k(1+\nu)] \operatorname{ctg} \alpha_0 \operatorname{ctg} 2\alpha_0}{(1-k) + k \operatorname{tg}^2 \alpha_0}.$$

Формула (22) определяет плотное множество критических нагрузок, соответствующих различным значениям отпорности фермы Мизеса боковым отклонениям. При $k = 1$ отпорность системы наименьшая и критическая нагрузка соответствует концепции Шенли:

$$G_{кр} = 2\nu EF \frac{\cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha_0}.$$

На основании вышеизложенного можно сделать **вывод**. Задачи об упругопластической потере устойчивости согласно различным подходам разветвленной концепции в математическом отношении едины. Их можно формулировать как задачи на ветвление решений некоторой системы уравнений. В их число наряду с уравнениями равновесия должны включаться дополнительные уравнения, характеризующие отпорность стержневой системы отклонениям от исходной формы равновесия. Соответствующие критические нагрузки находятся из единого аналитического условия – условия ветвления решений этой системы уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Karman, T. Untersuchungen über Knickfestigkeit, Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens / T. Karman // VDI, Heft 81. – 1909. – P. 54 – 62.
2. Shanley, F.R. Inelastic Column Theory / F.R. Shanley // Journal of the Aeronautical Sciences. – 1947. – № 5, Vol. 14, – P. 88 – 98.
3. Кайдалов, Н.Н. Качественная теория неупругой устойчивости элементов судового корпуса / Н.Н. Кайдалов. – Л.: Судостроение, 1972. – 174 с.
4. Ключников, В.Д. Бифуркация процесса деформирования и концепция продолжающегося нагружения / В.Д. Ключников // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 5. – С. 86 – 94.
5. Симеонов, В.С. Об устойчивости упругопластического стержня / В.С. Симеонов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 5. – С. 112 – 114.
6. Шаповалов, Л.А. О бифуркации форм равновесия упругопластического стержня и кольца в условиях продолжающегося нагружения / Л.А. Шаповалов // Прикладная математика и механика. – 1971. – Т. 35, Вып. 2. – С. 104 – 109.
7. Шаповалов, Л.А. Об одной простейшей модели сжатого упругопластического стержня в условиях продолжающегося нагружения / Л.А. Шаповалов // Тез. IV Всесоюз. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике, 1972. – С. 42.
8. Пановко, Я.Г. О современной концепции упругопластического продольного изгиба // Проблемы устойчивости в строительной механике / Я.Г. Пановко [и др.]. – М.: Стройиздат, 1965. – С. 92 – 103.
9. Ильюшин, А.А. Об упругопластической устойчивости конструкций, включающих стержневые элементы / А.А. Ильюшин // Инженерный сборник. – 1960. – Т. 27. – С. 87 – 91.
10. Зубчанинов, В.Г. Устойчивость стержней как элементов конструкций за пределом упругости / В.Г. Зубчанинов // Инженерный сборник. – 1960. – Т. 27. – С. 101 – 112.

Поступила 27.02.2007