PolotskSU

УДК 621.165

МЕТОД СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ И ИНТЕРПОЛЯЦИИ ГРАФИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЯХ

М.В. СВЕЧКО
(Полоцкий государственный университет),
канд. техн. наук В.Е. ПИТОЛИН
(Новополоцкая ТЭЦ)

Сложные энергетические объекты, к которым относятся энергетические котлы, паровые, газовые турбины и турбогенераторы, обычно определяются набором нормативных энергетических характеристик, представленных в графической форме. Нормативные энергетические характеристики получают расчетным путем при проектировании с последующим уточнением по результатам испытаний опытных образцов. При моделировании на ПЭВМ этих энергетических объектов для целей построения тренажеров или экономических моделей электрических станций и сетей возникает необходимость аппроксимации графических энергетических характеристик в достаточно простую аналитическую форму. Существует несколько методов аппроксимации, например, представление сложных графиков отрезками прямых линий или парабол. Но такие методы имеют низкую точность интерполяции (25 % и боле).

В предлагаемой статье рассмотрен наиболее прогрессивный метод сплайн-аппроксимации графических характеристик сложной формы. Этот метод позволяет получить достаточно высокую точность аналитических характеристик по отношению к графическому первоисточнику (до 1 %) без существенного усложнения расчетных зависимостей.

Для расчета характеристик сложных энергетических объектов (например, паровых турбин или котлов) часто используется аппроксимация опытных данных полиномами второй, третьей и большей степени с погрешностью представления данных 5…15 %. Однако характеристики упомянутых объектов могут иметь существенные особенности резонансного типа, поэтому полиномиальная интерполяция не всегда дает удовлетворительные результаты при аппроксимации характеристик таких объектов. При этом повышение степени интерполяционного полинома приводит не к уменьшению, а к увеличению погрешности [1]. Возникает так называемое явление волнистости. Проблема погрешностей интерполяции полиномами становится серьезным препятствием при необходимости выделить, например, эффекты оптимизации характеристик в пределах 3…5 %.

Для проведения гладких кривых через узловые значения характеристических функций обычно используется упругое металлическое лекало, совмещаемое с узловыми точками. Математическая теория подобной аппроксимации развита за последние 45 лет достаточно хорошо и называется теорией сплайн-функций (от английского слова spline – рейка). Разработано и обширное программное обеспечение для практического применения сплайнов в различных областях науки и техники [2, 3].

В настоящей статье излагается метод представления семейства графических характеристик сложных объектов в виде набора сплайнов. Сплайны в семействе собственно представлены в виде ссылок на объект SPLINE с соответствующим разрешением (4, 6, 8 и более узловых точек) и списком передаваемых параметров.

Список параметров формируется при вводе координат узловых точек аппроксимируемой кривой и вычисляемого коэффициента нагрузки правого свободного конца сплайна, определяемого координатами контрольной точки на первом отрезке сплайна, наименее устойчивом к «волнистости».

Графическое решение для семейства кривых находится методом построения секущей для поверхности, образованной этим семейством. Решение представляется также в виде сплайна в секущей плоскости, узловыми точками которого являются точки пересечения секущей и кривых семейства.

Под сплайном понимается интерполяционная функция S(φ), «склеенная» из различных кусков обобщенных полиномов, для которой на участках интерполяции справедливо равенство:

$$S''(\varphi) = m_i + \frac{m_{i+1} - m_i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i}(\varphi - \varphi_i), \qquad (1)$$

где $m_i = S''(\varphi_i)$ – коэффициенты сплайна; $i = 0, 1, \ldots, n$ – узлы сплайна.

Условие (1) аналогично условию равновесия упругой рейки, используемой в качестве лекала, и определяет координаты ее осевой линии между двумя соседними опорами.

PolotskSU

Рассмотрим в качестве первого примера функцию распределения $P(\varphi)$ статического давления по периметру рабочего колеса центробежного насоса.

По определению [1] функция $S(\varphi)$ является кубическим сплайном, интерполирующим функцию $P(\varphi)$, если $S(\varphi_i) = P(\varphi_i)$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Для обеспечения плавного изменения функции $S(\varphi)$ в окрестностях точек сопряжения φ_i должно выполняться условие:

$$S^{(j)}(\varphi_i + 0) = S^{(j)}(\varphi_i - 0), \tag{2}$$

где $j = 1, 2, 3$ – порядок производной по координате φ.

В силу того, что условия построения сплайна для функции распределения $P(\varphi)$ являются периодическими, т.е. изменяющимися с периодом 2π, можно записать:

$$S^{(j)}(\varphi_1 + 0) = S^{(j)}(\varphi_n - 0). \tag{3}$$

Проинтегрировав дважды уравнение (1), можно получить выражение для функции $S(\varphi)$:

$$S(\varphi) = S(\varphi_i) + \left[\frac{S(\varphi_{i+1}) - S(\varphi_i)}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} - \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{6}(2m_i + m_{i+1})\right](\varphi - \varphi_i) + \frac{m_i}{2}(\varphi - \varphi_i)^2 + \frac{m_{i+1} - m_i}{6(\varphi_{i+1} - \varphi_i)}(\varphi - \varphi_i)^3. \tag{4}$$

Коэффициенты сплайна m_i находятся решением системы уравнений вида:

$$(\varphi_i - \varphi_{i-1})m_{i-1} + 2(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})m_i + (\varphi_{i+1} - \varphi_i)m_{i+1} = 6\left[\frac{S(\varphi_{i+1}) - S(\varphi_i)}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} - \frac{S(\varphi_i) - S(\varphi_{i-1})}{\varphi_i - \varphi_{i-1}}\right], \tag{5}$$

которые получаются после подстановки в уравнение (4) выражений для предыдущего, а также последующего узлов и приравнивания их друг к другу в узлах сопряжения в силу условия (2).

Число уравнений будет соответствовать числу неизвестных в силу условия (3) для периодического сплайна. Такая система уравнений имеет единственное решение. Матрица системы линейных алгебраических уравнений относительно m будет трехдиагональной, как это следует из уравнения (5), т.е. имеет отличные от нуля значения элементов только на главной и примыкающим к ней диагоналям, а также крайних элементов начального и завершающего уравнений системы, определяемых краевыми условиями. Для решения системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей элементов наиболее эффективен метод прямой и обратной прогонки, являющийся частным случаем метода исключений Гаусса решения полных систем линейных уравнений.

Из выражения (5) можно установить связь между двумя последовательно расположенными элементами:

$$m_i = P_i m_{i-1} + Q_i, \tag{6}$$

где P_i и Q_i – называются прогоночными коэффициентами.

Прогоночные коэффициенты определяются рекуррентными выражениями, полученными из выражения (5) с учетом условия (3):

$$P_i = -\frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{2(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) + (\varphi_i - \varphi_{i-1})P_{i-1}};$$

$$Q_i = \frac{6\left[\frac{S(\varphi_{i+1}) - S(\varphi_i)}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} - \frac{S(\varphi_i) - S(\varphi_{i-1})}{\varphi_i - \varphi_{i-1}}\right] - (\varphi_i - \varphi_{i-1})Q_{i-1}}{2(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) + (\varphi_i - \varphi_{i-1})P_{i-1}}. \tag{7}$$

При решении системы уравнений было принято условие о периодичности сплайна – условие (3), что позволило исключить два неизвестных и графически замкнуть сплайн в полярных координатах φ.

Этот метод применим и для построения сплайна в декартовых координатах $Y(x)$ с ненагруженными концами, т.е. с нулевыми значениями краевых условий.

Но на практике при интерполяции сплайнами реальных энергетических характеристик турбоагрегатов требуется определять характеристики нагрузок на концах сплайна. В противном случае линия сплайна между узлами не будет соответствовать интерполируемой кривой.

PolotskSU

Полагая, что нагрузка на концах сплайна является формальной, можно определить нагрузку только с одного конца, считая нагрузку на другом конце отсутствующей. Это условие существенно упростит расчет коэффициентов сплайна, но потребует более строго подходить к выбору координат узлов сплайна.

Для расчета нагрузки на конце сплайна необходимо ввести дополнительный узел сплайна с координатами $Y_m(x_m)$ на участке с наименьшей устойчивостью – это либо первый отрезок сплайна $[x_1, x_2]$, если определяется нагрузка за последним узлом, либо последний, если нагрузка определяется до первого узла.

Нагрузка на конце сплайна оценивается вычислением координат дополнительного контрольного узла сплайна – $Y_k(x_k)$ – за пределами интерполируемой кривой. При этом необходимо ввести условие абсолютной жесткости сплайна за пределами последнего узла, т.е. $m_n = 0$. В физической интерпретации отрезок сплайна между последним и контрольным узлами представляется в виде жесткого рычага, повернутого под определенным углом.

Таким образом, процесс интерполяции графических данных в практическом приложении разбивается на два самостоятельных этапа:

- 1-й этап – предварительная подготовка данных сплайна с визуальным контролем точности представления графической характеристики в аналитическом виде. Результатом первого этапа будет определение списка передаваемых параметров: $x_1, \ldots, x_n, x_k, y_1, \ldots, y_n, y_k$, представляющих координаты узлов сплайна;

- 2-й этап – выполнение расчета искомого значения интерполируемой функции Y в теле прикладной программы по искомому параметру x. Этот процесс можно представить в виде функции $Y = \mathrm{spline}(x_1, \ldots x_n, x_k, y_1, \ldots, y_n, y_k, x)$.

Опуская промежуточные преобразования, которые осуществлены с использованием выражений (1) – (7), после замены полярных координат $S(\varphi)$ на прямоугольные $Y(x)$ приводим конечные выражения для определения координат контрольного узла, выполняемого на первом этапе интерполирования:

$$x_k = x_n + 5(x_n - x_{n-1});$$
$$y_k = y_n + (x_k - x_n)\left[\frac{m_{n-1}(x_n - x_{n-1})}{6} + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right], \tag{8}$$

где коэффициент сплайна $m_{n-1} = c_{n-1}$ определяется с использованием рекуррентных соотношений:

$$q_i = \frac{6}{x_{i+1} - x_i}\left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right);$$
$$v_i = \frac{x_{i+2} - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i};$$
$$w_i = \frac{2(x_{i+2} - x_i)}{x_{i+1} - x_i}; \tag{9}$$
$$c_i = \frac{q_{i-1} - c_{i-1}}{w_{i-1} - d_{i-1}};$$
$$d_i = \frac{v_{i-1}}{w_{i-1} - d_{i-1}};$$

значения c и d для первого интервала определяются по формулам:

$$c_1 = \frac{y_1 + (x_m - x_1)\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - y_m}{\dfrac{x_2 - x_1}{3}(x_m - x_1) - \dfrac{1}{2}(x_m - x_1)^2 + \dfrac{1}{6(x_2 - x_1)}(x_m - x_1)^3};$$
$$d_1 = \frac{\dfrac{x_2 - x_1}{6}(x_m - x_1) - \dfrac{1}{6(x_2 - x_1)}(x_m - x_1)^3}{\dfrac{x_2 - x_1}{3}(x_m - x_1) - \dfrac{1}{2}(x_m - x_1)^2 + \dfrac{1}{6(x_2 - x_1)}(x_m - x_1)^3}. \tag{10}$$

PolotskSU

Второй этап вычислений значения аналитической функции $Y(x)$, аппроксимирующей графическую энергетическую характеристику турбины, по значению аргумента x в теле прикладной программы осуществляется с использованием подпрограммы spline(x_1, ... x_n, x_k, y_1, … y_n, y_k, x), представляющей собой также совокупность рекуррентных соотношений.

Определяются коэффициенты сплайна:

$$m_n = 0;$$
$$m_{n-1} = \frac{6\left(\frac{y_k - y_n}{x_k - x_n} - \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right)}{x_n - x_{n-1}}; \tag{11}$$
$$m_i = \frac{6\left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right) - m_{i+2}(x_{i+2} - x_{i+1}) - 2m_{i+1}(x_{i+2} - x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Затем определяется номер интервала i, в который попадает значение аргумента x, простым сравнением значений координат узлов сплайна со значением аргумента.

Для произвольного интервала i выражением (12) определяется значение функции Spline = $y(x)$:

$$y = y_i + \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{6}(2m_i + m_{i+1})\right]x + \frac{m_i}{2}x^2 + \frac{m_{i+1} - m_i}{6(x_{i+1} - x_i)}x^3. \tag{12}$$

Обычно графические характеристики энергетического объекта представляют собой семейство графиков, т.е. выражают зависимость функции от двух аргументов $z(x, y)$. Для представления в аналитическом виде таких графических характеристик наиболее удобен метод разделения переменных и представления функции $z(x, y)$ в виде $z(y(x))$.

Для значения аргумента x определяется совокупность значений $\sum_{i=1}^{i=n} y_i(x)$, затем для совокупности значений y_i, представляющих в свою очередь координаты узлов сплайна $z_j(y)$, определяется значение функции z по заданному y с использованием изложенного метода построения интерполяционной сплайн-функции, но с совмещением двух этапов ее построения.

Изложенный метод представления графических характеристик в аналитическом виде представляется громоздким, но на практике все обстоит достаточно просто. При наличии определенного навыка и инструментария можно достаточно оперативно (в течение 4…8 часов) перевести в аналитический вид любые энергетические характеристики объектов, представленные в виде диаграмм на планшете формата А2.

На рисунке показан пример аппроксимации нормативных энергетических характеристик турбогенератора ПТ60-130/13 методом сплайн-аппроксимации.

Можно видеть, что координаты некоторых опорных точек при формировании сплайна, например вторая точка на графике Q_m = max, были выбраны неудачно. Это привело к появлению существенной (до 1 %) погрешности аппроксимации. Для других графиков погрешность аппроксимации не превышает 0,5 %.

В показанном примере для аппроксимации графиков был использован наиболее простой 4-координатный сплайн. При необходимости повышения точности аппроксимации либо при наличии на графиках локальных особенностей можно применить сплайны с числом опорных точек до 12 и более.

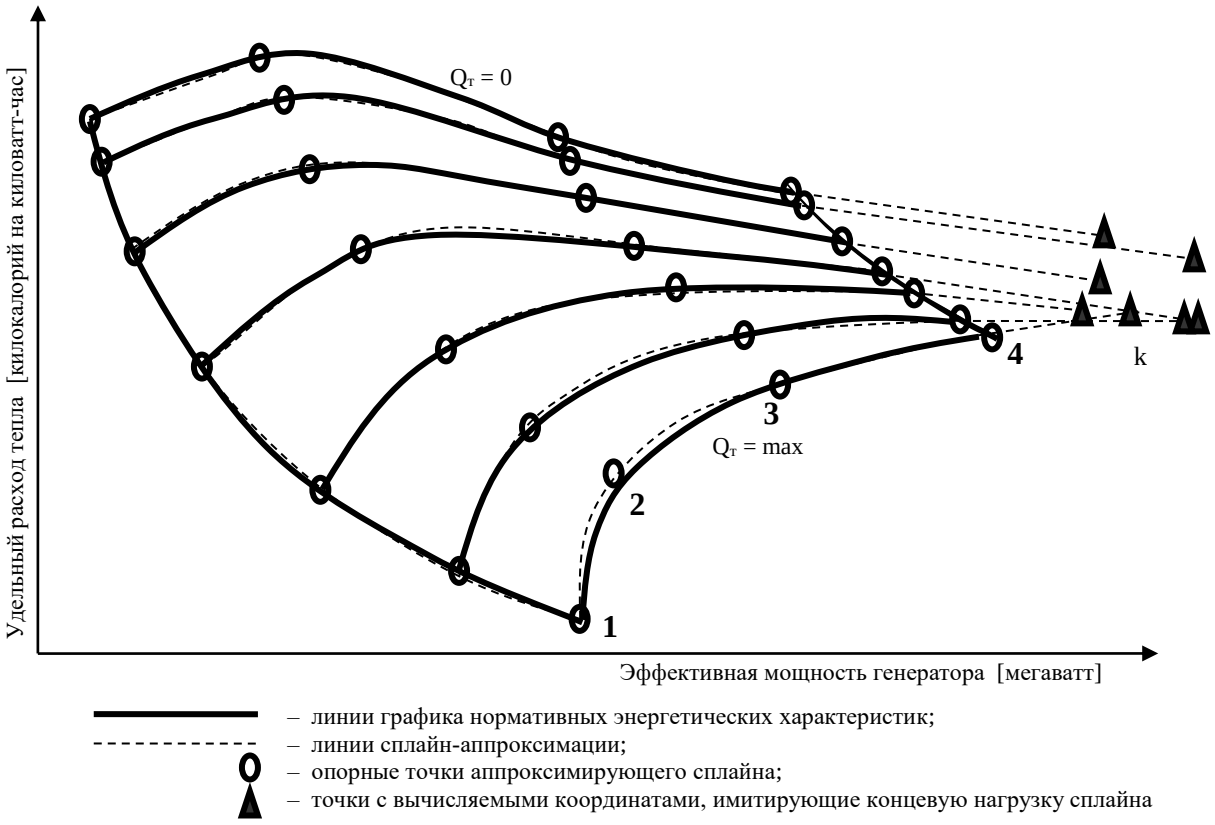
Вывод

Метод сплайн-аппроксимации данных, представленных в виде графических зависимостей, позволяет достаточно просто и оперативно получить аналитические зависимости, которые можно встраивать в программные модули прикладного программного обеспечения для разработки расчетных моделей сложных энергетических объектов.

Достигаемая точность аппроксимации данных может составлять 0,25…1 %, что сопоставимо с точностью параметрических методов расчета энергетических характеристик объектов, предполагающих

PolotskSU

большое количество уточнений в процессе расчета и применения итерационных методов вычислений, которые неприемлемы для построения имитационных моделей.



Аппроксимация 4-координатными кубическими сплайнами
нормативных энергетических характеристик турбогенератора ПТ60-130/13
при различной величине подачи пара в теплофикационный отбор $Q_т$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутер, Р.С. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта / Р.С. Гутер, Б.В. Овчинский. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
2. Стечкин, С.Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин. – М.: Наука, 1976. – 215 с.
3. Шикин, Е.В. Кривые и поверхности на экране компьютера / Е.В. Шикин, А.И. Плис. – М.: Диалог МИФИ, 1996. – 237 с.

Поступила 07.03.2007