

УДК 517.518.45

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

*д-р техн. наук, доц. С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ
(Полоцкий государственный университет)*

Предложена и обоснована методика определения номера многочлена Фурье, с минимальным среднеквадратическим отклонением аппроксимирующего функцию, заданную таблично. Оценены вклад в погрешность такого приближения ошибок табличного интегрирования, допускаемых при вычислении коэффициентов Фурье, и ошибка, совершаемая при отбрасывании остатка соответствующего тригонометрического ряда. Отмечена неизбежность ошибки аппроксимации, связанной с принципиальной невозможностью учета высших гармоник для таблицы фиксированного размера. Известные результаты, относящиеся к теории рядов Фурье (формула Парсевала, теорема об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье, теорема Ляпунова и др.), интерпретированы в рамках представлений о функциях как о бесконечномерных векторах конечной длины. Показано, что порядок оптимального многочлена Фурье не изменится, если вместо формул прямоугольников при вычислении его коэффициентов использовать более точные формулы табличного интегрирования.

Существуют различные процедуры восстановления функциональной связи по данной совокупности экспериментальных точек. Если имеются соображения относительно вида закона, строят кривую регрессии, параметры которой определяют методом наименьших квадратов [1]. В противном случае используют интерполяционный многочлен, график которого проходит через каждую опорную точку [1]. Очевидно такой подход нецелесообразен, если соответствующие точки расположены недостаточно густо или определены не очень точно.

Известен также промежуточный (гибридный) вариант аппроксимации функций [2], приемлемый в случае, когда вид закона принципиально неизвестен и опорных точек в силу объективных причин не может быть много. Однако достоверность полученных таким образом результатов невысока.

Особое место занимают методы, использующие замену искомой связи частичной суммой ряда по некоторой системе ортогональных функций [3]. Такая процедура не содержит ограничений регрессии, недостатков интерполяции и является значительно более корректной в плане ее теоретического обоснования, что позволяет максимально использовать информацию о функции, содержащуюся в ее табличных значениях. В частности, для этого важно знать номер упомянутой частичной суммы, наиболее подходящий для данной таблицы. Разъяснению смысла слов «наиболее подходящий» и определению самого номера посвящена данная публикация.

Понимая под определенным интегралом предел интегральных сумм, естественно ввести скалярное произведение функций

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k) = \vec{f} \cdot \vec{g} \quad (1)$$

как сумму произведений соответствующих координат бесконечномерных векторов

$$\vec{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{b-a}{n}} \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}. \quad (2)$$

По аналогии с разложением вектора в декартовом базисе попытаемся представить $f(x)$ в виде

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_m\varphi_m(x) + \dots = \{a_1, a_2, \dots, a_m, \dots\}, \quad (3)$$

где $\{\varphi_m(x)\}$ – ортонормированная система функций

$$\vec{\varphi}_m \cdot \vec{\varphi}_k = \begin{cases} 1, m = k; \\ 0, m \neq k. \end{cases} \quad (4)$$

Равенство в (1) возможно, если при выборе $\{\varphi_m(x)\}$ специфика задачи учтена верно, что обеспечивает отсутствие у \vec{f} других координат, кроме $\{a_m\}$, и сходимость фигурирующего в (3) функционального ряда. В этом случае квадрат модуля \vec{f} равен сумме квадратов его координат:

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2, \quad (5)$$

при условии, что интеграл в (5) существует. Заметим, что равенство (5), известное как формула Парсеваля [3], становится в данной интерпретации тривиальным.

Аппроксимируем $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ многочленом

$$S_n(x) = \sum_{m=1}^n \beta_m \varphi_m(x) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, 0, 0, \dots\}. \quad (6)$$

В качестве меры близости используем среднеквадратическое отклонение $\delta(n)$:

$$(b-a)\delta^2(n) = \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \sum_{m=1}^n (a_m - \beta_m)^2 + \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m^2. \quad (7)$$

Справа в (7) – сумма квадратов разностей соответствующих координат начала и конца вектора $\vec{f} - \vec{S}_n$. Очевидно, что при любом фиксированном n максимальную близость обеспечивают

$$\beta_m = a_m = \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx. \quad (8)$$

Обычно это доказывают как теорему об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье [3]. Таким образом, в качестве $S_n(x)$ следует использовать частичную сумму фигурирующего в (3) ряда, что при $n \rightarrow \infty$ позволяет сделать среднеквадратическое отклонение $\delta(n)$ сколь угодно малым, так как согласно (5) ряд $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2$ сходится. Последнее утверждение известно как теорема Ляпунова [3] и допускает следующую интерпретацию: расстояние между двумя точками бесконечномерного пространства, определяемыми радиус-векторами конечной длины $\vec{f} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ и $\vec{S}_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots\}$, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, так как при этом их координаты совпадают.

Часто информация об $f(x)$ содержится в наборе экспериментальных точек $M_k(x_k, y_k)$. Пренебрегая погрешностью самого эксперимента, будем считать, что $y_k = f(x_k)$, где

$$x_k = a + \frac{b-a}{N}(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Для вычисления β_m (см. (8)) используем формулы прямоугольников табличного интегрирования:

$$\beta_m = a_m^* = \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) \varphi_m(x_k) \approx a_m. \quad (10)$$

Допускаемая при этом ошибка

$$\Delta_m = a_m - \beta_m \quad (11)$$

не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Действительно, полностью покрыть криволинейную трапецию конечным числом прямоугольников ($N \neq \infty$) можно лишь в том случае, если она сама прямоугольник. То есть из $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x) = \frac{const}{f(x)}$, что противоречит ортогональности базисных функций.

Подставив (11) в (7), получим

$$\delta^2(n) = \delta_1^2(n) + \delta_2^2(n), \quad (12)$$

где $\delta_1(n)$ связано с погрешностью табличного интегрирования (10), а $\delta_2(n)$ – с отбрасыванием остатка функционального ряда (3):

$$\delta_1^2(n) = \frac{1}{b-a} \sum_{m=1}^n \Delta_m^2; \quad \delta_2^2(n) = \frac{1}{b-a} \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m^2. \quad (13)$$

При увеличении n на единицу к $\delta_1^2(n)$ добавляется, а из $\delta_2^2(n)$ вычитается положительное слагаемое. Очевидно, что делать это нужно до тех пор, пока

$$|\Delta_n| < |a_n|. \tag{14}$$

Только при таком условии среднеквадратическое отклонение $\delta(n)$ будет уменьшаться с ростом n . При больших n неравенство (14) нарушится, так как в силу необходимого условия сходимости ряда (3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0.$$

Таким образом, для таблицы данного размера (см. (9)) существует оптимальное n , при котором многочлен (6) с коэффициентами (10) в среднем минимально отклоняется от аппроксимируемой функции.

Поскольку $f(x)$ неизвестна, в (14) вместо a_n используем его приближенное значение (10):

$$|\Delta_n| < |a_n^*|. \tag{14'}$$

Полученное из независимых соображений условие (14') допускает простую интерпретацию: учет высших гармоник правомерен, если приближенные значения соответствующих фурье-амплитуд больше погрешности их вычисления.

Для оценки последней заметим, что использование в (8) формулы прямоугольников эквивалентно отбрасыванию на каждом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ в формуле Тейлора для подынтегральной функции $g_m(x) = f(x) \cdot \varphi_m(x)$ всех слагаемых, кроме нулевого. Поэтому, используя Лагранжеву форму остаточного члена, с помощью (9) и обобщенной теоремы об интегральном среднем получим

$$\Delta_m = \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_m(\xi(x)) \cdot (x - x_k) dx = \sum_{k=1}^N g_m(\xi_k) \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{N} \right)^2 \sum_{k=1}^N g_m(\xi_k), \tag{15}$$

где $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Проиллюстрируем изложенное конкретным примером. Используем в качестве базисных функций систему гармоник:

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{i \frac{\pi m x}{l}},$$

где i – мнимая единица. В этом случае (см. (11), (15))

$$S_n(x) = \sum_{m=-n}^n a_m^* \varphi_m(x); \quad a_m^* = \frac{\sqrt{2l}}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) e^{-i \frac{\pi m x_k}{l}}; \tag{16}$$

$$\Delta_m = \frac{(2l)^{3/2}}{2N^2} \sum_{k=1}^N \left[f'(\xi_k) - i \frac{\pi m}{l} f(\xi_k) \right] e^{-i \frac{\pi m \xi_k}{l}}, \tag{17}$$

где x_k определено формулой (9), в которой следует положить $a = -l$, $b = l$.

Если скорость изменения $f(x)$ невелика ($f'(x) \leq f(x)\pi/l$), для оценки модуля Δ_m можно при больших m пренебречь первым слагаемым в квадратных скобках в (17):

$$\Delta_m \approx -i \frac{\pi m (2l)^{3/2}}{l 2N^2} \sum_{k=1}^N f(\xi_k) e^{-i \frac{\pi m \xi_k}{l}}. \tag{17'}$$

Рассматривая сумму в (17') как интегральную

$$\frac{2l}{N} \sum_{k=1}^N f(\xi_k) e^{-i \frac{\pi m \xi_k}{l}} \approx \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{\pi m x}{l}} dx = \sqrt{2l} a_m,$$

получим из (17')

$$\Delta_n \approx -i \frac{\pi n}{N} a_n. \quad (18)$$

Подставив последнее выражение для Δ_n в (14), определим оптимальное n для приближения медленно меняющейся функции тригонометрическим многочленом:

$$n \approx \frac{N}{\pi} \approx 0,318 N. \quad (19)$$

В частности, для $f(x) = e^x$ и $l = \pi$ в (16) суммируются члены геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = e^{\frac{2\pi}{N}(1-im)}$$

(см. (9)) и первым членом

$$e^{x_1(1-im)} = e^{-\pi(1-im)} = e^{-\pi} (-1)^m.$$

Поэтому

$$a_n^* = \frac{\sqrt{2\pi}}{N} (e^{-\pi} - e^{\pi}) \frac{(-1)^n}{1 - e^{\frac{2\pi}{N}(1-im)}}, \quad (20)$$

что является адекватным приближением для

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-\pi} - e^{\pi}) \frac{(-1)^n}{in - 1} \quad (21)$$

лишь при $n \ll N$ ¹. С ростом n ошибка накапливается. Оптимальное n (см. (11), (14)) определим из условия:

$$|a_n^* - a_n|^2 = (a_n^* - a_n)(a_{-n}^* - a_{-n}) \leq |a_n|^2,$$

откуда

$$|a_n^*|^2 \leq 2 \operatorname{Re}(a_n^* a_{-n}) \approx 2 \operatorname{Im} a_n^* \operatorname{Im} a_{-n}. \quad (22)$$

Последнее равенство в (22) записано с учетом того обстоятельства (см. (21)), что при больших n

$$\operatorname{Re} a_n \ll \operatorname{Im} a_n \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-\pi} - e^{\pi}) \frac{(-1)^n}{n}. \quad (23)$$

В актуальном диапазоне ($N > n \gg 1$) из (20) следует:

$$|a_n^*|^2 \approx \frac{2\pi}{N^2} (e^{-\pi} - e^{\pi})^2 \frac{1}{2(1 - \cos(2\pi n/N))}; \quad (24)$$

$$\operatorname{Im} a_n^* \approx -\frac{\sqrt{2\pi}}{N} (e^{-\pi} - e^{\pi}) \frac{(-1)^n \sin(2\pi n/N)}{2(1 - \cos(2\pi n/N))}. \quad (25)$$

Подставив (23) – (25) в (22), получим трансцендентное уравнение

$$\frac{n\pi}{N} = \sin\left(\frac{2n\pi}{N}\right) \quad (26)$$

¹ Точное значение a_n получено элементарным интегрированием (8) с $f(x) = e^x$, $a = -\pi$, $b = \pi$.

с единственным положительным корнем

$$n = 0,302 N . \tag{27}$$

Графики $\delta(n)$, построенные для различных N численными методами (рис. 1), полностью подтверждают последний результат, с которым, как нетрудно видеть, хорошо (с относительной погрешностью 5 %) согласуется полученная из общих соображений (без конкретизации $f(x)$) оценка (19). Отличие между (19) и (27), по-видимому, связано с отбрасыванием при получении (19) первого слагаемого в квадратных скобках в (17). Совершаемая при этом ошибка действительно невелика. С учетом того, что n и N целые, она начинает проявляться (к n добавляется лишняя единица) лишь при $N > 62$. Что в свою очередь также несущественно, так как минимум $\delta(n)$ пологий (см. рис. 1).

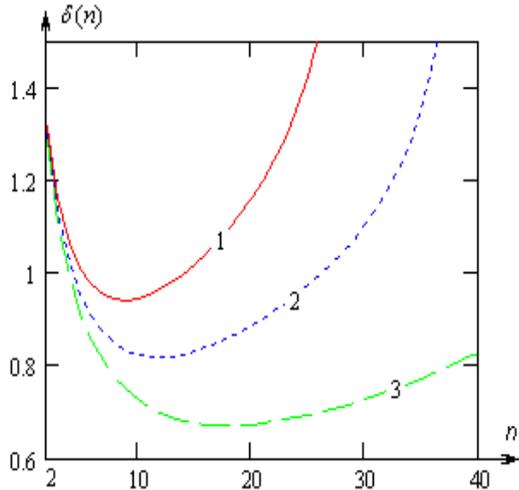


Рис. 1. Среднеквадратическое отклонение n -го многочлена Фурье от своей функции $f(x) = e^x$, заданной N табличными значениями:
1 – $N = 30$; 2 – $N = 40$; 3 – $N = 60$

На рисунке 2 представлены графики экспоненты и ее тригонометрических многочленов, полученных на основе тридцати табличных значений. Видно, что отклонение от оптимального $n = 0,3N = 9$ как в одну, так и в другую сторону ухудшает степень аппроксимации. Воспользуемся тем, что в данном случае, когда $f(x)$ известна, можно найти вклад в погрешность, связанный с нецелесообразностью учета высших гармоник для $N \neq \infty$. Подставив в $S_n(x)$ в (16) вместо a_n^* точные значения a_n , определяемые формулой (21), обратим в ноль первое слагаемое в (12). При этом интегрирование в (7) с $a = -\pi$, $b = \pi$ и $f(x) = e^x$ дает $2\pi\delta_2^2(n)$. Полагая здесь $n = 0,3N$, получим для различных N вклад δ_2 в минимальное δ (рис. 3, кривая 2). Там же для сравнения приведено минимальное среднеквадратическое отклонение $\delta(0,3N)$ (кривая 1). Видно, что при оптимальном $n = 0,3N$ величины δ_2 и $\delta_1 = \sqrt{\delta^2 - \delta_2^2}$ одного порядка малости.

Воспользуемся тем, что в данном случае, когда $f(x)$ известна, можно найти вклад в погрешность, связанный с нецелесообразностью учета высших гармоник для $N \neq \infty$. Подставив в $S_n(x)$ в (16) вместо a_n^* точные значения a_n , определяемые формулой (21), обратим в ноль первое слагаемое в (12). При этом интегрирование в (7) с $a = -\pi$, $b = \pi$ и $f(x) = e^x$ дает $2\pi\delta_2^2(n)$. Полагая здесь $n = 0,3N$, получим для различных N вклад δ_2 в минимальное δ (рис. 3, кривая 2). Там же для сравнения приведено минимальное среднеквадратическое отклонение $\delta(0,3N)$ (кривая 1). Видно, что при оптимальном $n = 0,3N$ величины δ_2 и $\delta_1 = \sqrt{\delta^2 - \delta_2^2}$ одного порядка малости.

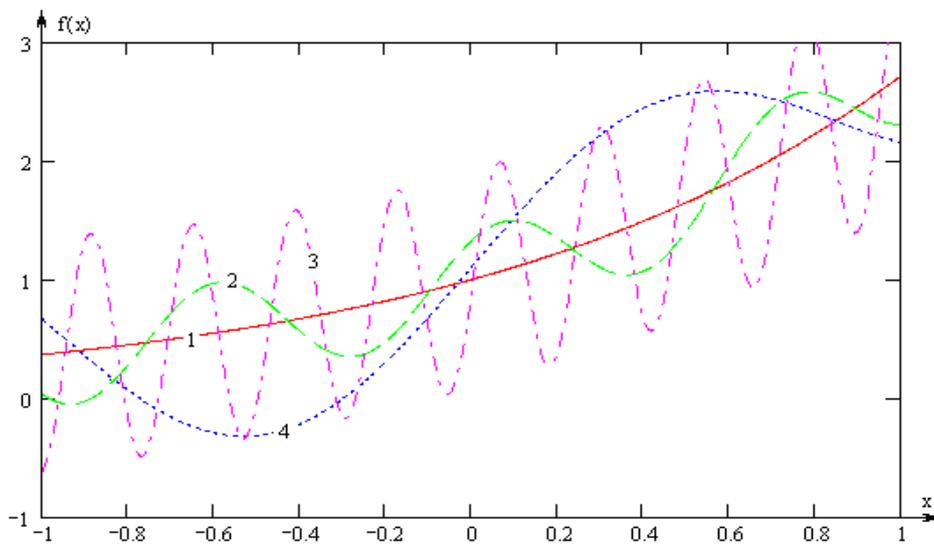


Рис. 2. Функция e^x (кривая 1) и ее тригонометрические многочлены n -го порядка, найденные на основе 30 табличных значений:
2 – $n = 9$; 3 – $n = 26$; 4 – $n = 4$

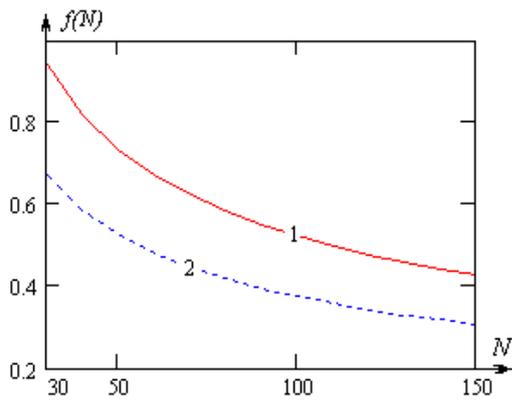


Рис. 3. Минимальное среднее квадратическое отклонение $\delta(0,3N)$ многочлена Фурье от экспоненты, заданной N табличными значениями (кривая 1), и вклад в него $\delta_2(0,3N)$, обусловленный невозможностью учета высших гармоник (кривая 2)

несколько первых коэффициентов Фурье. Подчеркнем, однако, исключительно вероятностный характер подобных оценок. Единственное, что можно утверждать достоверно – при увеличении количества экспериментальных точек, в соответствии с изложенным выше, n в (12) растет. То есть вклад второй суммы (13) в $\delta(n)$ стремится к нулю как остаток сходящегося ряда.

Заметим, что порядок оптимального n не изменится, если вместо формул прямоугольников при вычислении a_n^* использовать более точные формулы трапеций или парабол, так как в этом случае вместо (18) получим

$$\frac{|\Delta_n|}{|a_n^*|} \sim \left(\frac{n\pi}{N}\right)^p, \quad p = 2, 3.$$

Тем не менее, при использовании более точных формул табличного интегрирования за счет слагаемых с малыми m первая сумма в (13) заметно уменьшится.

Вклад второй суммы в среднее квадратическое отклонение (12) принципиально не оценивается без гипотез относительно вида $f(x)$. Например, зависимость a_m от своего номера можно экстраполировать, опираясь на найденные с высокой точностью не-

ЛИТЕРАТУРА

1. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
2. Ехилевский, С.Г. Построение сложных поверхностей с учетом поля градиентов / С.Г. Ехилевский, В.И. Пилюгин // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2005. – № 4. – С. 35 – 37.
3. Ланина, Е.Г. Ряды Фурье / Е.Г. Ланина, В.В. Подъяпольский. – М.: Изд-во НОУ «Современный Гуманитарный Институт», 2001. – 373 с.

Поступила 02.02.2007