PolotskSU

УДК 517.944

ТРЕХТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

канд. пед. наук, доц. В.С. ВАКУЛЬЧИК, канд. физ.- мат. наук, доц. Н.В. ЦЫВИС
(Полоцкий государственный университет)

Для дифференциально-операторных уравнений четвертого порядка рассматривается трехточечная задача с однородными условиями, заданными в точках $t=0$, $t=T_1$ и $t=T$, и условиями согласования в точке $t=T_1$. Функции u *и* f *– функции переменного $t\in(0,T)$, принимающие значения в гильбертовом пространстве H. Исследование данной задачи проводится методом энергетических неравенств, суть которого можно охарактеризовать следующим образом. С рассматриваемой задачей связано операторное уравнение с областью определения оператора L, включающей в себя условия, накладываемые на функцию* u *в точках $t=0$, $t=T_1$ и $t=T$. Для оператора L, порожденного рассматриваемой задачей, устанавливается энергетическое неравенство, затем доказывается, что оператор L допускает замыкание и вводится определение сильного решения операторного уравнения.*

1. Постановка задачи. На интервале (0, *T*) рассмотрим трехточечную задачу:

$$Lu \equiv \frac{d^4u}{dt^4} - Au = f(t); \tag{1}$$

$$u(0) = u(T_1) = u''(T_1) = u(T) = 0,\ 0 < \mathrm{t} < \mathrm{T}; \tag{2}$$

$$u'(T_1-0) = \alpha_1 u'(T_1+0);\quad u'''(T_1-0) = \alpha_3 u'''(T_1+0);\quad \alpha_1\cdot\alpha_3 T_1 = T_1 - T. \tag{3}$$

Здесь *u* и *f* – функции переменного $t\in(0,T)$, принимающие значения в гильбертовом пространстве *H*, норму и скалярное произведение в котором обозначим символами $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ соответственно; *A* – линейный самосопряженный и положительный оператор в *H* с областью определения $D(A)$, т.е. для оператора *A* справедливо неравенство:

$$(Av,\ v) \ge 0,\ \forall v\in D(A), \tag{4}$$

и при каждом $\rho > 0$ оператор $A_\rho = A + \rho I$ имеет в *H* ограниченный обратный оператор A_ρ^{-1}.

В точке $t=T_1$ на функцию $u(t)$ наложим дополнительные условия (условия сопряжения), которые имеют вид (3).

Для дифференциально-операторных уравнений изучались в основном двухточечные краевые задачи [2 – 6]. Трехточечные задачи с условиями сопряжения в точке $t=T_1$ рассмотрены в [1] для дифференциально-операторных уравнений различных порядков, рассматриваемых отдельно на интервалах $(0,T_1)$ и (T_1,T) соответственно, а в [7] и [8] рассмотрена трехточечная задача с нулевыми начальными условиями в точках $t=0$, $t=T_1$ и $t=T$.

2. Энергетическое неравенство. Задаче (1) – (4) поставим в соответствие оператор *L* с областью определения *D(L)*, состоящей из функций $u\in L_2((0,T),H)$, $Au(t)\in L_2((0,T),H)$, и $u(t)$ удовлетворяет условиям (2) и (3). Оператор *L* рассматривается из *E* в *F*, где *E* – гильбертово пространство, полученное пополнением множества *D*(*L*) по норме:

$$\|u\|_E^2 = \int_0^T \left(\left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\| + \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 + \|u\|^2 + (Au,\ u) \right) dt,$$

а *F* – банахово пространство, полученное пополнением $L_2\big((0,T),H\big)$ по норме:

$$\|f\|_F = \sup_{v\in E} \frac{\left| \int_0^T (f,\ M_v)dt \right|}{\|v\|_E},$$

PolotskSU

где оператор Mv определяется выражением:

$$Mv = \begin{cases} t\dfrac{dv}{dt} - v, \ \ 0 \le t \le T_1; \\ (t-T)\dfrac{dv}{dt} - v, \ T_1 < t \le T. \end{cases}$$

Для установления энергетического неравенства нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА. Для любой функции $u \in D(L)$ справедливы неравенства:

$$\int_0^T \|u\|^2 dt \le 4\int_0^T \varphi(t)\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt\,; \tag{5}$$

$$\int_0^T \varphi(t)\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt \le 4\int_0^T \varphi(t)\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 dt\,. \tag{6}$$

Здесь $\varphi(t) = \begin{cases} t, \ \ 0 \le t \le T_1; \\ T-t, \ T_1 < t \le T. \end{cases}$

Доказательство. Для доказательства неравенства (5) воспользуемся тождествами:

$$\int_0^{T_1} (u,u)dt = -2\,\mathrm{Re}\int_0^{T_1}\left(tu, \frac{du}{dt}\right)dt\,;$$

$$\int_{T_1}^{T} (u,u)dt = 2\,\mathrm{Re}\int_{T_1}^{T}(T-t)\left(u, \frac{du}{dt}\right)dt\,.$$

Оценивая правые части последних тождеств сверху и используя неравенство Коши – Буняковского, получим неравенства:

$$\int_0^{T_1} \|u\|^2 dt \le 2\cdot T_1^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{T_1}\|u\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^{T_1} t\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}; \tag{7}$$

$$\int_{T_1}^{T} \|u\|^2 dt \le 2(T-T_1)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{T_1}^{T}\|u\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{T_1}^{T} (T-t)\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

из которых следует, что

$$\int_0^{T_1} \|u\|^2 dt \le 4T_1\cdot\int_0^{T_1} t\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt\,;$$

$$\int_{T_1}^{T} \|u\|^2 dt \le 4(T-T_1)\int_{T_1}^{T} (T-t)\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt\,.$$

Из последних неравенств и определения функции $\varphi(t)$ получаем искомое неравенство (5).

При доказательстве неравенства (6) воспользуемся тождествами:

$$\int_0^{T_1} t\cdot\left(\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\right)dt = -\mathrm{Re}\int_0^{T_1} t\cdot\left(\frac{d^2u}{dt^2}, u\right)dt\,;$$

$$\int_{T_1}^{T} \frac{t}{T}\cdot\left(\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\right)dt = -\mathrm{Re}\int_{T_1}^{T} (T-t)\cdot\left(\frac{d^2u}{dt^2}, u\right)dt\,.$$

PolotskSU

Оценивая сверху правые части этих тождеств и используя неравенство Коши – Буняковского, получим неравенства:

$$\int_0^{T_1} t\cdot\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt \le \left(\int_0^{T_1} t\cdot\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{T_1} t\cdot\|u\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\int_{T_1}^{T} (T-t)\cdot\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt \le \left((T-t)\cdot\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{T_1}^{T} (T-t)\cdot\|u\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оценивая сверху правые части неравенств и используя неравенства (7) и (8), получим неравенства

$$\int_0^{T_1} t\cdot\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt \le 2T_1\left(\int_0^{T_1} t\cdot\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{T_1} t\cdot\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\int_{T_1}^{T} (T-t)\cdot\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt \le 2(T-T_1)\left(\int_{T_1}^{T} (T-t)\cdot\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{T_1}^{T} (T-t)\cdot\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

из которых получим неравенства

$$\int_0^{T_1} \frac{t}{T_1}\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt \le 4\int_0^{T_1} T_1\cdot t\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 dt;$$

$$\int_{T_1}^{T} (t-T)\cdot\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt \le 4\int_{T_1}^{T} (T-T_1)(T-t)\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 dt.$$

Из последних неравенств и определения функции $\varphi(t)$ следует неравенство (6). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Для любой функции $u\in D(L)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_E \le C\cdot\|Lu\|_F, \tag{9}$$

где $C=\max((1+4T_1)^2,\ (1+4(T-T_1))^2)$.

Доказательство. Интегрируя по частям и учитывая условия (2) и (3), получим тождества:

$$2\int_0^{T_1}\left(\frac{d^4u}{dt^4},\ t\frac{du}{dt}-u\right)dt=\int_0^{T_1}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)^2 dt;$$

$$2\int_{T_1}^{T}\left(\frac{d^4u}{dt^4},\ (t\text{-}T)\frac{du}{dt}-u\right)dt=\int_{T_1}^{T}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)^2 dt;$$

$$-2\int_0^{T_1}\left(Au,\ t\frac{du}{dt}-u\right)dt=3\int_{T_1}^{T}(Au,u)\,dt;$$

$$-2\int_{T_1}^{T}\left(Au,(t-T)\frac{du}{dt}-u\right)dt=3\int_{T_1}^{T}(Au,u)\,dt.$$

PolotskSU

После этого проинтегрируем функцию $-2\operatorname{Re}(Lu, Mu)$ по t: сначала от 0 до T_1, а затем от T_1 до T. Воспользуемся последними тождествами (сложим их), с учетом непрерывности $u(t)$, $u'(t)$ и $u''(t)$ в точке $t = T_1$, получим:

$$\int_0^T \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\| dt + 3\int_0^T \left(Au, u \right) dt = -2\operatorname{Re}\int_0^T (Lu, Mu) dt .$$

Оценивая левую часть этого тождества снизу величиной $\|u\|_E^2$ с учетом (4) и неравенств, установленных в лемме, а правую – сверху величиной $\|Lu\|_F \cdot \|u\|_E$, получим неравенство (9). Теорема доказана.

Рассмотрим оператор $L: E \to F$ с областью определения $D(L)$. С помощью критерия замыкаемости в банаховых пространствах [9, с. 92] устанавливается, что оператор L допускает замыкание. Символом $\overline{L}$ обозначим замыкание оператора L. Функцию $u \in E$ отнесем к $D(\overline{L})$, если существует такая последовательность $u_n \to u$ в E и $Lu_n \to f$ в F. При этом $\overline{L}u \equiv f = \lim\limits_{n\to\infty} Lu_n$.

Решение уравнения

$$\overline{L}u = f, \ f \in F \tag{10}$$

называется сильным решением соответствующей многоточечной задачи.

С помощью предельного перехода неравенство (9) распространяется на $u \in D(\overline{L})$, т.е. справедливо неравенство:

$$\|u\|_E \le C \cdot \left\| \overline{L}u \right\|, \ u \in D(\overline{L}) . \tag{11}$$

Из неравенства (11) стандартным образом устанавливается, что множество значений $R(\overline{L})$ оператора $\overline{L}$ замкнуто в F, $R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$, на $R(\overline{L})$ существует ограниченный обратный оператор $(\overline{L})^{-1}$.

Таким образом однозначная разрешимость уравнения (10) при любом $f \in F$, или, что одно и то же, существование и единственность сильного решения соответствующей многоточечной задачи, будет установлена, если будет доказана плотность в F множества $R(L)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдо, С.А. Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. I. Априорные оценки / С.А. Абдо, Н.И. Юрчук // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 3. – С. 417 – 425.
2. Горбачук, В.И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – Киев: Наукова думка, 1984. – 280 с.
3. Дезин, А.А. Операторы с первой производной по «времени» и нелокальные условия / А.А. Дезин // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61 – 86.
4. Чесалин, В.И. Задача с нелокальными условиями для абстрактных уравнений Лява / В.И. Чесалин, Н.И. Юрчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1973. – № 6. – С. 30 – 39.
5. Юрчук, Н.И. Априорные оценки решений граничных задач для некоторых дифференциально-операторных уравнений / Н.И. Юрчук // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т. 12, № 4. – С. 729 – 739.
6. Юрчук, Н.И. Разрешимость граничных задач для некоторых дифференциально-операторных уравнений / Н.И. Юрчук // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 4. – С. 626 – 636.
7. Цывис, Н.В. Трехточечная задача для дифференциально-операторных уравнений третьего порядка / Н.В. Цывис, Н.И. Юрчук // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 5. – С. 872 – 877.
8. Цывис, Н.В. Трехточечная задача для дифференциально-операторных уравнений нечетного порядка / Н.В. Цывис. – Деп. в ВИНИТИ 10.08.87, № 580 Л. – В. 87.
9. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

Поступила 26.01.2007