УДК 512.548

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ В *n*-АРНОЙ ПОЛУГРУППЕ

А.М. ГАЛЬМАК
(Могилёвский государственный университет продовольствия)

Большинство известных на сегодняшний день определений n-арной группы, в том числе и классические определения В. Дернте и Э. Поста, определяют n-арную группу как n-арную полугруппу, в которой разрешимы уравнения того или иного вида. Не в последнюю очередь именно этим фактом и объясняется интерес исследователей к вопросам, связанным с изучением разрешимости уравнений в n-арной полугруппе. При этом внимание акцентировалось прежде всего на уравнениях с одним неизвестным, в результате чего не было известно ни одного определения n-арной группы, содержащего аксиому о разрешимости уравнений с числом неизвестных более одного. В данной работе продолжаются исследования автора по изучению разрешимости в n-арной полугруппе именно таких уравнений. В качестве следствий основных результатов найдены новые необходимые и достаточные условия для того, чтобы n-арная полугруппа была n-арной группой.

Согласно Посту [1], n-арную группу $< A, [\ ] >$ можно определить как n-арную полугруппу, в которой для всех $a_1, \ldots, a_n, b \in A$ разрешимы уравнения:

$$[xa_2 \ldots a_n] = b; \tag{1}$$

$$[a_1 \ldots a_{n-1}y] = b. \tag{2}$$

Понятно, что уравнения (1) и (2) суть n-арные аналоги соответствующей групповой аксиомы о разрешимости уравнений $xa = b$ и $ay = b$. Нетрудно заметить, что n-арными аналогами последних являются также уравнения:

$$[x_1 \ldots x_{n-1}a] = b; \tag{3}$$

$$[ay_1 \ldots y_{n-1}] = b \tag{4}$$

с $n - 1$ неизвестными. Автор показал [2, 3], что n-арную группу $< A, [\ ] >$ можно определить как n-арную полугруппу, в которой для любых $a, b \in A$ разрешимы уравнения (3) и (4).

Данная работа посвящена нахождению в n-арной полугруппе решений уравнений:

$$[x_1 \ldots x_i a_{i+1} \ldots a_n] = b; \tag{5}$$

$$[a_1 \ldots a_{n-j} y_1 \ldots y_j] = b, \tag{6}$$

частными случаями которых при $i = j = 1$ являются уравнения (1) и (2), а при $i = j = n - 1$ – уравнения (3) и (4).

Предложение 1. Если в n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ для любых $a, b \in A$ разрешимо уравнение (3), то в ней для любого $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ и любых $a_{i+1}, \ldots a_n, b \in A$ разрешимо уравнение (5).

Доказательство. Обозначим через $(c_1, \ldots, c_{n-1})$ решение уравнения:

$$[x_1 \ldots x_{n-1}a_n] = b,$$

а через $(c_1^{(k)}, \ldots, c_{n-1}^{(k)})$ решение уравнения:

$$[x_1 \ldots x_{n-1}a_{n-k}] = c_{n-1}^{(k-1)}, \ k = 1, \ldots, n-i-1,$$

считая при этом $c_{n-1}^{(0)} = c_{n-1}$. Положим также

$$g = [c_i \ldots c_{n-2} c_1' \ldots c_{n-2}' \ldots c_1^{(n-i-2)} \ldots c_{n-2}^{(n-i-2)} c_1^{(n-i-1)} \ldots c_{n-1}^{(n-i-1)}].$$

Так как

$$[c_1 \ldots c_{i-1}[c_i \ldots c_{n-2} c_1' \ldots c_{n-2}' \ldots c_1^{(n-i-2)} \ldots c_{n-2}^{(n-i-2)} c_1^{(n-i-1)} \ldots c_{n-1}^{(n-i-1)}]a_{i+1} \ldots a_n] =$$
$$= [c_1 \ldots c_{i-1}c_i \ldots c_{n-2} c_1' \ldots c_{n-2}' \ldots c_1^{(n-i-2)} \ldots c_{n-2}^{(n-i-2)} [c_1^{(n-i-1)} \ldots c_{n-1}^{(n-i-1)} a_{i+1}]a_{i+2} \ldots a_n] =$$
$$= [c_1 \ldots c_{n-2} c_1' \ldots c_{n-2}' \ldots [c_1^{(n-i-2)} \ldots c_{n-2}^{(n-i-2)} c_{n-1}^{(n-i-2)} a_{i+2}]a_{i+3} \ldots a_n] =$$

$$= [c_1 \ldots c_{n-2}\, c_1' \ \ldots\ c_{n-2}' \ \ldots\ c_1^{(n-i-3)} \ \ldots\ c_{n-2}^{(n-i-3)}\, c_{n-1}^{(n-i-3)}\, a_{i+3} \ldots a_n] = \ldots$$
$$\ldots = [c_1 \ldots c_{n-2}[\, c_1' \ \ldots\ c_{n-1}'\, a_{n-1}]a_n] = [c_1 \ldots c_{n-2}\, c_{n-1}a_n] = b,$$

то

$$x_1 = c_1, \ldots, x_{i-1} = c_{i-1}, x_i = [c_i \ldots c_{n-2}\, c_1' \ \ldots\ c_{n-2}' \ \ldots\ c_1^{(n-i-2)} \ \ldots\ c_{n-2}^{(n-i-2)}\, c_1^{(n-i-1)} \ \ldots\ c_{n-1}^{(n-i-1)}\,] -$$

решение уравнения (5). Предложение доказано.

Предложение 2. Если в n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ для любых $a, b \in A$ разрешимо уравнение (4), то в ней для любого $j \in \{1, \ldots, n-2\}$ и любых $a_1, \ldots a_{n-j}, b \in A$ разрешимо уравнение (6).

Доказательство. Обозначим через $(d_1, \ldots, d_{n-1})$ решение уравнения:

$$[a_1y_1 \ldots y_{n-1}] = b,$$

а через $(\, d_1^{(k)}, \ldots,\ d_{n-1}^{(k)})$ решение уравнения:

$$[a_{k+1}y_1 \ldots y_{n-1}] = \ d_1^{(k-1)}\,, k = 1, \ldots, n-j-1,$$

считая при этом $d_1^{(0)} = d_1$. Положим также

$$h = [\, d_1^{(n-j-1)} \ \ldots\ d_{n-1}^{(n-j-1)}\, d_2^{(n-j-2)} \ \ldots\ d_{n-1}^{(n-j-2)} \ \ldots\ d_2' \ \ldots\ d_{n-1}'\, d_2 \ldots d_{n-j}],$$

Так как

$$[a_1 \ldots a_{n-j}[\, d_1^{(n-j-1)} \ \ldots\ d_{n-1}^{(n-j-1)}\, d_2^{(n-j-2)} \ \ldots\ d_{n-1}^{(n-j-2)} \ \ldots\ d_2' \ \ldots\ d_{n-1}'\, d_2 \ldots d_{n-j}]d_{n-j+1} \ldots d_{n-1}] =$$
$$= [a_1 \ldots a_{n-j-1}[a_{n-j}\, d_1^{(n-j-1)} \ \ldots\ d_{n-1}^{(n-j-1)}\,]\, d_2^{(n-j-2)} \ \ldots\ d_{n-1}^{(n-j-2)} \ \ldots\ d_2' \ \ldots\ d_{n-1}'\, d_2 \ldots d_{n-j}d_{n-j+1} \ldots d_{n-1}] =$$
$$= [a_1 \ldots a_{n-j-2}[a_{n-j-1}\, d_1^{(n-j-2)} \ \ldots\ d_{n-1}^{(n-j-2)}\,] \ldots\ d_2' \ \ldots\ d_{n-1}'\, d_2 \ldots d_{n-1}] =$$
$$= [a_1 \ldots a_{n-j-2}\, d_1^{(n-j-3)}\, d_2^{(n-j-3)} \ \ldots\ d_{n-1}^{(n-j-3)} \ \ldots\ d_2' \ \ldots\ d_{n-1}'\, d_2 \ldots d_{n-1}] = \ldots$$
$$\ldots = [a_1[a_2\, d_1' \ \ldots\ d_{n-1}'\,]d_2 \ldots d_{n-1}] = [a_1d_1d_2 \ldots d_{n-1}] = b,$$

то

$$y_1 = [\, d_1^{(n-j-1)} \ \ldots\ d_{n-1}^{(n-j-1)}\, d_2^{(n-j-2)} \ \ldots\ d_{n-1}^{(n-j-2)} \ \ldots\ d_2' \ \ldots\ d_{n-1}'\, d_2 \ldots d_{n-j}], y_2 = d_{n-j+1}, \ldots, y_j = d_{n-1} -$$

решение уравнения (6). Предложение доказано.

Следствие 1. Если в n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ для любых $a, b \in A$ разрешимо уравнение (3), то в ней для любых $a_2, \ldots a_n, b \in A$ разрешимы уравнения:

$$[x_1a_2 \ldots a_n] = b, [x_1x_2a_3 \ldots a_n] = b, [x_1 \ldots x_{n-2}a_{n-1}a_n] = b,$$

решения которых имеют соответственно вид:

$$x_1 = [c_1 \ldots c_{n-2}\, c_1' \ \ldots\ c_{n-2}' \ \ldots\ c_1^{(n-3)} \ \ldots\ c_{n-2}^{(n-3)}\, c_1^{(n-2)} \ \ldots\ c_{n-1}^{(n-2)}\,];$$

$$x_1 = c_1, x_2 = [c_2 \ldots c_{n-2}\, c_1' \ \ldots\ c_{n-2}' \ \ldots\ c_1^{(n-4)} \ \ldots\ c_{n-2}^{(n-4)}\, c_1^{(n-3)} \ \ldots\ c_{n-1}^{(n-3)}\,];$$

$$x_1 = c_1, \ldots, x_{n-3} = c_{n-3}, x_{n-2} = [c_{n-2}\, c_1' \ \ldots\ c_{n-1}'\,].$$

Следствие 2. Если в n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ для любых $a, b \in A$ разрешимо уравнение (4), то в ней для любых $a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in A$ разрешимы уравнения:

$$[a_1 \ldots a_{n-1}y_1] = b, [a_1 \ldots a_{n-2}y_1y_2] = b, [a_1a_2y_1 \ldots y_{n-2}] = b,$$

решения которых имеют соответственно вид:

$$y_1 = [\, d_1^{(n-2)} \ \ldots\ d_{n-1}^{(n-2)}\, d_2^{(n-3)} \ \ldots\ d_{n-1}^{(n-3)} \ \ldots\ d_2' \ \ldots\ d_{n-1}'\, d_2 \ldots d_{n-1}];$$

$$y_1 = [\, d_1^{(n-3)} \ldots\ d_{n-1}^{(n-3)}\, d_2^{(n-4)} \ \ldots\ d_{n-1}^{(n-4)} \ \ldots\ d_2' \ \ldots\ d_{n-1}'\, d_2 \ldots d_{n-2}], y_2 = d_{n-1};$$

$$y_1 = [\, d_1' \ \ldots\ d_{n-1}'\, d_2], y_2 = d_3, \ldots, y_{n-2} = d_{n-1}.$$

Замечание 1. При $i \neq 1$, $j \neq 1$ решения уравнений (5) и (6), найденные при доказательстве предложений 1 и 2, в том числе и приведенные в следствиях 1 и 2 решения этих уравнений для $i = j = 2$ и $i = j = n - 2$, не являются единственными.

Можно получать различные решения уравнения (5), разбивая последовательность

$$\alpha = c_1 \ldots c_{n-2}\, c_1' \ldots c_{n-2}' \ldots c_1^{(n-i-2)} \ldots c_{n-2}^{(n-i-2)}\, c_1^{(n-i-1)} \ldots c_{n-1}^{(n-i-1)}$$

на i подпоследовательностей $(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ так, что $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_i$ и либо $\alpha_s \in A$, либо $[\alpha_s] \in A$, $s = 1, \ldots, i$.

Аналогично различные решения уравнения (6) можно получать, разбивая последовательность

$$\beta = d_1^{(n-j-1)} \ldots d_{n-1}^{(n-j-1)}\, d_2^{(n-j-2)} \ldots d_{n-1}^{(n-j-2)} \ldots d_2' \ldots d_{n-1}'\, d_2 \ldots d_{n-1}$$

на j подпоследовательностей $(\beta_1, \ldots, \beta_j)$ так, что $\beta = \beta_1 \ldots \beta_j$ и либо $\beta_s \in A$, либо $[\beta_s] \in A$, $s = 1, \ldots, j$.

ПРИМЕР 1. Методом, описанным в замечании 1, из решений, приведенных в следствиях 1 и 2, можно получить решение

$$x_1 = [c_1 \ldots c_{n-2}\, c_1' \ldots c_{n-2}' \ldots c_1^{(n-3)} \ldots c_{n-2}^{(n-3)}],\ x_2 = c_{n-1}^{(n-3)}$$

уравнения $[x_1x_2a_3 \ldots a_n] = b$ и решение

$$y_1 = d_1^{(n-3)},\ y_2 = [d_2^{(n-3)} \ldots d_{n-1}^{(n-3)} \ldots d_2' \ldots d_{n-1}'\, d_2 \ldots d_{n-1}]$$

уравнения $[a_1 \ldots a_{n-2}y_1y_2] = b$.

ПРИМЕР 2. Запишем все $n - 2$ решения уравнения $[x_1 \ldots x_{n-2}a_{n-1}a_n] = b$, которые можно получить методом, описанным в замечании 1:

$$x_1 = c_1, \ldots, x_{n-3} = c_{n-3},\ x_{n-2} = [c_{n-2}\, c_1' \ldots c_{n-1}'];$$

$$x_1 = c_1, \ldots, x_{n-4} = c_{n-4},\ x_{n-3} = [c_{n-3}c_{n-2}\, c_1' \ldots c_{n-2}'],\ x_{n-2} = c_{n-1}';$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 = c_1,\ x_2 = [c_2 \ldots c_{n-2}\, c_1'\, c_2'\, c_3'],\ x_3 = c_4', \ldots, x_{n-2} = c_{n-1}';$$

$$x_1 = [c_1 \ldots c_{n-2}\, c_1'\, c_2'],\ x_2 = c_3', \ldots, x_{n-2} = c_{n-1}'.$$

Запишем все $n - 2$ решения уравнения $[a_1a_2y_1 \ldots y_{n-2}] = b$, которые можно получить методом, описанным в замечании 1:

$$y_1 = [d_1' \ldots d_{n-1}'\, d_2],\ y_2 = d_3, \ldots, y_{n-2} = d_{n-1};$$

$$y_1 = d_1',\ y_2 = [d_2' \ldots d_{n-1}'\, d_2d_3],\ y_3 = d_4, \ldots, y_{n-2} = d_{n-1};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_1 = d_1', \ldots, y_{n-4} = d_{n-4}',\ y_{n-3} = [d_{n-3}'\, d_{n-2}'\, d_{n-1}'\, d_2 \ldots d_{n-2}],\ y_{n-2} = d_{n-1};$$

$$y_1 = d_1', \ldots, y_{n-3} = d_{n-3}',\ y_{n-2} = [d_{n-2}'\, d_{n-1}'\, d_2 \ldots d_{n-1}].$$

Ясно, что если в n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ и любых $a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ разрешимо уравнение (5), то в ней для любых $a, b \in A$ разрешимо уравнение (3). Поэтому предложение 1 позволяет сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Если в n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ и любых $a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ разрешимо уравнение (5), то в ней разрешимо каждое из уравнений

$$[x_1a_2 \ldots a_n] = b,\ [x_1x_2a_{n-3} \ldots a_n] = b,\ \ldots,\ [x_1 \ldots x_{n-1}a_n] = b, \tag{7}$$

для всех $a_2, \ldots, a_n, b \in A$.

Ясно, что если в n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n-2\}$ и любых $a_1, \ldots, a_{n-j}, b \in A$ разрешимо уравнение (6), то в ней для любых $a, b \in A$ разрешимо уравнение (4). Поэтому предложение 2 позволяет сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Если в n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ и любых $a_1, \ldots, a_{n-j}$, $b \in A$ разрешимо уравнение (6), то в ней разрешимо каждое из уравнений

$$[a_1 \ldots a_{n-1}y_1] = b,\ [a_1 \ldots a_{n-2}y_1y_2] = b,\ \ldots,\ [a_1y_1 \ldots y_{n-1}] = b \tag{8}$$

для всех $a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in A$.

Условия теорем 1 и 2 можно ослабить, сохранив их утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Если в n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ и любых $a, b \in A$ разрешимо уравнение:

$$[x_1 \ldots x_i \underbrace{a \ldots a}_{n-i}] = b,$$

то в ней разрешимо каждое из уравнений (7), для любых $a_2, \ldots, a_n$, $b \in A$.

ТЕОРЕМА 4. Если в n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ и любых $a, b \in A$ разрешимо уравнение:

$$[\underbrace{a \ldots a}_{n-j} y_1 \ldots y_j] = b,$$

то в ней разрешимо каждое из уравнений (8), для любых $a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in A$.

Теоремы 1 и 2 позволяют сформулировать следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. n-Арная полугруппа $< A, [\ ] >$ является n-арной группой тогда и только тогда, когда в ней для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ и любых $a_{i+1}, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-j}, b \in A$ разрешимы уравнения:

$$[x_1 \ldots x_ia_{i+1} \ldots a_n] = b,\ [b_1 \ldots b_{n-j}y_1 \ldots y_j] = b.$$

Теоремы 3 и 4 позволяют сформулировать следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. n-Арная полугруппа $< A, [\ ] >$ является n-арной группой тогда и только тогда, когда в ней для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ и любых $a, b \in A$ разрешимы уравнения:

$$[x_1 \ldots x_i \underbrace{a \ldots a}_{n-i}] = b,\ [\underbrace{a \ldots a}_{n-j} y_1 \ldots y_j] = b.$$

Следующий результат получается из теорем 5 и 6 при $i = j = n-1$.

ТЕОРЕМА 7 [2, 3]. n-Арная полугруппа $< A, [\ ] >$ является n-арной группой тогда и только тогда, когда в ней для любых $a, b \in A$ разрешимы уравнения (3) и (4).

Полагая в теоремах 5 и 6 $i = j = 1$, получаем соответственно результат Поста и следующий результат.

ТЕОРЕМА 8 [4]. n-Арная полугруппа $< A, [\ ] >$ является n-арной группой тогда и только тогда, когда в ней для любых $a, b \in A$ разрешимы уравнения:

$$[x \underbrace{a \ldots a}_{n-1}] = b,\ [\underbrace{a \ldots a}_{n-1} y] = b.$$

Лемма 1. Пусть в n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ для некоторого $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ и любых $a_{i+1}, \ldots, a_n$, $b \in A$ разрешимо уравнение (5). Для любых $\alpha_2, \ldots, \alpha_i \in A$ обозначим через $X(\alpha_2, \ldots, \alpha_i)$ множество всех решений уравнения (5) вида $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)$, $\alpha \in A$. Тогда:

1) $X(\alpha_2, \ldots, \alpha_i) \neq \varnothing$;

2) $X(\alpha_2, \ldots, \alpha_i) \bigcap X(\gamma_2, \ldots, \gamma_i) = \varnothing$ для несовпадающих последовательностей $\alpha_2 \ldots \alpha_i$ и $\gamma_2 \ldots \gamma_i$;

3) множество всех решений уравнения (5) совпадает с объединением $\bigcup\limits_{\alpha_2, \ldots, \alpha_i \in A} X(\alpha_2, \ldots, \alpha_i)$.

Доказательство. 1) По теореме 1 в $< A, [\ ] >$ разрешимо уравнение $[x\alpha_2 \ldots \alpha_ia_{i+1} \ldots a_n] = b$, т.е. существует такой $\alpha \in A$, что $[\alpha\alpha_2 \ldots \alpha_ia_{i+1} \ldots a_n] = b$. Следовательно, $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)$ – решение уравнения (5), а значит $X(\alpha_2, \ldots, \alpha_i) \neq \varnothing$.

Утверждения 2) и 3) очевидны. Лемма доказана.

Аналогично лемме 1 с использованием теоремы 2 доказывается следующая лемма.

Лемма 2. Пусть в n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ для некоторого $j \in \{2, \ldots, n-1\}$ и любых $a_1, \ldots, a_{n-j}, b \in A$ разрешимо уравнение (6). Для любых $\beta_1, \ldots, \beta_{j-1} \in A$ обозначим через $Y(\beta_1, \ldots, \beta_{j-1})$ множество всех решений уравнения (6) вида $(\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta)$, $\beta \in A$. Тогда:

1) $Y(\beta_1, \dots, \beta_{j-1}) \neq \varnothing$;

2) $Y(\beta_1, \dots, \beta_{j-1}) \bigcap Y(\gamma_1, \dots, \gamma_{j-1}) = \varnothing$ для несовпадающих последовательностей $\beta_1 \dots \beta_{j-1}$ и $\gamma_1 \dots \gamma_{j-1}$;

3) множество всех решений уравнения (6) совпадает с объединением $\bigcup\limits_{\beta_1, \dots, \beta_{j-1} \in A} Y(\beta_1, \dots, \beta_{j-1})$.

Предложение 3. Пусть в конечной n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ порядка r для некоторого $i \in \{2, \dots, n-1\}$ и любых $a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$ разрешимо уравнение (5). Тогда:

1) число различных решений уравнения (5) ограничено снизу числом r^{i-1};

2) если для любых $c_2, \dots, c_n \in A$ из $[xc_2 \dots c_n] = [yc_2 \dots c_n]$ всегда следует $x = y$, то число различных решений уравнения (5) равно r^{i-1}.

Доказательство

1) Так как $|A| = r$, то число различных последовательностей вида $\alpha_2 \dots \alpha_i$, где все $\alpha_2, \dots, \alpha_i$ пробегают множество A, равно r^{i-1}. Тогда, ввиду леммы 1, множество всех решений уравнения (5) разбивается на r^{i-1} непересекающихся подмножеств, каждое из которых не пусто. Поэтому число различных решений уравнения (5) не меньше r^{i-1}.

2) Предположим, что $(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_i)$ и $(\delta, \alpha_2, \dots, \alpha_i)$ – два различных решения уравнения (5) из множества $X(\alpha_2, \dots, \alpha_i)$, т.е.

$$[\alpha\alpha_2 \dots \alpha_i a_{i+1} \dots a_n] = [\delta\alpha_2 \dots \alpha_i a_{i+1} \dots a_n] = b.$$

Из последнего равенства, учитывая условие утверждения 2), получаем $\alpha = \delta$. Следовательно, для любых $\alpha_2, \dots, \alpha_i \in A$ все множества $X(\alpha_2, \dots, \alpha_i)$ являются одноэлементными. Применяя лемму 1, видим, что число различных решений уравнения (5) равно r^{i-1}. Предложение доказано.

Аналогично предложению 3 при помощи леммы 2 доказывается следующее.

Предложение 4. Пусть в конечной n-арной полугруппе $< A, [\ ] >$ порядка r для некоторого $j \in \{2, \dots, n-1\}$ и любых $a_1, \dots, a_{n-j}, b \in A$ разрешимо уравнение (6). Тогда:

1) число различных решений уравнения (6) ограничено снизу числом r^{j-1};

2) если для любых $c_1, \dots, c_{n-1} \in A$ из $[c_1 \dots c_{n-1}x] = [c_1 \dots c_{n-1}y]$ всегда следует $x = y$, то число различных решений уравнения (6) равно r^{j-1}.

Следующее предложение доказывается аналогично утверждениям 2) предложений 3 и 4.

Предложение 5. Для n-арной группы $< A, [\ ] >$ мощности множеств всех решений каждого из уравнений $[x_1x_2a_3 \dots a_n] = b$, $[a_1 \dots a_{n-2}y_1y_2] = b$ совпадают с мощностью множества A.

Из утверждений 2) предложений 3 и 4 вытекает

Следствие 3. В конечной n-арной группе $< A, [\ ] >$ число различных решений уравнений (5) и (6) равно соответственно $|A|^{i-1}$ и $|A|^{j-1}$.

Замечание 2. Каждое из уравнений $[xa_2 \dots a_n] = b$ и $[a_1 \dots a_{n-1}y] = b$ имеет в n-арной группе единственное решение. Поэтому следствие 3 формально включает и случаи $i = 1$ и $j = 1$.

Пост заметил [1], что n-арную группу $< A, [\ ] >$ можно определить как n-арную полугруппу, в которой для всех $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$ и некоторого $i \in \{2, \dots, n-1\}$ разрешимо уравнение

$$[a_1 \dots a_{i-1}xa_{i+1} \dots a_n] = b.$$

Следующая теорема обобщает этот результат Поста.

ТЕОРЕМА 9. n-Арная полугруппа $< A, [\ ] >$ является n-арной группой тогда и только тогда, когда в ней для некоторых $k, i \in \{1, \dots, n-2\}$, удовлетворяющих неравенству $k + i \leq n - 1$, и любых $a_1, \dots, a_k, a_{k+i+1}, \dots, a_n, b \in A$ разрешимо уравнение:

$$[a_1 \dots a_kx_1 \dots x_ia_{k+i+1} \dots a_n] = b. \tag{9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, d – фиксированный элемент из A. Определение Поста гарантирует существование решения $x_1 = d_1$ уравнения

$$[a_1 \dots a_kx_1 \underbrace{d \dots d}_{i-1} a_{k+i+1} \dots a_n] = b.$$

Тогда $x_1 = d_1$, $x_2 = \dots = x_i = d$ – решение уравнения (9).

Достаточность. Пусть теперь < A, [ ] > – n-арная полугруппа, в которой для некоторых k, $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ таких, что $k + i \le n - 1$, и любых $a_1, \ldots, a_k, a_{k+i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ разрешимо уравнение (9).

Если $x_1 = d_1, \ldots, x_i = d_i$ – решение уравнения (9), то

$$u_1 = a_1, \ldots, u_k = a_k, u_{k+1} = d_1, \ldots, u_{k+i} = d_i, u_{k+i+1} = a_{k+i+1} \ldots, u_{n-1} = a_{n-1} -$$

решение уравнения $[u_1 \ldots u_{n-1}a_n] = b$, для любых $a_n, b \in A$, а

$$v_1 = a_2, \ldots, v_{k-1} = a_k, v_k = d_1, \ldots, v_{k+i-1} = d_i, v_{k+i} = a_{k+i+1}, \ldots, v_{n-1} = a_n -$$

решение уравнения $[a_1v_1 \ldots v_{n-1}] = b$, для любых $a_1, b \in A$. Поэтому, согласно теореме 7, < A, [ ] > – n-арная группа. Теорема доказана.

Аналогично теореме 9 доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 10. n-Арная полугруппа < A, [ ] > является n-арной группой тогда и только тогда, когда для некоторых k, $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, удовлетворяющих неравенству $k + i \le n - 1$, и любых a, $b \in A$ в ней разрешимо уравнение:

$$[\underbrace{a \ldots a}_{k} x_1 \ldots x_i \underbrace{a \ldots a}_{n-k-i}] = b.$$

Полагая в теоремах 9 и 10 $i = n - 2$, $k = 1$, получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 11 [3, 5]. n-Арная полугруппа < A, [ ] > является n-арной группой тогда и только тогда, когда для любых a, $b \in A$ в ней разрешимо уравнение $[ax_1 \ldots x_{n-2}a] = b$.

Полагая в теореме 10 $i = 1$, $k = 1, \ldots, n - 2$, получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 12 [4]. n-Арная полугруппа < A, [ ] > является n-арной группой тогда и только тогда, когда для некоторого $k \in \{1, \ldots, n-2\}$ и любых a, $b \in A$ в ней разрешимо уравнение:

$$[\underbrace{a \ldots a}_{i-1} x \underbrace{a \ldots a}_{n-i}] = b.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. – 48, № 2. – P. 208 – 350.
2. Гальмак, А.М. Об определении n-арной группы / А.М. Гальмак // Тез. докл. Междунар. конф. по алгебре. – Новосибирск, 1991. – С. 30.
3. Гальмак, А.М. Определения n-арной группы / А.М. Гальмак. – Минск, 1994. – 43 с. – (Препринт № 16 / ГГУ им. Ф. Скорины).
4. Тютин, В.И. К аксиоматике n-арных групп / В.И. Тютин // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 8. – С. 691 – 693.
5. Гальмак, А.М. О некоторых новых определениях n-арной группы / А.М. Гальмак // Тез. докл. Междунар. конф. по алгебре. – Красноярск, 1993. – С. 33 – 34.

Поступила 26.02.2007