УДК 517.44

$\mathcal{L}_{\nu,r}$ - ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРАХ

д-р физ.-мат. наук, проф. А.А. КИЛБАС
(Белорусский государственный университет, Минск),
О.В. СКОРОМНИК
(Полоцкий государственный университет)

Рассматриваются интегральные преобразования ${}_jI^{c}_{\sigma,\omega,\delta}$ $(j=1,2,3,4)$, *содержащие в ядре гипергеометрическую функцию Гаусса, в весовом пространстве* $\mathcal{L}_{\nu,r}$ $(\nu\in\mathbb{R},\ 1\le r<\infty)$ *измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций* f *со степенным весом на положительной полуоси:*

$$\mathcal{L}_{\nu,r}=\|f\|_{\nu,r}=\left\{f:\|f\|_{\nu,r}=\left(\int_0^\infty\left|t^\nu f(t)\right|^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}<\infty\right\}.$$

Показано, что данные преобразования являются модификациями так называемого G-преобразования, содержащими в ядрах G-функцию Мейера. На основании этого даются условия ограниченности операторов преобразований ${}_jI^{c}_{\sigma,\omega,\delta}$ $(j=1,2,3,4)$ *из одного пространства* $\mathcal{L}_{\nu,r}$ *в другое. Доказываются аналоги формулы интегрирования по частям; выводятся различные формы интегральных представлений; дается описание образов этих операторов в* $\mathcal{L}_{\nu,r}$, *а также устанавливаются формулы их обращения.*

1. Введение

Пусть $\sigma,\omega\in\mathbb{R},\delta>0$.

Рассмотрим четыре интегральных преобразования, содержащих гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1(a,b;c;z)$ в ядре:

$${}_1\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi(x)=x^\sigma\int_0^x\frac{\left(x^\delta-t^\delta\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x^\delta}{t^\delta}\right)t^\omega\varphi(t)dt\,; \tag{1}$$

$${}_2\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi(x)=x^\sigma\int_0^x\frac{\left(x^\delta-t^\delta\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{t^\delta}{x^\delta}\right)t^\omega\varphi(t)dt\,; \tag{2}$$

$${}_3\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi(x)=x^\sigma\int_x^\infty\frac{\left(t^\delta-x^\delta\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x^\delta}{t^\delta}\right)t^\omega\varphi(t)dt\,; \tag{3}$$

$${}_4\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi(x)=x^\sigma\int_x^\infty\frac{\left(t^\delta-x^\delta\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{t^\delta}{x^\delta}\right)t^\omega\varphi(t)dt\,, \tag{4}$$

Такая функция определяется при $|z|<1$ как сумма гипергеометрического ряда:

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\cdot\frac{z^k}{k!}, \tag{5}$$

причем $c\ne0,-1,-2,\ldots$, где $(a)_k=a(a+1)(a+2)\ldots(a+k-1)$; $k=1,2,3\ldots,(a)_0\equiv1$ – символ Похгаммера.

Ряд (1) сходится при $|z|<1$ и при $|z|=1$, $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$, а при остальных значениях z функция Гаусса определяется как аналитическое продолжение этого ряда. Один из способов такого продолжения – использование интегрального представления Эйлера:

$$ {}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt\,, \tag{6}$$

$$0<\operatorname{Re}b<\operatorname{Re}c, \left|\arg(1-z)\right|<\pi\,,$$

где правая часть определена при указанных условиях, обеспечивающих сходимость интеграла.

В настоящей работе преобразования (1) – (4) изучаются в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\nu,r}$, измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$, для которых $\|f\|_{\nu,r}<\infty$, где

$$\|f\|_{\nu,r}=\left(\int_0^\infty \left|t^\nu f(t)\right|^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\quad (1\le r<\infty, \nu\in\mathbb{R})\,. \tag{7}$$

В частности, все полученные результаты верны для классических пространств r-суммируемых функций $L_r(\mathbb{R}_+)=\mathfrak{L}_{\frac{1}{r},r}$ $(1\le r<\infty)$.

В работе даются условия ограниченности и взаимной однозначности операторов преобразований (1) – (4) из одних пространств $\mathfrak{L}_{\nu,r}$ в другие, выводятся различные формы интегральных преобразований и дается описание образов этих операторов в $\mathfrak{L}_{\nu,r}$, а также устанавливаются формулы их обращения.

2. Предварительные сведения

G – функцией Мейера порядка (m,n,p,q), где $0\le m\le q, 0\le n\le p$, называется функция, определяемая интегралом Меллина – Барнса [1, § 1.3]:

$$G_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right]=G_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}a_1,\ \dots,\ a_p\\ b_1,\ \dots,\ b_q\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^m\Gamma(b_j+s)\prod_{i=1}^n\Gamma(1-a_i-s)}{\prod_{i=n+1}^p\Gamma(a_i+s)\prod_{j=m+1}^q\Gamma(1-b_j-s)}z^{-s}ds\,, \tag{8}$$

где L – специально выбранный бесконечный контур, оставляющий полюса $s=-b_j-k,\ j=1,\ 2,\ \dots,\ m,$ $k=0,\ 1,\ 2,\ \dots$, слева, а полюса $s=1-a_j+k,\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n, k=0,\ 1,\ 2,\ \dots$, – справа.

Отметим, что функция (5) является частным случаем G – функции Мейера.

Для функции $f\in\mathfrak{L}_{\nu,r}\ (1\le r\le 2)$ преобразование Меллина $\mathfrak{M}f$ определяется равенством [2]:

$$(\mathfrak{M}f)(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(e^\tau)e^{s\tau}d\tau\quad \left(s=\nu+it;\ \nu,t\in\mathbb{R}\right). \tag{9}$$

Если $f\in\mathfrak{L}_{\nu,r}\bigcap\mathfrak{L}_{\nu,1},\quad \operatorname{Re}(s)=\nu$, то (9) совпадает с обычным преобразованием Меллина:

$$(\mathfrak{M}f)(s)=f^*(s)=\int_0^{+\infty}f(t)t^{s-1}dt\ . \tag{10}$$

G- преобразованием называют интегральное преобразование [3]:

$$(Gf)(x)=\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[xt\left|\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]f(t)dt\,, \tag{11}$$

содержащее *G*-функцию Мейера (8) в ядре.

Преобразование Меллина от G-функции Мейера для достаточно хороших функций f дается формулой [3]:

$$\left(\mathcal{M}Gf\right)(s)=\mathrm{G}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\middle|s\right](\mathcal{M}f)(1-s), \tag{12}$$

где

$$\mathrm{G}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\middle|s\right]=\mathrm{G}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a)_p\\(b)_q\end{matrix}\middle|s\right]=\mathrm{G}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}a_1,...,a_p\\b_1,...,b_q\end{matrix}\middle|s\right]=\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-s)}{\prod\limits_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+s)\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)}. \tag{13}$$

Введем следующие числа [3]:

$$a^*=2(m+n)-p-q; \tag{14}$$

$$\Delta=q-p; \tag{15}$$

$$a_1^*=m+n-p; \tag{16}$$

$$a_2^*=m+n-q; \tag{17}$$

$$\alpha=\begin{cases}-\min\limits_{1\le j\le m}[\mathrm{Re}(b_j)], & m>0;\\ -\infty, & m=0;\end{cases} \tag{18}$$

$$\beta=\begin{cases}1-\min\limits_{1\le i\le n}[\mathrm{Re}(a_i)], & n>0;\\ \infty, & n=0;\end{cases} \tag{19}$$

$$\mu=\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{i=1}^{p}a_i+\frac{p-q}{2}; \tag{20}$$

$$\alpha_0=\begin{cases}\max\limits_{m+1\le j\le q}\left[\mathrm{Re}(b_j)\right], q>m;\\ -\infty, q=m;\end{cases} \tag{21}$$

$$\beta_0=\begin{cases}\min\limits_{n+1\le i\le h}\left[\mathrm{Re}(a_i)\right]+1, p>n;\\ \infty, p=n.\end{cases} \tag{22}$$

Назовем исключительным множеством E_{G} для функции $\mathrm{G}(s)$, определенной в (13), множество вещественных чисел ν таких, что $\alpha<1-\nu<\beta$ и $\mathrm{G}(s)$ имеет нули на прямой $\mathrm{Re}(s)=1-\nu$.

Нам потребуются также некоторые специальные интегральные операторы. Для описания образа необходимы дробные интегралы типа Эрдейи – Кобера $\mathrm{I}_{0+;\sigma,\eta}^{\alpha}$ и $\mathrm{I}_{-;\sigma,\eta}^{\alpha}$, определяемые при $x\in\mathbb{R}_+$ следующими формулами [1, § 18.1]:

$$\left(\mathrm{I}_{0+;\sigma,\eta}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\left(x^\sigma-t^\sigma\right)^{\alpha-1}t^{\sigma\eta+\sigma-1}f(t)dt, \tag{23}$$

$$\left(\mathrm{I}_{-;\sigma,\eta}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\left(t^\sigma-x^\sigma\right)^{\alpha-1}t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1}f(t)dt, \tag{24}$$

где $\mathrm{Re}(\alpha)>0;\sigma>0,\eta\in\mathbb{R}$.

3. Преобразования $_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b),\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ как *G*-преобразования

Найдем преобразование Меллина от $_1\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$:

$$\left(\mathcal{M}\,{}_1\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi\right)(s)=\int_0^\infty x^{\sigma+s-1}dx\int_0^x\frac{(x^\delta-t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x^\delta}{t^\delta}\right)t^\omega\varphi(t)dt=$$

$$=\int_0^\infty t^\omega\varphi(t)dt\int_t^\infty x^{\sigma+s-1}\frac{(x^\delta-t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x^\delta}{t^\delta}\right)dx=$$

$$=[x^\delta=y^\delta t^\delta,\ x=yt,\ dx=tdy,\ x=t\to y=1,\ x=\infty\to y=\infty]=$$

$$=\int_0^\infty t^\omega\varphi(t)dt\int_1^\infty(yt)^{\sigma+s-1}\frac{(y^\delta t^\delta-t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-y^\delta\right)tdy=\int_0^\infty t^{\omega+\delta c-\delta+\sigma+s}\varphi(t)dt\times$$

$$\times\int_1^\infty y^{\sigma+s-1}\frac{(y^\delta-1)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-y^\delta\right)dy\,.$$

Используя [1, (10.17)], получаем:

$${}_2F_1\ (a,b;c;1-y^\delta)=(1-(1-y^\delta))^{-a}\,{}_2F_1\left(a,c-b;c;\frac{1-y^\delta}{1-y^\delta-1}\right)=y^{-a\delta}\,{}_2F_1\left(a,c-b;c;1-\frac{1}{y^\delta}\right).$$

Окончательно имеем:

$$\left(\mathcal{M}\,{}_1\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi\right)(s)=\int_0^\infty t^{\omega+\delta c-\delta+\sigma+s}\varphi(t)dt\int_1^\infty y^{\sigma+s-1-a\delta}\frac{(y^\delta-1)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,c-b;c;1-\frac{1}{y^\delta}\right)dy=$$

$$=\left[\frac{1}{y^\delta}=z,\ dy=-\frac{1}{\delta}z^{-\frac{1}{\delta}-1}dz;\ y=1\to z=1;\ y=\infty\to z=0\right]=\frac{1}{\delta}\int_0^1 z^{-\frac{1}{\delta}(\sigma+s-1-a\delta)}\frac{\left(\frac{1}{z}-1\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(a,c-b;c;1-z\right)z^{-\frac{1}{\delta}-1}dz\int_0^\infty t^{\omega+\delta c-\delta+\sigma+s}\varphi(t)dt=\frac{1}{\delta}\int_0^1 z^{-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}+\frac{1}{\delta}+a-c+1-\frac{1}{\delta}-1}\frac{(1-z)^{c-1}}{\Gamma(c)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(a,c-b;c;1-z\right)dz\int_0^\infty t^{\omega+\delta c-\delta+\sigma+s}\varphi(t)dt=\left(\mathcal{M}\varphi\right)(\omega+\delta c-\delta+\sigma+s+1)\times$$

$$\times\frac{1}{\delta}\frac{\Gamma\left(1+a-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}\right)\Gamma\left(1+a-c-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}+c-a-c+b\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}+a-c+c-a\right)\Gamma\left(1+a-c-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}+c-c+b\right)}=$$

$$=\frac{1}{\delta}\frac{\Gamma\left(1+a-c-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}\right)\Gamma\left(1+b-c-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}\right)\Gamma\left(1+a+b-c-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}\right)}\left(\mathcal{M}\varphi\right)(\omega+\delta(c-1)+1+(\sigma+s))=$$

$$=G^{0,2}_{2,2}\left[\begin{matrix}c-a & c-b\\ 0 & c-a-b\end{matrix}\middle|\frac{\sigma+s}{\delta}\right]\frac{1}{\delta}\left(\mathcal{M}\varphi\right)(\omega+\delta(c-1)+1+(\sigma+s))\,.$$

Получили

$$\left(\mathcal{M}\,{}_1\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi\right)(s)=G^{0,2}_{2,2}\left[\begin{matrix}c-a & c-b\\ 0 & c-a-b\end{matrix}\middle|\frac{\sigma+s}{\delta}\right]\frac{1}{\delta}\left(\mathcal{M}\varphi\right)(\omega+\delta(c-1)+1+(\sigma+s))\,.\qquad(25)$$

Определим параметры (14) – (20) в (25):

$$m=0,\quad n=2,\quad p=2,\quad q=2,\quad a_1=c-a,\quad a_2=c-b,\quad b_1=0,\quad b_2=c-a-b,$$

$$a^*=0,\ \Delta=0,\ a_1^*=0,\ a_2^*=0,\ \alpha=-\infty,$$

$$\beta=1-\max[\mathrm{Re}(c-a),\mathrm{Re}(c-b)],\ \mu=-c,$$

$$\theta=\delta^{-1}\left[\nu-\mathrm{Re}(\omega)-1\right]+1, k=\mathrm{Re}(\omega)+1-\nu-\mathrm{Re}(\sigma).$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$\left(\mathcal{M}\,{}_2\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi\right)(s)=\mathrm{G}^{0,2}_{2,2}\left[\begin{matrix}a+b & c\\ a & b\end{matrix}\middle|\frac{\sigma+s}{\delta}\right]\frac{1}{\delta}(\mathcal{M}\varphi)(\omega+\delta(c-1)+1+(\sigma+s)). \tag{26}$$

Определим параметры (14) – (20) в (26):

$$m=0,\quad n=2,\quad p=2,\quad q=2,\quad a_1=a+b,\quad a_2=c,\quad b_1=a,\quad b_2=b,$$

$$a^*=0,\ \Delta=0,\ a_1^*=0,\ a_2^*=0,\ \alpha=-\infty,$$

$$\beta=1-\max[\mathrm{Re}(c),\mathrm{Re}(a+b)],\ \mu=-c,$$

$$\theta=\delta^{-1}\left[\nu-\mathrm{Re}(\omega)-1\right]+1, k=\mathrm{Re}(\omega)+1-\nu-\mathrm{Re}(\sigma).$$

$$\left(\mathcal{M}\,{}_3\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi\right)(s)=\mathrm{G}^{0,2}_{2,2}\left[\begin{matrix}c-a & c-b\\ 0 & c-a-b\end{matrix}\middle|\frac{\sigma+s}{\delta}\right]\frac{1}{\delta}(\mathcal{M}\varphi)(\omega+\delta(c-1)+1+(\sigma+s)). \tag{27}$$

Определим параметры (14) – (20) в (27):

$$m=2,\quad n=0,\quad p=2,\quad q=2,\quad a_1=c-a,\quad a_2=c-b,\quad b_1=0,\quad b_2=c-a-b,$$

$$a^*=0,\ \Delta=0,\ a_1^*=0,\ a_2^*=0,\quad \alpha=-\min[0,\mathrm{Re}(c-a-b],\beta=\infty\ \ \mu=-c,$$

$$\theta=\delta^{-1}\left[\nu-\mathrm{Re}(\omega)-1\right]+1, k=\mathrm{Re}(\omega)+1-\nu-\mathrm{Re}(\sigma).$$

$$\left(\mathcal{M}\,{}_4\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi\right)(s)=\mathrm{G}^{2,0}_{2,2}\left[\begin{matrix}a+b & c\\ a & b\end{matrix}\middle|\frac{\sigma+s}{\delta}\right]\frac{1}{\delta}(\mathcal{M}\varphi)(\omega+\delta(c-1)+1+(\sigma+s)). \tag{28}$$

Определим параметры (14) – (20) в (28):

$$m=2,\quad n=0,\quad p=2,\quad q=2,\quad a_1=a+b,\quad a_2=c,\quad b_1=a,\quad b_2=b,$$

$$a^*=0,\ \Delta=0,\ a_1^*=0,\ a_2^*=0,\ \beta=\infty,$$

$$\alpha=-\min[\mathrm{Re}(a),\mathrm{Re}(b)],\ \mu=-c,\quad \theta=\delta^{-1}\left[\nu-\mathrm{Re}(\omega)-1\right]+1, k=\mathrm{Re}(\omega)+1-\nu-\mathrm{Re}(\sigma).$$

4. $\mathcal{L}_{\nu,r}$ -Теория преобразований ${}_j\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b),\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$\mathcal{L}_{\nu,2}$ и $\mathcal{L}_{\nu,r}$ -теории преобразований (1) – (4) будет следовать из соответствующих утверждений для G-преобразования [3, § 6; 4].

Следующая теорема дает $\mathcal{L}_{\nu,2}$ -теорию преобразований ${}_j\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b),\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4.$

ТЕОРЕМА 1

Пусть (a) $\alpha<1-\theta<\beta$;

(b) $a^*=0,\mathrm{Re}(-c)\le 0$.

Верны следующие утверждения:

a) преобразования ${}_j\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ являются инъективными элементами $[L_{\nu,r},\ L_{k,2}]$ и при $\mathrm{Re}(s)=k$ их преобразования Меллина имеют соответственно вид (25) – (28).

Если $\mathrm{Re}(-c)=0$ и $\theta\notin \mathrm{E}_G$, то преобразования ${}_j\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\,\delta}(a,b)$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ взаимно однозначно отображают $L_{\nu,2}$ на $L_{k,2}$;

b) для двух функций $f\in L_{\nu,2}$ и $g\in L_{k^*,2}$, где $k^*=\nu-\mathrm{Re}(\sigma)+\mathrm{Re}(\omega)$, верны равенства:

$$\int\limits_0^\infty f(x)\left({}_j\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}g\right)(x)dx=\int\limits_0^\infty\left({}_j\mathrm{I}^c_{\omega,\sigma;\delta}f\right)(x)g(x)dx\quad(j=1,\ 2,\ 3,\ 4); \tag{29}$$

c) пусть $\gamma\in\square$, $h>0$ и $f\in L_{\nu,2}$. Если $\mathrm{Re}(\gamma)>(1-\theta)h-1$, то почти для всех $x>0$ справедливы представления:

$$({}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega,\delta}(a,b)f)(x)=\frac{1}{\delta}hx^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h}\frac{d}{dx}x^{\delta(\gamma+1)/h}\int\limits_0^\infty G^{0,3}_{3,3}\left[x^\delta t^\delta\,\middle|\,\begin{matrix}-\gamma,\ c-a, & c-b\\ 0, & c-a-b,-\gamma-1\end{matrix}\right]t^\omega f(t)dt; \tag{30}$$

$$({}_2\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega,\delta}(a,b)f)(x)=\frac{1}{\delta}hx^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h}\frac{d}{dx}x^{\delta(\gamma+1)/h}\int\limits_0^\infty G^{0,3}_{3,3}\left[x^\delta t^\delta\,\middle|\,\begin{matrix}-\gamma,\ a+b, & c\\ a, & b,-\gamma-1\end{matrix}\right]t^\omega f(t)dt; \tag{31}$$

$$({}_3\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega,\delta}(a,b)f)(x)=\frac{1}{\delta}hx^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h}\frac{d}{dx}x^{\delta(\gamma+1)/h}\int\limits_0^\infty G^{2,1}_{3,3}\left[x^\delta t^\delta\,\middle|\,\begin{matrix}-\gamma,\ c-a, & c-b\\ 0, & c-a-b,-\gamma-1\end{matrix}\right]t^\omega f(t)dt; \tag{32}$$

$$({}_4\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega,\delta}(a,b)f)(x)=\frac{1}{\delta}hx^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h}\frac{d}{dx}x^{\delta(\gamma+1)/h}\int\limits_0^\infty G^{2,1}_{3,3}\left[x^\delta t^\delta\,\middle|\,\begin{matrix}-\gamma,\ a+b, & c\\ a, & b,-\gamma-1\end{matrix}\right]t^\omega f(t)dt. \tag{33}$$

Если $\mathrm{Re}(\gamma)<(1-\theta)h-1$, то

$$({}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega,\delta}(a,b)f)(x)=-\frac{1}{\delta}hx^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h}\frac{d}{dx}x^{\delta(\gamma+1)/h}\int\limits_0^\infty G^{1,2}_{3,3}\left[x^\delta t^\delta\,\middle|\,\begin{matrix}c-a, & c-b,-\gamma\\ -\gamma-1, & 0,c-a-b\end{matrix}\right]t^\omega f(t)dt, \tag{34}$$

$$({}_2\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega,\delta}(a,b)f)(x)=-\frac{1}{\delta}hx^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h}\frac{d}{dx}x^{\delta(\gamma+1)/h}\int\limits_0^\infty G^{1,2}_{3,3}\left[x^\delta t^\delta\,\middle|\,\begin{matrix}a+b, & c,-\gamma\\ -\gamma-1, & a,b\end{matrix}\right]t^\omega f(t)dt; \tag{35}$$

$$({}_3\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega,\delta}(a,b)f)(x)=-\frac{1}{\delta}hx^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h}\frac{d}{dx}x^{\delta(\gamma+1)/h}\int\limits_0^\infty G^{3,0}_{3,3}\left[x^\delta t^\delta\,\middle|\,\begin{matrix}c-a, & c-b,-\gamma\\ -\gamma-1, & 0,c-a-b\end{matrix}\right]t^\omega f(t)dt; \tag{36}$$

$$({}_4\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega,\delta}(a,b)f)(x)=-\frac{1}{\delta}hx^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h}\frac{d}{dx}x^{\delta(\gamma+1)/h}\int\limits_0^\infty G^{3,0}_{3,3}\left[x^\delta t^\delta\,\middle|\,\begin{matrix}a+b, & c,-\gamma\\ -\gamma-1, & a,b\end{matrix}\right]t^\omega f(t)dt; \tag{37}$$

d) преобразования ${}_j\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ не зависят от ν в том смысле что, если ν и $\tilde{\nu}$ удовлетворяют (a) и (b) и если преобразования ${}_j\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ и ${}_j\tilde{\mathrm{I}}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ определены в пространстве $L_{\nu,2}$ и пространстве $L_{\nu,2}$ соответственно равенствами (25), (26), (27), (28), то ${}_j\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)f={}_j\tilde{\mathrm{I}}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)f$ $(j=1,2,3,4)$ для $f\in L_{\nu,2}\cap L_{\nu,2}$;

e) если $a^*=0,\mathrm{Re}(-c)<-1$, то для $f\in L_{\nu,2}$ преобразования ${}_j\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j=1,2,3,4)$ задаются соответственно равенствами (1) – (4).

Теоремы (2), (3) содержат $L_{\nu,2}$-теорию преобразований ${}_j\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j=1,2,3,4)$ в случае $a^*=0$.

ТЕОРЕМА 2

Пусть $a^* = \Delta = 0$, $\mathrm{Re}(-c) = 0$, $\alpha < 1-\theta < \beta$ и $1 < r < \infty$.

a) Преобразования ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, определенные в $\mathcal{L}_{\nu,2}$, могут быть продолжены на $\mathcal{L}_{\nu,r}$ как элементы [$\mathcal{L}_{\nu,r}$; $\mathcal{L}_{k,r}$].

b) Если $1 < r \le 2$, то преобразования ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j = 1,2,3,4)$ являются биективными на $\mathcal{L}_{\nu,r}$ и их преобразования Меллина задаются соответственно формулами (25), (26), (27), (28) для $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ и $\mathrm{Re}(s) = k$.

c) Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{\nu,2}$ и $g \in \mathcal{L}_{k^*,r'}$, где $k^* = \nu - \mathrm{Re}(\sigma) + \mathrm{Re}(\omega)$ и $r' = r/(r-1)$, верны равенства (29).

d) Если $\theta \notin E_g$, то преобразования ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ взаимно однозначно отображают $\mathcal{L}_{\nu,r}$ на $\mathcal{L}_{k,r}$, т. е.

$$ {}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\,(\mathcal{L}_{\nu,r}) = \mathcal{L}_{k,r}\ ,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{38} $$

e) Если $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то при $\mathrm{Re}(\gamma) > (1-\theta)h - 1$ представления ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j = 1,2,3,4)$ даются соответственно в равенствах (30), (31), (32), (33), а также в (34), (35), (36), (37) при $\mathrm{Re}(\gamma) < (1-\theta)h - 1$.

ТЕОРЕМА 3

Пусть $a^* = \Delta = 0$, $\mathrm{Re}(-c) < 0$, $\alpha < 1-\theta < \beta$ и $m > 0$ или $n > 0$.

Пусть $1 < r < \infty$.

a) Преобразования ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, определенные в $\mathcal{L}_{\nu,2}$, могут быть продолжены в $\mathcal{L}_{\nu,r}$ как элементы [$\mathcal{L}_{\nu,r}$; $\mathcal{L}_{k,s}$] для всех $s \ge r$ таких, что $\dfrac{1}{s} > \dfrac{1}{r} + \mathrm{Re}(-c)$.

b) Если $1 < r \le 2$, то преобразования ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ являются биективными на $\mathcal{L}_{\nu,r}$ и их преобразования Меллина задаются соответственно формулами (25), (26), (27), (28) для $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ и $\mathrm{Re}(s) = k$.

c) Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{\nu,2}$ и $g \in \mathcal{L}_{k^*,s}$, $k^* = \nu - \mathrm{Re}(\sigma) + \mathrm{Re}(\omega), 1 < s < \infty$, $1 \le \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} < 1 - \mathrm{Re}(-c)$, верны равенства (29).

d) Если $\theta \notin E_G$, то преобразования ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ являются биективными на $\mathcal{L}_{\nu,r}$ и

$$ {}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\,(\mathcal{L}_{\nu,r}) = \mathrm{I}^{c}_{-;\delta k,(\sigma/\delta-\alpha)/k}\,(\mathcal{L}_{k,r})\ \ (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{39} $$

для $k \ge 1$ и $m > 0$, и

$$ {}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\,(\mathcal{L}_{\nu,r}) = \mathrm{I}^{c}_{0+;\delta k,(\beta-\sigma/\delta)/k-1}\,(\mathcal{L}_{k,r})\ \ (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{40} $$

для $0 < k \le 1$ и $n > 0$. Если $\theta \in E_G$, то ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\,(\mathcal{L}_{k,r})$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ являются подмножествами правых частей (39) и (40) в соответствующих случаях.

e) Если $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то при $\mathrm{Re}(\gamma) > (1-\theta)h - 1$ интегральные представления ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ даются соответственно в равенствах (30), (31), (32), (33), а также в (34), (35), (36), (37) при $\mathrm{Re}(\gamma) < (1-\theta)h - 1$ соответственно. Если $\mathrm{Re}(-c) < -1$, то ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ $(j = 1,2,3,4)$ даются равенствами (1), (2), (3), (4).

5. Формулы обращения преобразований ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$, $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

Справедливы следующие утверждения об обратимости операторов (1) – (4), вытекающие из формул (25) – (28) и формул обращения *G*-преобразования [3, § 6].

ТЕОРЕМА 4. Пусть $a^* = 0$, $\alpha < 1-\theta < \beta$, $\alpha_0 < \theta < \beta_0$, где

$$\alpha_0 = \max\left[0, c-a-b\right]; \tag{41}$$

$$\beta_0 = \infty . \tag{42}$$

Пусть также $\gamma \in C$, $h > 0$.

a) Если $\mathrm{Re}(-c) = 0$ и $f \in L_{\nu,2}$, то при $\mathrm{Re}(\gamma) > \theta h - 1$ верно равенство:

$$f(x) = \delta h x^{\delta-\omega-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \int_0^\infty G_{3,3}^{2,1}\left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -\gamma, & -c+a, & -c+b \\ 0, & -c+a+b, & -\gamma-1 \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} \left({}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b) f\right)(t) dt . \tag{43}$$

Если $\mathrm{Re}(\gamma) < \theta h - 1$, то

$$f(x) = -\delta h x^{\delta-\omega-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \int_0^\infty G_{3,3}^{3,0}\left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -c+a, & -c+b, & -\gamma \\ -\gamma-1, & 0, & -c+a+b \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} \left({}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b) f\right)(t) dt . \tag{44}$$

b) Если $\Delta = \mathrm{Re}(-c) = 0$, $f \in L_{\nu,r}, 1 < r < \infty$, то формула обращения (43) имеет место при $\mathrm{Re}(\gamma) > \theta h - 1$, а формула (44) – при $\mathrm{Re}(\gamma) < \theta h - 1$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $a^* = 0$, $\alpha < 1-\theta < \beta$, $\alpha_0 < \theta < \beta_0$, где

$$\alpha_0 = \max\left[\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b)\right]; \tag{45}$$

$$\beta_0 = \infty . \tag{46}$$

Пусть также $\gamma \in \square$, $h > 0$.

a) Если $\mathrm{Re}(-c) = 0$ и $f \in L_{\nu,2}$, то при $\mathrm{Re}(\gamma) > \theta h - 1$ верно равенство:

$$f(x) = \delta h x^{\delta-\omega-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \int_0^\infty G_{3,3}^{2,1}\left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -\gamma, & -a-b, & -c \\ -a, & -b, & -\gamma-1 \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} \left({}_2\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b) f\right)(t) dt . \tag{47}$$

Если $\mathrm{Re}(\gamma) < \theta h - 1$, то

$$f(x) = -\delta h x^{\delta-\omega-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \int_0^\infty G_{3,3}^{3,0}\left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -c, & -a-b, & -\gamma \\ -\gamma-1, & -b, & -a \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} \left({}_2\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b) f\right)(t) dt . \tag{48}$$

b) Если $\Delta = \mathrm{Re}(-c) = 0$, $f \in L_{\nu,r}, 1 < r < \infty$, то формула обращения (47) имеет место при $\mathrm{Re}(\gamma) > \theta h - 1$, а формула (48) – при $\mathrm{Re}(\gamma) < \theta h - 1$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $a^* = 0$, $\alpha < 1-\theta < \beta$, $\alpha_0 < \theta < \beta_0$, где

$$\alpha_0 = -\infty ; \tag{49}$$

$$\beta_0 = \min\left[\mathrm{Re}(c-a), \mathrm{Re}(c-b)\right] + 1 . \tag{50}$$

Пусть также $\gamma \in \square$, $h > 0$.

a) Если $\mathrm{Re}(-c) = 0$ и $f \in L_{\nu,2}$, то при $\mathrm{Re}(\gamma) > \theta h - 1$ верно равенство:

$$f(x) = \delta h x^{\delta-\omega-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \int_0^\infty G_{3,3}^{0,3}\left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -\gamma, & -c+a, & -c+b \\ 0, & -c+a+b, & -\gamma-1 \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} \left({}_3\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b) f\right)(t) dt . \tag{51}$$

Если $\mathrm{Re}(\gamma) < \theta h - 1$, то

$$f(x) = -\delta h x^{\delta-\omega-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \int_0^\infty G_{3,3}^{1,2}\left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -c+a, & -c+b, & -\gamma \\ -\gamma-1, & 0, & -c+a+b \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} \left({}_3\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\delta}(a,b) f\right)(t) dt . \tag{52}$$

b) Если $\Delta = \mathrm{Re}(-c) = 0$, $f \in L_{\nu,r}, 1 < r < \infty$, то формула обращения (51) имеет место при $\mathrm{Re}(\gamma) > \theta h - 1$, а формула (52) при $\mathrm{Re}(\gamma) < \theta h - 1$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $a^* = 0$, $\alpha < 1 - \theta < \beta$, $\alpha_0 < \theta < \beta_0$, где

$$\alpha_0 = -\infty ; \tag{53}$$

$$\beta_0 = \min\left[\mathrm{Re}(a+b), \mathrm{Re}(c)\right] + 1 . \tag{54}$$

Пусть также $\gamma \in \square$, $h > 0$.

a) Если $\mathrm{Re}(-c) = 0$ и $f \in \mathcal{L}_{\nu,2}$, то при $\mathrm{Re}(\gamma) > \theta h - 1$ верно равенство:

$$f(x) = \delta h x^{\delta - \omega - \delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \int\limits_0^\infty G_{3,3}^{0,3}\left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -\gamma, -a-b, & -c \\ -a, \quad -b, & -\gamma-1 \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} \left({}_4\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b) f \right)(t) dt . \tag{55}$$

Если $\mathrm{Re}(\gamma) < \theta h - 1$, то

$$f(x) = -\delta h x^{\delta - \omega - \delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \int\limits_0^\infty G_{3,3}^{1,2}\left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -c, & -a-b, -\gamma \\ -\gamma-1, & -b, \quad -a \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} \left({}_4\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b) f \right)(t) dt . \tag{56}$$

b) Если $\Delta = \mathrm{Re}(-c) = 0$, $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$, $1 < r < \infty$, то формула обращения (55) имеет место при $\mathrm{Re}(\gamma) > \theta h - 1$, а формула (56) при $\mathrm{Re}(\gamma) < \theta h - 1$.

Работа выполнена в рамках НИР БГУ «Обобщенные гипергеометрические функции и приложения в математике и механике» (рег. № 20062060), входящей в республиканскую программу «Математические модели» (2006 – 2010).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника. – 1987.
2. Rooney, P.G. // Canad. J. Math. – 1973. – Vol. 25. – P. 1090 – 1102.
3. Kilbas, A.A. H-Transforms. Theory and Applications. Boca Raton / A.A. Kilbas, M. Saigo. – Florida: Chapman and Hall, 2004. – 540 p.
4. Килбас, А.А Обобщенное преобразование в весовых пространствах суммируемых функций / А.А, Килбас Е.К. Щетникович // Весці НАН Беларусі. Сер. Фіз.-мат. навук. – 2004. – № 2. – С. 14 – 19.

Поступила 19.03.2007