

УДК 536.2

## НЕЛИНЕЙНАЯ АСИММЕТРИЯ КОНТАКТНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ

Д.Г. КРОЛЬ

(Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого)

Рассматривается асимметрия теплопереноса в двухслойной металлической пластине при импульсном поверхностном воздействии на границу образца. Асимметрия появляется при перестановке слоев металлов. Представлены количественные и качественные результаты исследования систем  $Fe - W$  и  $W - V$ . Исследуются основные факторы влияния на асимметрию теплопереноса: влияние условий импульсного нагрева; влияние начальной температуры образца; нелинейных свойств коэффициента теплопроводности на параметры асимметрии процесса; установление количественных и качественных характеристик гистерезисных процессов в зоне контакта слоев. Асимметрия на правой границе теплоизолированного образца практически отсутствует. Гистерезисные процессы в зоне контакта наиболее четко выражены при перестановке металлических слоев.

### Введение

Явление асимметрии теплового потока изучалось экспериментально в стационарных условиях на двухслойных пластинах [1]. Теоретическое изучение асимметрии в нестационарных условиях проведено в работах [2, 3]. Были получены следующие результаты:

- 1) тепловое взаимодействие металлов существенным образом зависит от знаков производных  $d\lambda/dT$  в каждом слое;
- 2) отношение толщин слоев  $h_2/h_1$  принципиальным образом влияет на асимметрию процесса;
- 3) производство энтропии и динамический тепловой гистерезис в зоне контакта наиболее чувствительно реагируют на перестановку слоев металлов и на изменение начальной температуры системы.

Данная работа является продолжением этих исследований и развивает их по следующим направлениям:

- 1) влияние условий импульсного нагрева;
- 2) влияние начальной температуры образца;
- 3) влияние нелинейных свойств коэффициента теплопроводности на параметры асимметрии процесса;
- 4) установление количественных и качественных характеристик гистерезисных процессов в зоне контакта слоев. Отличительная черта представленных здесь задач – теплоизолированная правая граница образца.

### Постановка и решение задачи

Уравнение энергии и закон Фурье для теплового потока имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q = -\frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \quad t \geq 0; \quad (1)$$

$$u(T) = \int_0^T c(T)dT, \quad \Lambda(T) = \int_0^T \lambda(T)dT,$$

где  $x$  – декартова координата;  $t$  – время;  $T$  – температура;  $q$  – удельный тепловой поток;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $c$  – объемная теплоемкость.

Искомыми функциями являются температура и тепловой поток в двух контактирующих областях:

- первый слой:  $T = T^{(1)}(x, t)$ ;  $q = q^{(1)}(x, t)$ ,  $x \in [0, h_1]$ ;
- второй слой:  $T = T^{(2)}(x, t)$ ;  $q = q^{(2)}(x, t)$ ,  $x \in [h_1, h]$ .

Толщина образца равна  $h = h_1 + h_2$ .

Условия идеального теплового контакта:

$$x = h_1, T^{(1)} = T^{(2)}, q^{(1)} = q^{(2)}. \quad (2)$$

Правая граница области теплоизолирована:

$$x = h, q^{(2)}(h, t) = 0. \quad (3)$$

Помимо теоретического значения, условие теплоизоляции важно еще и потому, что его нетрудно осуществить на практике.

Тепловой поток  $q_0(t)$  характеризует поверхностный источник энергии на левой границе:

$$x = 0, \quad q^{(1)}(0, t) = q_0(t). \quad (4)$$

Начальная температура образца однородная по координате:

$$t = 0, \quad T(x, 0) = T^0 \equiv const, \quad (5)$$

причем  $T_w = T^0$ .

Теплофизические свойства металлов аппроксимируются полиномами третьей степени с постоянными коэффициентами:

$$c = c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + c_3 T^3; \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3, \quad T \in [T', T'']. \quad (6)$$

Процесс нагрева рассматривается в интервалах температур, для которых фазовые превращения не происходят. Построение аппроксимирующих полиномов выполняется на основе справочных данных [4]. Производство энтропии подсчитываем по формуле [5]:

$$\sigma = q \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{T} \right).$$

Изучаем важный на практике случай, когда нагрев осуществляется импульсом треугольной временной формы:

$$q_0(t) = B t^n \exp(mt); \quad B > 0, \quad n > 0, \quad m < 0; \quad B, \quad n, \quad m - const.$$

Характеристики этого импульса такие:

- максимальное значение поверхностного теплового потока:

$$t = t_0, \quad q_{\max} = q_0(t_0);$$

- длительность импульса:

$$t = t_1, \quad q_0(t_1) = 0,001 q_{\max}.$$

Численные расчеты проводятся в безразмерных величинах. При обезразмеривании применяются масштабы величин (они отмечены нижним индексом  $b$ ), обеспечивающие инвариантность размерной и безразмерной форм записи:  $\lambda_b = x_b^2 c_b / t_b$ ,  $q_b = \lambda_b T_b / x_b$ ;  $\lambda_b = x_b^2 c_b / t_b$ ,  $q_b = \lambda_b T_b / x_b$  и т.д.

Решение краевой задачи (1) – (6) выполняется численным методом интегральных соотношений А.А. Дороницына. Алгоритм построения расчетной схемы подробно изложен в [6].

### Результаты и обсуждение

При обработке результатов расчетов применяем следующие критерии:

- безразмерный градиент температуры:

$$g = \frac{h}{T^0} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right);$$

- безразмерный тепловой поток:

$$Q = \frac{q(x, t) h}{T^0 \lambda(T^0)};$$

- безразмерное производство энтропии:

$$S = \frac{\sigma(x, t)}{\sigma^0}, \quad \sigma^0 = \lambda(T^0) / h^2.$$

Параметры асимметрии (ПА), характеризующие тепловые свойства двухслойной пластины, такие [2, 3]:

- ПА температуры на левой границе:

$$A_T^{(0)} = \frac{(T_0)_{M_1-M_2}^{\max}}{(T_0)_{M_2-M_1}^{\max}};$$

- ПА температуры в зоне контакта:

$$A_T^{(z)} = \frac{(T_z)_{M_1-M_2}^{\max}}{(T_z)_{M_2-M_1}^{\max}};$$

- ПА теплового потока в зоне контакта;

$$A_q^{(z)} = \frac{(q_z)_{M_1-M_2}^{\max}}{(q_z)_{M_2-M_1}^{\max}};$$

- ПА температуры на правой изотермической границе  $x_w = h$  :

$$A_T^{(w)} = \frac{(T_w)_{M_1-M_2}^{\max}}{(T_w)_{M_2-M_1}^{\max}};$$

- ПА производства энтропии в зоне контакта:

$$A_\sigma^{(z)} = \frac{F_{M_1-M_2}^{(g,S)}}{F_{M_2-M_1}^{(g,S)}};$$

- ПА динамического теплового гистерезиса (ДТГ) в зоне контакта:

$$A_G^{(z)} = \frac{F_{M_1-M_2}^{(g,Q)}}{F_{M_2-M_1}^{(g,Q)}}.$$

Индексом  $z$  отмечены значения функций при  $x = h_1$ . В качестве  $M_1, M_2$  применяем химические символы металлов; расположение индексов  $M_1 - M_2$  и  $M_2 - M_1$  указывает на расположение металлических слоев до и после перестановки. Полагаем, что поверхностный источник энергии всегда действует на левую границу образца. Буквами  $F_{M_1-M_2}^{(g,S)}$ ,  $F_{M_1-M_2}^{(g,Q)}$  и т.д. обозначаем площади петель ДТГ в плоскостях «градиент температуры – производство энтропии» и «градиент температуры – тепловой поток». При вычислении  $A_T^{(0)}$ ,  $A_T^{(z)}$ ,  $A_q^{(z)}$ ,  $A_T^{(w)}$  применяем максимальные достигаемые в данном процессе значения функций  $T_0 = T(0, t)$ ,  $T_z = T(h_1, t)$ ,  $q_z = q(h_1, t)$ ,  $T_w = T(h, t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ . Энтропийные и гистерезисные свойства локально-неравновесного теплопереноса изучены в [7]. Асимметричные свойства теплопереноса выражены тем сильнее, чем больше ПА отличается от единицы.

Опыт изучения явления тепловой асимметрии [2, 3] показал важную роль нелинейных свойств коэффициента теплопроводности  $\lambda(T)$ . Здесь мы рассматриваем два класса нелинейных процессов:

- 1) в каждом слое  $d\lambda/dT < 0$ ; в качестве примера берем железо и молибден;
- 2) в одном слое  $d\lambda/dT < 0$ , а в другом  $d\lambda/dT > 0$ ; в качестве примера берем железо и ванадий.

Построение аппроксимирующих полиномов вида (8) было выполнено в следующих температурных интервалах: Fe – [300, 1040]; Mo – [300, 2600]; V – [300, 2000] (значения температуры указаны в кельвинах). При вычислении  $Q, S$  берем  $\lambda(T^0) = \lambda_{Fe}(T^0)$ .

Для всех рассмотренных вариантов  $h = 1 \cdot 10^{-2}$  м;  $T_b = 100$  К,  $\lambda_b = 100$  Вт/(м·К),  $q_b = 1 \cdot 10^6$  Вт/м<sup>2</sup>.

**Параметр поверхностного источника**

В качестве параметра поверхностного источника было выбрано время достижения  $t_0$  максимального теплового потока  $q_{\max}$  при  $h_1 = h_2$  (табл. 1).

Таблица 1

Влияние  $t_0$  на параметры асимметрии

№	$t_0, c$	Система Fe – V						Система W – V					
		$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
1	0,10	1,186	0,923	0,434	1,000	0,070	0,091	0,709	1,169	1,916	1,000	5,462	6,417
2	0,15	1,195	0,920	0,456	1,000	0,081	0,134	0,723	1,168	1,699	1,000	3,884	4,600
3	0,20	1,197	0,920	0,471	1,000	0,095	0,146	0,731	1,162	1,563	1,000	2,857	3,490
4	0,25	1,197	0,923	0,482	1,000	0,103	0,170	0,738	1,154	1,472	1,000	2,304	2,893
5	0,30	1,195	0,926	0,490	1,000	0,111	0,178	0,744	1,143	1,409	1,000	1,960	2,510
6	0,35	1,193	0,930	0,496	1,000	0,122	0,193	0,750	1,133	1,363	1,000	1,734	2,242
7	0,40	1,191	0,934	0,502	1,000	0,128	0,191	0,755	1,123	1,328	1,000	1,572	2,198
8	0,45	1,188	0,938	0,506	0,999	0,134	0,207	0,761	1,113	1,302	1,000	1,453	1,932
9	0,50	1,168	0,947	0,527	0,999	0,152	0,229	0,766	1,104	1,282	1,000	1,365	1,820

Здесь  $T_w = 300\text{K}$ , расчеты показывают, что  $(T_0)_{\text{Fe-W}}^{\text{max}} \cong 1000\text{K}$ ,  $(T_0)_{\text{V-W}}^{\text{max}} \cong 2000\text{K}$ .

Асимметрия температуры для обоих классов процессов полностью отсутствует на правой границе:  $A_T^{(w)} = 1$ .

С увеличением  $t_0$  наблюдаем следующие явления:

1) для системы Fe – W –  $A_T^{(z)} \cong 0,93$ ,  $A_T^{(0)} \cong 1,191$ . В количественном отношении асимметрия наиболее выразительно проявляется в гистерезисном процессе – параметры  $A_G^{(z)}$ ,  $A_G^{(z)}$  значительно меньше 1, причем параметр асимметрии производства энтропии и параметр асимметрии динамического теплового гистерезиса монотонно возрастают;

2) для системы W – V –  $A_T^{(z)} \cong 1,143$ ,  $A_T^{(0)} \cong 0,744$ . Параметр  $A_q^{(z)}$  монотонно убывает. Асимметрия гистерезисных процессов ослабевает (см.  $A_G^{(z)}$  и  $A_G^{(z)}$ ), приближается к 1 со стороны больших значений.

### Начальная температура образца

Важным физическим свойством процесса является начальная температура образца. Таблица 2 составлена при  $t_0 = 0,3\text{c}$ ,  $t_1 = 1,245\text{c}$ ,  $h_1 = h_2$ .

Таблица 2

Влияние начальной температуры образца на параметры асимметрии

№	$T^0, \text{K}$	Система Fe – V						Система W – V					
		$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
1	300	1,197	0,926	0,489	0,999	0,111	0,168	0,739	1,139	1,392	0,997	1,903	2,417
2	325	1,188	0,927	0,483	0,999	0,104	0,165	0,745	1,134	1,396	0,997	1,987	2,438
3	350	1,179	0,929	0,477	1,000	0,096	0,161	0,751	1,129	1,399	0,997	2,066	2,453
4	375	1,171	0,931	0,471	1,000	0,089	0,148	0,756	1,124	1,403	0,998	2,143	2,458
5	400	1,163	0,934	0,466	1,000	0,084	0,145	0,762	1,119	1,406	0,998	2,223	2,464
6	425	1,155	0,936	0,460	1,000	0,079	0,130	0,768	1,115	1,410	0,998	2,296	2,500
7	450	1,147	0,938	0,455	1,000	0,074	0,147	0,773	1,111	1,413	0,998	2,373	2,518
8	475	1,140	0,941	0,448	1,000	0,070	0,144	0,778	1,106	1,417	0,998	2,447	2,538
9	500	1,132	0,943	0,442	1,000	0,066	0,132	0,784	1,102	1,421	0,998	2,513	2,535

На правой границе асимметрия температуры по-прежнему практически отсутствует. По мере роста  $T^0$  наблюдаем:

1) ослабление асимметричных свойств температуры на левой границе (см.  $A_T^{(0)}$ ) и на границе слоев (см.  $A_T^{(z)}$ );

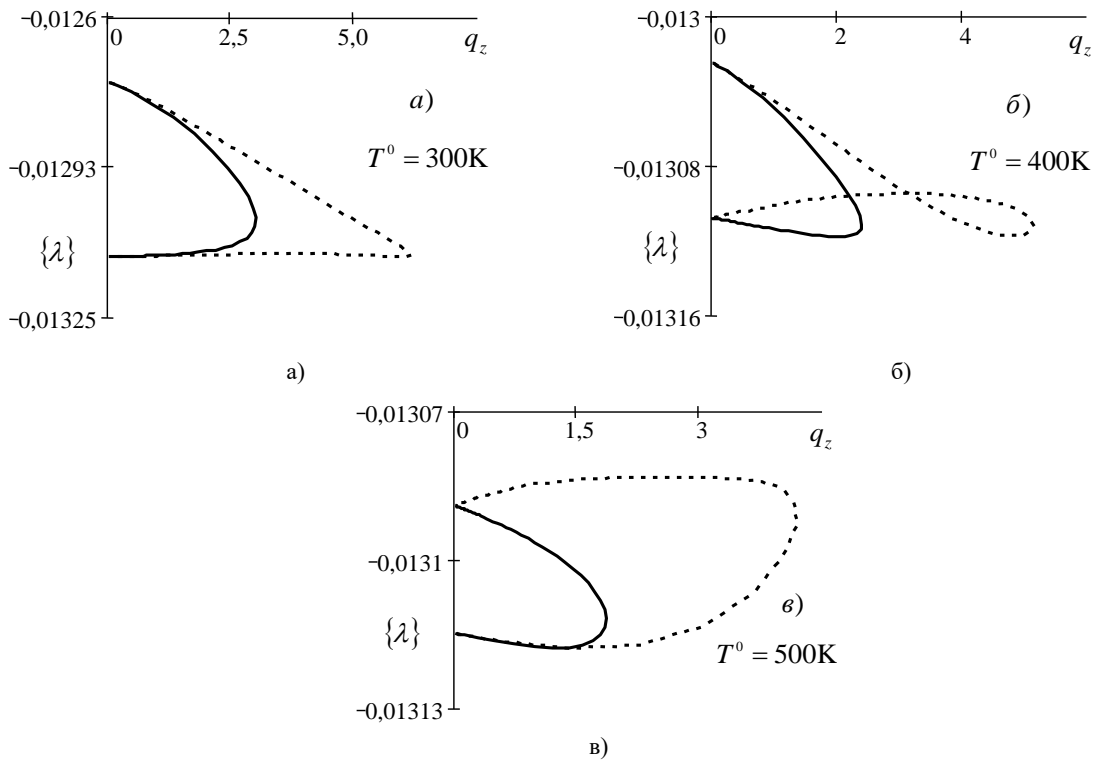
2) усиление асимметрии гистерезисных свойств:  $A_G^{(z)}$  и  $A_G^{(z)}$  убывают примерно такими же темпами, какими нарастает  $T^0$ ;

3) параметр асимметрии теплового потока на границе слоев монотонно убывает. Рассмотрим скачки теплопроводности  $\{\lambda\}$  в зоне контакта для системы Fe – W:

$$\{\lambda\}_{M_1-M_2} = \frac{1}{\lambda_{Fe}^0} [\lambda_{M_1}(T) - \lambda_{M_2}(T)] \quad \text{при } T = (T_z)_{M_1-M_2}; \quad (7)$$

$$\{\lambda\}_{M_2-M_1} = \frac{1}{\lambda_{Fe}^0} [\lambda_{M_2}(T) - \lambda_{M_1}(T)] \quad \text{при } T = (T_z)_{M_2-M_1}.$$

Здесь  $\lambda_{Fe}^0$  подсчитывается при  $T = 300\text{K}$ . Своеобразие ситуации в том, что функции (7) могут немонотонно зависеть от температуры, и тогда появляется самопересечение линии, характеризующей зависимость  $\{\lambda\}$  от  $q_z$  (рисунок, б). Если функции – монотонные, то самопересечений нет (рисунок, а, в).



Влияние начальной температуры образца на скачок теплопроводности в зоне контакта:  
сплошная линия –  $\{\lambda\}_{\text{Fe-W}}$ ; штриховая –  $\{\lambda\}_{\text{W-Fe}}$

**Перестановка металлов при фиксированных толщинах слоев**

Содержащиеся здесь результаты относятся к варьированию металлов, заполняющих слой; в каждом варианте расчёта толщины  $h_1, h_2$  фиксированные (табл. 3).

Таблица 3

Влияние перестановки металлов на параметры асимметрии при фиксированных в каждом варианте толщинах слоев

№	$h_2 / h_1$	Система Fe – W						Система W – V					
		$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
1	9,000	1,038	0,866	0,829	1,165	0,585	0,550	1,031	1,266	1,019	0,889	0,432	0,636
2	4,000	1,124	0,838	0,711	1,107	0,365	0,350	0,873	1,320	1,023	0,929	0,569	0,900
3	2,333	1,168	0,831	0,639	1,069	0,256	0,287	0,798	1,376	1,073	0,956	0,800	1,510
4	1,500	1,185	0,880	0,561	1,032	0,169	0,241	0,764	1,251	1,218	0,979	1,230	1,844
5	1,000	1,198	0,925	0,487	1,000	0,110	0,167	0,740	1,143	1,414	1,000	2,011	2,523
6	0,667	1,197	0,951	0,414	0,967	0,069	0,128	0,727	1,063	1,704	1,022	3,517	3,571
7	0,429	1,193	0,935	0,346	0,935	0,039	0,088	0,718	1,045	2,128	1,045	6,962	5,739
8	0,250	1,195	0,903	0,286	0,903	0,020	0,061	0,713	1,070	2,696	1,070	15,08	9,428
9	0,111	1,190	0,871	0,236	0,871	0,011	0,035	0,706	1,094	3,238	1,094	32,62	14,02

Здесь  $t_0 = 0,3\text{c}$ ,  $t_1 = 1,245\text{c}$ . Для пары металлов Fe – W максимальный тепловой поток составил  $q_{\text{max}} = 1,926 \cdot 10^7 \text{Вт/м}^2$ ; для W – V  $q_{\text{max}} = 3,832 \cdot 10^7 \text{Вт/м}^2$ . В зоне контакта отчетливо выражена асимметрия теплового потока. Асимметрия температуры на правой границе выражена незначительно (см.  $A_T^{(w)}$ ). Зависимость  $A_T^{(z)}$  от  $h_2 / h_1$  немонотонная, имеет максимум. По мере роста толщины второго слоя наблюдаем следующие явления: асимметрия производства энтропии (см.  $A_G^{(z)}$ ) и асимметрия ДТГ (см.  $A_G^{(z)}$ ) увеличиваются.

### Перестановка металлических слоев

Обсудим результаты расчета при перестановке толщин слоев вместе с наполняющими их металлами (табл. 4). Параметры  $q_{\max}$ ,  $t_0$ ,  $t_1$  такие же, как и в таблице 3. Видим, что при перестановке слоев металлов появляются своеобразные черты процесса – существует значение  $(h_2/h_1)_*$ , для которого  $A_T^{(z)}$  и  $A_q^{(z)}$  близки к 1, при отклонении отношения толщин слоев в обе стороны от  $(h_2/h_1)_*$  появляется хорошо выраженная асимметрия температуры и теплового потока в зоне контакта; на правой границе  $x=h$  асимметрия температуры практически отсутствует; параметры асимметрии гистерезисных процессов меняются в очень широком числовом диапазоне (см.  $A_G^{(z)}$ ,  $A_G^{(z)}$ ). В системе Fe – W параметр асимметрии температуры на левой границе  $A_T^{(0)}$  как функция  $h_2/h_1$  имеет максимум, а в системе W – V – минимум.

Таблица 4

Влияние перестановки металлических слоев разной толщины на параметры асимметрии

№	$h_2/h_1$	Система Fe – W						Система W – V					
		$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
1	9,000	1,162	1,287	7,129	1,102	412,95	98,375	0,894	2,039	35,65	1,112	11469	1902,4
2	4,000	1,197	1,114	2,656	1,041	20,990	10,436	0,837	1,709	11,70	1,054	559,9	222,60
3	2,333	1,204	1,010	1,410	1,002	2,9789	2,1481	0,787	1,464	5,125	1,003	65,55	47,217
4	1,500	1,203	0,985	0,818	1,002	0,5579	0,6275	0,758	1,282	2,610	1,003	10,56	10,339
5	1,000	1,198	0,925	0,487	1,000	0,1100	0,1672	0,740	1,143	1,414	1,000	2,011	2,523
6	0,667	1,179	0,850	0,285	0,997	0,0209	0,0494	0,732	1,038	0,795	0,997	0,410	0,637
7	0,429	1,157	0,769	0,157	0,997	0,0034	0,0118	0,729	0,982	0,445	0,985	0,085	0,184
8	0,250	1,122	0,679	0,077	0,960	0,0004	0,0020	0,743	0,826	0,236	0,943	0,015	0,038
9	0,111	1,064	0,586	0,027	0,931	0,0001	0,0002	0,814	0,679	0,093	0,876	0,001	0,005

### Выводы

Основные факторы влияния на асимметрию теплопереноса:

- температурная зависимость коэффициента теплопроводности  $\lambda(T)$ , т.е. знаки производных  $(d\lambda/dT)_{M_1}$ ,  $(d\lambda/dT)_{M_2}$ ;

- начальная температура образца  $T^0$ ;

- отношение толщин слоев  $h_1/h_2$ ;

- время достижения  $t_0$  максимального теплового потока  $q_{\max}$ .

Асимметрия на правой границе теплоизолированного образца практически отсутствует. Гистерезисные процессы в зоне контакта наиболее четко выражены при перестановке металлических слоев.

Работа выполнена под научным руководством профессора О.Н. Шабловского.

### ЛИТЕРАТУРА

- Gogol, W. Experimental investigations of effect of asymmetry of heat conduction in two-component systems Eksperymentaln badania efektu asymetrii przewodzenia w ukladach dwuskładnikowych / W. Gogol // Archiwum termodynamiki. – 1984. – Vol. 5. – № 3 – 4. – P. 289 – 311.
- Шабловский, О.Н. Динамические свойства контактного теплообмена в двухслойной металлической пластине / О.Н. Шабловский, Д.Г. Кроль // Материалы, технологии, инструменты. – 2004. – Т. 9. – № 4. – С. 9 – 14.
- Шабловский, О.Н. Асимметричные свойства тепловых процессов при поверхностном нагреве двухслойной металлической пластины / О.Н. Шабловский, Д.Г. Кроль // Прикладная физика. – 2005. – № 1. – С. 31 – 38.
- Зиновьев, В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах / В.Е. Зиновьев. – М.: Металлургия, 1989. – 384 с.
- Беккер, Р. Теория теплоты / Р. Беккер. – М.: Энергия, 1974. – 504 с.
- Шабловский, О.Н. Численное решение задач нестационарного нагрева металлов / О.Н. Шабловский, Д.Г. Кроль // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. Ин-та математики НАН Украины. – Киев, 1998. – С. 234 – 237.
- Шабловский, О.Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах / О.Н. Шабловский. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2003. – 382 с.

Поступила 26.02.2007