УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ СЛАБО НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

О.В. ТИТОВ
(Белорусский государственный университет транспорта, Гомель)

Пусть G – конечная группа. Подгруппа H группы G называется слабо нормальной в G подгруппой, если существует такая квазинормальная подгруппа T группы G, что $HT = G$ и $T \cap H \le H_G$.

Используя понятие слабо квазинормальной подгруппы в работе получены новые характеризации для конечных разрешимых, сверхразрешимых, метанильпотентных и дисперсивных по Оре групп, в частности доказаны теоремы: группа G разрешима тогда и только тогда, когда $G = AB$, где A, B – подгруппы группы G такие, что каждая максимальная подгруппа из A и каждая максимальная подгруппа из B слабо нормальны в G; группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда $G = AB$, где подгруппа A s-квазинормальна в G, B – нильпотентна и каждая силовская подгруппа из A слабо нормальна в G.

1. Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. В работе [1] Оре рассмотрел два обобщения нормальности, оба из которых вызывают неослабевающий интерес у исследователей и в наши дни. Во-первых, в работе [1] были впервые введены в математическую практику квазинормальные подгруппы: следуя [1], мы говорим, что подгруппа H группы G квазинормальна в G, если H перестановочна с любой подгруппой из G (т.е. $HT = TH$ для всех подгрупп T из G). Оказалось, что квазинормальные подгруппы обладают рядом интересных свойств [1 – 7] и что фактически они мало отличаются от нормальных подгрупп. Отметим, в частности, что согласно [6], для любой квазинормальной подгруппы H имеет место $H^G/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$, а согласно [8, гл. 2, теорема 2.1.3], квазинормальные подгруппы – это в точности те субнормальные подгруппы группы G, которые являются модулярными элементами в решетке всех подгрупп группы G.

Подгруппа H группы G называется c-нормальной, если G имеет такую нормальную подгруппу T, что $G = HT$ и $H \cap T \subseteq H_G$. Легко видеть, что подгруппа H c-нормальна в G тогда и только тогда, когда H/H_G обладает нормальным дополнением в G/H_G.

Таким образом, понятие c-нормальности является естественным обобщением понятия нормальной подгруппы. Впервые такая идея была рассмотрена в работе [1], где, в частности, было доказано следующее: *конечная группа G разрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы c-нормальны* (в связи с этим см. также работу Бэра [9]). Однако в явном виде определение c-нормальности можно встретить лишь в работе [10], где была построена оригинальная теория c-нормальных подгрупп и даны некоторые ее приложения в вопросах классификации групп с заданными системами подгрупп.

В данной работе мы анализируем следующее понятие, которое одновременно обобщает как условие квазинормальности, так и условие c-нормальности для подгрупп.

Определение. Подгруппа H группы G называется слабо нормальной в G подгруппой, если существует такая квазинормальная подгруппа T группы G, что $HT = G$ и $T \cap H \le H_G$.

Используя понятие слабо нормальной подгруппы, в данной работе мы получим новые характеризации для конечных разрешимых, сверхразрешимых, метанильпотентных и дисперсивных по Оре групп.

2. Предварительные сведения

Класс групп $\boldsymbol{F}$ называется насыщенной формацией [11], если выполняются следующие условия:

(1) каждая фактор-группа любой группы из $\boldsymbol{F}$ также принадлежит $\boldsymbol{F}$;

(2) группа $G \in \boldsymbol{F}$, если она имеет такие нормальные подгруппы A и B, что $G/A \in \boldsymbol{F}$, $G/B \in \boldsymbol{F}$, и либо $A \le \Phi(G)$, либо $A \cap B = 1$.

Подгруппа A группы G называется s-квазинормальной в G [1], если $AP = PA$ для каждой силовской подгруппы P из G.

Напомним некоторые наиболее общие свойства s-квазинормальных подгрупп.

ЛЕММА 2.1 [1]. *Пусть G – группа и $H \le K \le G$. Тогда*

(1) Если H s-квазинормальна в G, то H s-квазинормальна в K.

(2) Предположим, что H нормальна в G. Тогда K/H s-квазинормальна в G тогда и только тогда, когда K s-квазинормальна в G.

(3) Если H s-квазинормальна в G, то H субнормальна в G.

Следующая лемма может быть доказана простой проверкой.

ЛЕММА 2.2. *Пусть G – группа и $H \le K \le G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) Пусть H – нормальная в G подгруппа. Тогда K/H слабо нормальная подгруппа в группе G/H тогда и только тогда, когда K слабо нормальная подгруппа в группе G.

(2) Если H – слабо нормальная в G подгруппа, то H – слабо нормальная в K подгруппа.

(3) Пусть H – нормальная в G подгруппа. Тогда для всех слабо нормальных в G подгрупп E таких, что $(|H|, |E|) = 1$, HE/H – слабо нормальная подгруппа в группе G/H.

ЛЕММА 2.3 [12, гл. а, лемма 14.3]. *Если A – субнормальная подгруппа в группе G и B – минимальная нормальная подгруппа в G, то $B \le N_G(A)$.*

ЛЕММА 2.4 [11, гл. 2, следствие 7.7.2]. *Для любой субнормальной подгруппы H группы G справедливы следующие утверждения:*

(1) если H – π-группа, то $H \subseteq O_\pi(G)$;

(2) если H нильпотентна, то H содержится в некоторой нильпотентной нормальной в G подгруппе;

(3) если H разрешима, то H содержится в некоторой разрешимой нормальной в G подгруппе.

ЛЕММА 2.5 [13]. *Пусть A – s-квазинормальная подгруппа в группе G. Если $A_G = 1$, то A нильпотентна.*

ЛЕММА 2.6 [7, лемма А]. *Если H – s-квазинормальная в G подгруппа и H – p-группа для некоторого простого числа p, то $O_p(G) \le N_G(H)$.*

ЛЕММА 2.7 [14, гл. 1, 1.9]. *Пусть G – группа и $O_{p'}(G) = 1$. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда $G/O_p(G)$ абелева группа экспоненты, делящей $p - 1$.*

ЛЕММА 2.8. *Если каждая максимальная подгруппа группы G имеет дополнение, которое является квазинормальной в G подгруппой, то G нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что эта лемма не верна и пусть группа G – контрпример минимального порядка. Тогда $|G|$ не является простым числом и поэтому G – не простая группа. Пусть N – произвольная собственная нормальная подгруппа группы G и M/N – максимальная подгруппа в G/N. И пусть T – квазинормальная в G подгруппа такая, что $G = MT$ и $M \cap T = 1$. Тогда TN/N – квазинормальная в G/N подгруппа, $(TN/N)(M/N) = G/N$ и $(TN/N) \cap (M/N) = (TN \cap M)/N = N(T \cap M)/N = N/N$. Так как класс всех нильпотентных групп является насыщенной формацией [11, с. 33], то G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Пусть N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $C_G(N) = N$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G такая, что $N \le M$. И пусть T – квазинормальная в G подгруппа такая, что $G = TM$ и $T \cap M = 1$. Согласно лемме 2.3, $N \le N_G(T)$ и поэтому $NT = N \times T$. Но тогда $T \le C_G(N) = N$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

3. Основные результаты

ТЕОРЕМА 3.1. *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда $G = AB$, где A, B – подгруппы группы G такие, что каждая максимальная подгруппа из A и каждая максимальная подгруппа из B слабо нормальны в G.*

Доказательство. Предположим сначала, что $G = AB$, где A, B – подгруппы группы G такие, что каждая максимальная подгруппа из A и каждая максимальная подгруппа из B слабо нормальны в G. Покажем, что G – разрешимая группа. Предположим противное: пусть G – контрпример минимального порядка.

(1) *Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в $A \cap B$, то G/N разрешима* (это прямо следует из леммы 2.2 (1)).

(2) $A \ne G \ne B$.

Действительно, предположим, что $A = G$. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда условие теоремы справедливо для $G/R = (G/R)(G/R)$ и ввиду (1), G/R разрешима. Значит, R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, R не содержится в $\Phi(G)$ и $R = A_1 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \cong \ldots \cong A_t$ – простая неабелева группа. Пусть p – простой делитель порядка $|R|$ и M – максимальная подгруппа из G, содержащая $N = N_G(P)$, где P – силовская p-подгруппа группы R. Тогда по лемме Фраттини $G = RM$, поэтому $M_G = 1$. Пусть T – квазинормальная в G подгруппа такая, что $G = TM$ и $M \cap T \le M_G$. Так как $M_G = 1$, то T – дополнение для M в G. Ясно, что p не делит $|G : M|$ и, значит, $(p, |T|) = 1$. Отсюда следует, что $T \cap R = 1$, и поэтому по лемме 2.3 $TR = T \times R$. Значит, $T \le C_G(R) = 1$, поскольку R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и R неабелева. Следовательно, $G = TM = M$, противоречие.

(3) *A, B – разрешимые группы* (это следует из (2) и выбора группы G).

Заключительное противоречие

Пусть R – наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G. Покажем, что AR/R нильпотентна. Если $A \le R$, то это очевидно. Пусть теперь A не содержится в R и пусть $R \cap A \le M$, где M – максимальная подгруппа группы A. Пусть T – квазинормальная в G подгруппа такая, что $G = MT$ и $M \cap T$ – квазинормальная в G подгруппа. Тогда $A = A \cap MT = M(A \cap T)$ и $A \cap T$ – квазинормальная в A подгруппа. Поскольку $T \cap M$ квазинормальная в G подгруппа, то подгруппа $T \cap M$ субнормальна в G. Ввиду (3) $T \cap M$ разрешима и, следовательно, $T \cap M \leq R$. Тогда мы имеем

$$(R \cap A)(T \cap A) \cap M = (R \cap A)(T \cap A \cap M) = (R \cap A)(T \cap M) \leq R \cap A.$$

Следовательно, по лемме 2.8 $A/R \cap A$ – нильпотентная группа и поэтому $AR/R \cong A/R \cap A$ нильпотентна. Аналогично можно показать, что BR/R нильпотентна. Следовательно, $G/R = (AR/R)(BR/R)$ разрешима по [15, теорема 3] и поэтому G разрешима, противоречие.

Обратно, предположим, что G разрешима и пусть M – максимальная подгруппа группы G. Тогда по [12, гл. A, теорема 15.6] M/M_G имеет нормальное дополнение в G/M_G и поэтому M/M_G слабо квазинормальна в G/M_G. Значит, по лемме 2.2 (1) M слабо квазинормальна в G.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы слабо квазинормальны в G.*

Для доказательства теоремы 3.4 нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 3.3. *Пусть $G = AB$, где A – s-квазинормальная подгруппа группы G, B нильпотентная и каждая силовская подгруппа из A имеет квазинормальное дополнение в G. Тогда G нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что эта лемма не верна и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда

(1) *A и каждая собственная подгруппа группы G, содержащая A, нильпотентны.*

Пусть $A \leq M \leq G$, где $M \neq G$. Тогда $M = M \cap AB = A(M \cap B)$, где $M \cap B$ – нильпотентная в G подгруппа и A – s-квазинормальная подгруппа в M. Пусть A_p – силовская подгруппа группы A и T – такая квазинормальная в G подгруппа, что $G = TA_p$ и $T \cap A_p = 1$. Тогда $M = M \cap A_p T = A_p(M \cap T)$, где подгруппа $M \cap T$ квазинормальна в M. Значит, условия леммы справедливы для M и поскольку $|M| < |G|$, то по выбору группы G, M – нильпотентная группа. Ясно, что A нильпотентна.

(2) *G разрешима*.

По условию A – s-квазинормальна в G. Тогда ввиду леммы 2.1 (3) A субнормальна в G и поэтому ввиду (1) и леммы 2.4 (3), A содержится в некоторой разрешимой нормальной подгруппе N группы G. Но тогда $G/N \cong B/B \cap N$ нильпотентна и поэтому G разрешима.

(3) *G/P нильпотентна для каждой нормальной p-подгруппы P группы G, содержащей силовскую p-подгруппу из A.*

Покажем, что условия леммы справедливы для G/P. Ясно, что $(AP/P)(BP/P) = G/P$, где BP/P нильпотентна и AP/P s-квазинормальна в G/P. Пусть Q/P – силовская q-подгруппа группы $AP/P \cong A/A \cap P$. Тогда $(q, |P|) = 1$ и $Q = A_qP$ для некоторой силовской q-подгруппы A_q группы A. Поскольку A – субнормальна в G и ввиду (1), A нильпотентна, то A_q субнормальна в G и поэтому $Q = A_q \times P$. Пусть T – такая квазинормальная в G подгруппа, что $G = TA_q$ и $T \cap A_q = 1$. Пусть $D = Q \cap TP = Q_1 \times P_1$, где Q_1 – силовская q-подгруппа из D и $P_1 \leq P$. Ясно, что $Q_1 \leq A_q$. Так как $(q, |P|) = 1$, то $Q_1 \leq T_q$ для любой силовской q-подгруппы T_q из T и поэтому $Q_1 \leq T \cap A_q = 1$. Значит, $D = P_1$ и, следовательно, $TP/P \cap Q/P = 1$. Отсюда следует, что TP/P – такая квазинормальная в G/P подгруппа, что $G/P = (TP/P)(Q/P)$ и $TP/P \cap Q/P = 1$. По выбору группы G мы заключаем, что G/P нильпотентна.

(4) *$A \leq F(G)$ и $F(G)$ – r-группа для некоторого простого числа r.*

Пусть P – силовская r-подгруппа группы A. Тогда ввиду (1), P – субнормальная в G подгруппа и поэтому по лемме 2.4 (1) $P \leq O_r(G)$. Согласно (3), $G/O_r(G)$ нильпотентна. Так как G не является нильпотентной группой, то $A \leq F(G) = O_r(G)$.

(5) $|G| = p^aq$ *для некоторых простых чисел p и q и силовская p-подгруппа группы G нормальна.*

Пусть M – нормальная подгруппа группы G такая, что $A \leq M$ и G/M – простая группа. Ввиду (2) $|G:M| = q$ – простое число. Согласно (1), M нильпотентна. Поскольку каждая силовская подгруппа P из M характеристична в M, то P нормальна в G и поэтому ввиду (4) $M = P$.

(6) *A – p-группа* (это прямо следует из (4) и (5)).

Заключительное противоречие

Пусть T – квазинормальная подгруппа такая, что $G = TA$ и $T \cap A = 1$. Тогда силовская q-подгруппа Q группы B содержится в T. Пусть $D = AQ$. Тогда, ввиду леммы 2.3 $T \cap D = Q(T \cap A) = Q$ субнормальна в D. Значит, $D = A \times Q$ и поэтому $A \leq N_G(Q)$. Так как $B \leq N_G(Q)$, то Q нормальна в G. Следовательно, в силу (5), G нильпотентна. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ТЕОРЕМА 3.4. *Группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда $G = AB$, где подгруппа A s-квазинормальна в G, B – нильпотентна и каждая силовская подгруппа из A слабо нормальна в G.*

Доказательство. Допустим, что $G = AB$, где A – s-квазинормальна в G, B – нильпотентна и каждая силовская подгруппа из A слабо нормальна в G. Покажем, что группа G метанильпотентна. Предположим, что это не верно и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) *A не является нильпотентной группой.*

Предположим, что A нильпотентна. Так как ввиду леммы 2.1 (3) A субнормальна, то A содержится в некоторой нильпотентной нормальной подгруппе E из G по лемме 2.4 (2). Тогда $G/E \cong B/B \cap E$ нильпотентна и поэтому G метанильпотентна. Полученное противоречие с выбором группы G доказывает (1).

(2) $A_G \neq 1$.

Допустим, что $A_G = 1$. Тогда ввиду леммы 2.5 A нильпотентна, что противоречит (1). Значит, мы имеем (2).

(3) *Если N – абелева минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в A, то G/N метанильпотентна.*

Пусть N – p-группа и A_p – силовская p-подгруппа в A. Тогда $N \leq A_p$ и поэтому по лемме 2.2 каждая силовская подгруппа из A/N слабо нормальна в G/N. Поскольку по лемме 2.1 A/N s-квазинормальна в G/N, $BN/N \cong B/B \cap N$ нильпотентна и $G/N = (A/N)(BN/N)$, то условия теоремы справедливы для G/N. Так как $|G/N| < |G|$, то ввиду выбора группы G, G/N метанильпотентна.

(4) *Условия теоремы справедливы для A* (это прямо следует из леммы 2.2).

(5) *A разрешима*.

Если $A \neq G$, то A метанильпотентна по (4) и выбору группы G. Пусть теперь $A = G$. Предположим, что для некоторой силовской подгруппы P из G мы имеем $L = P_G \neq 1$. Тогда ввиду (3), G разрешима. Пусть теперь $P_G = 1$ для каждой силовской подгруппы P группы G. Тогда по условию каждая силовская подгруппа из G имеет квазинормальное дополнение в G и поэтому G нильпотентна. Полученное противоречие с выбором группы G доказывает (5).

(6) *В группе G имеется в точности одна минимальная нормальная подгруппа N, содержащаяся в A.*

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в A. Тогда N абелева согласно (5), и поэтому ввиду (3) G/N метанильпотентна. Кроме того, так как класс всех метанильпотентных групп является насыщенной формацией [11, с. 36], то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в A.

(7) *Если N p-группа, то каждая силовская q-подгруппа из A, где $q \neq p$, имеет квазинормальное дополнение в G.*

Пусть Q – силовская q-подгруппа в G, где $q \neq p$. Тогда ввиду (6), $Q_G = 1$. По условию Q слабо нормальна в G, поэтому G имеет такую квазинормальную подгруппу T, что $TQ = G$ и $T \cap Q \leq Q_G = 1$.

Заключительное противоречие.

Пусть A_p – силовская p-подгруппа в A и $P = (A_p)_G$. Тогда $G/P = (A/P)(BP/P)$. По условию G имеет квазинормальную подгруппу T такую, что $TA_p = G$ и $T \cap A_p \leq P$. Тогда $(A_p/P)(TP/P) = G/P$, $A_p/P \cap TP/P = P(A_p \cap T)/P = P/P$ и поэтому TP/P – дополнение для A_p/P в G/P, которое является квазинормальной в G/P подгруппой. Если Q/N – q-подгруппа из A/N, где $q \neq p$, то ввиду (7) Q/P имеет дополнение в G/P, которое является квазинормальной подгруппой (см. доказательство утверждения (3) леммы 3.3). Тогда по лемме 3.3 G/P нильпотентна и поэтому G метанильпотентна. Полученное противоречие доказывает метанильпотентность группы G.

Обратно, предположим, что G метанильпотентна. Покажем, что каждая силовская подгруппа из G слабо нормальна в G. Предположим, что это не верно и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда G имеет силовскую подгруппу P, которая не является слабо нормальной в G. Пусть N – произвольная минимальная нормальная подгруппа в G и F – подгруппа Фиттинга группы G. Предположим, что $N \leq P$. Тогда P/N слабо нормальна в G/N и поэтому по лемме 2.2 (1), P слабо нормальна в G, противоречие. Значит, $P_G = 1$ и поэтому $F \cap P \leq P_G = 1$. Так как по условию G метанильпотентна и FP/F – силовская подгруппа в G, то FP/F имеет нормальное дополнение T/F в G/F. Но поскольку F и T/F – p'-группы, то T – нормальное дополнение для P в G. Следовательно, P слабо нормальна в G. Полученное противоречие показывает, что каждая силовская подгруппа из G слабо нормальна в G.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда каждая ее силовская подгруппа слабо нормальна в G.*

ТЕОРЕМА 3.6. *Пусть $G = AB$, где подгруппа A s-квазинормальна в G, B нильпотентна. Предположим, что любая максимальная подгруппа каждой нециклической подгруппы из A слабо нормальна в G. Тогда G сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что эта теорема не верна и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда:

(1) *Каждая собственная подгруппа M группы G, содержащая A, сверхразрешима.*

Пусть $A \leq M \leq G$, где $M \neq G$. Тогда $M = M \cap AB = A(M \cap B)$, где $M \cap B$ нильпотентна и A s-квазинормальна в M. Так как по лемме 2.2 (2) любая максимальная подгруппа каждой нециклической силовской подгруппы из A слабо нормальна в M и $|M| < |G|$, то по выбору группы G мы имеем (1).

(2) *Пусть H – неединичная нормальная подгруппа в G. Предположим, что H p-группа. Допустим, что H содержит силовскую p-подгруппу P из A или P циклична, или $H \leq A$. Тогда G/H сверхразрешима.*

Если $A \leq H$, то $G/H = BH/H \cong B/B \cap H$ нильпотентна. Пусть теперь A не содержится в H. Так как $|G/H| < |G|$, то нам только нужно показать, что условия теоремы справедливы для G/H. Ясно, что $G/H = (HA/H)(BH/H)$, где HA/H s-квазинормальна в G/H и BH/H нильпотентна. Пусть Q/H силовская q-подгруппа из AH/H и M/H – произвольная максимальная подгруппа в Q/H. Пусть Q_1 – силовская q-подгруппа из Q такая, что $Q = HQ_1$. Ясно, что Q_1 – силовская q-подгруппа группы AH. Значит, $Q = A_pH$ для некоторой силовской q-подгруппы A_q из A. Предположим, что Q/H не является циклической подгруппой. Тогда A_q не циклична. Покажем, что M/H слабо нормальна в G/H. Если $H \leq A$, то это прямо следует из леммы 2.2. Допустим, что либо силовская p-подгруппа P из A циклическая, либо $P \leq H$. Тогда $p \neq q$. Покажем, что $M \cap A_q$ – максимальная в A_q подгруппа. Так как $M \neq Q$ и $A_qH = Q$, то $M \cap A_q \neq A_q$. Предположим, что для некоторой подгруппы T из G мы имеем $M \cap A_q \leq T \leq A_q$, где $M \cap A_q \neq T \neq A_q$. Тогда $M = H(M \cap A_q) \leq HT \leq HA_q = Q$. Так как M – максимальная в Q подгруппа, то либо $M = TH$, либо $TH = HA_q$. Если $M = TH$, то $T \leq M \cap A_q$, что противоречит выбору подгруппы T. Значит, $TH = HA_q$ и поэтому мы имеем $A_q = A_q \cap TH = T(A_q \cap H) \leq T(M \cap A_q) = T$, противоречие. Следовательно, $M \cap A_q$ – максимальная в A_q подгруппа и по условию $M \cap A_q$ слабо нормальна в G. Значит, $M/H = (M \cap A_q)H/H$ слабо нормальна в G/H. Следовательно, условия теоремы справедливы для G/H.

(3) *$A \neq G$ и A сверхразрешима.*

По выбору группы G и [16, теорема 1.4] $A \neq G$ и поэтому A сверхразрешима согласно (1).

(4) *G – разрешимая группа.*

По условию A s-квазинормальна в G и поэтому по лемме 2.4 (3) A содержится в некоторой разрешимой нормальной подгруппе E группы G. Так как группа $G/E \cong B/B \cap E$ нильпотентна, то G разрешима.

(5) *Если p – простое число и $(p, |A|) = 1$, то $O_p(G) = 1$.*

Пусть $H = O_p(G) \neq 1$. Тогда ввиду (2) G/H сверхразрешима. Если π – множество всех простых делителей порядка группы A, то по лемме 2.4 (1) $A \leq E$, где E – нормальная π-подгруппа группы G и поэтому $G/E \cong B/B \cap E$ сверхразрешима. Но тогда $G \cong G/H \cap E$ сверхразрешима. Полученное противоречие с выбором группы G доказывает (5).

(6) $A_G \neq 1$.

Допустим, что $A_G = 1$. Тогда по лемме 2.5 A нильпотентна. Пусть P – силовская p-подгруппа из A. Так как ввиду леммы 2.1 (3) A субнормальна в G, то P субнормальна в G. Тогда $P \leq O_p(G)$, согласно лемме 2.4 (1). Но тогда ввиду (2) $G/O_p(G)$ сверхразрешима и поэтому $P = A$, по выбору группы G. Так как $P \leq O_p(G)$ и $G/O_p(G) \cong B/B \cap O_p(G)$ нильпотентно, то $O_p(G)$ – силовская p-подгруппа из G. Пусть H – холлова p'-подгруппа из B и $D = PH$. По лемме 2.6 P нормальна в D и поэтому $P \leq F(D)$. Допустим, что для некоторого простого делителя порядка $|D|$, отличного от p, мы имеем $L = O_q(D) \neq 1$. Тогда L нормальна в B и поэтому L – нормальная подгруппа в G, поскольку $G = PB$. Но тогда $O_q(G) \neq 1$, что противоречит (5). Следовательно, $L = 1$ и поэтому $P = F(D)$. Согласно [16, теорема 1.4] D сверхразрешима и поэтому $H \cong D/P = D/O_p(D)$ – абелева группа, экспонента которой делит $p - 1$, согласно лемме 2.7. Но тогда $G/O_p(G)$ – абелева группа экспоненты, делящей $p - 1$ и поэтому G сверхразрешима, согласно лемме 2.7. Полученное противоречие с выбором группы G доказывает (6).

Заключительное противоречие

Пусть H – минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в A. Пусть H – p-группа и P – силовская p-подгруппа группы A. В силу (2) G/H сверхразрешима и поэтому H – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в A. Ясно, что $|H| > p$ и H не содержится в $\Phi(G)$. Значит, по [17, гл. 3, лемма 3.3] для некоторой максимальной подгруппы V из P мы имеем $P = HV$. Ясно, что $V_G = 1$ и поэтому по условию V имеет дополнение T в G, которое является квазинормальной в G подгруппой. Тогда $P = P \cap VT = V(P \cap T)$ и поэтому $|T \cap P| = p$. Но тогда $|H \cap T_G| \leq p$ и поэтому ввиду минимальности H в T_G H не содержится. Ввиду (5) G имеет холлову p'-подгруппу. Так как в силу леммы 2.1 (3)

T субнормальна в G, то каждая холлова p'-подгруппа группы G содержится в T_G. Следовательно, G/T_G – p-группа. Отсюда следует, что $G \cong G/H \cap T_G$ сверхразрешима. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Пусть G – группа и $p_1 > p_2 > \ldots > p_t$ – различные простые делители порядка группы G. Тогда группа G называется дисперсивной по Оре, если существуют подгруппы $P_1, P_2, \ldots, P_t$ такие, что P_k – силовская p_k-подгруппа группы G и подгруппа $P_1, P_2, \ldots, P_k$ нормальна в G для всех $k = 1, 2, \ldots, t$.

ТЕОРЕМА 3.7. *Группа G дисперсивна по Оре тогда и только тогда, когда $G = AB$, где подгруппа A квазинормальна в G, B дисперсивна по Оре и каждая максимальная подгруппа любой нециклической силовской подгруппы группы A слабо нормальна в G.*

Доказательство. Пусть $G = AB$, где подгруппа A s-квазинормальна в G, B дисперсивна по Оре и каждая максимальная подгруппа любой нециклической силовской подгруппы группы A слабо нормальна в G. Покажем, что группа G дисперсивна по Оре. Предположим, что это не верно и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда:

(1) *Каждая собственная подгруппа M группы G, содержащая A, дисперсивна по Оре*.

Пусть $A \le M \le G$, где $M \ne G$. Тогда $M = M \cap AB = A(M \cap B)$, где $M \cap B$ дисперсивна по Оре и A s-квазинормальна в M. Так как по лемме 2.2 (2) любая максимальная подгруппа каждой нециклической силовской подгруппы из A слабо нормальна в M и $|M| < |G|$, то по выбору группы G мы имеем (1).

(2) *Пусть H – неединичная нормальная подгруппа в G, являющаяся p-группой для некоторого простого числа p. Допустим, что либо H содержит силовскую p-подгруппу P из A, либо P циклична, либо $H \le A$. Тогда G/H дисперсивна по Оре.*

Если $A \le H$, то $G/H = BH/H \cong B/B \cap H$ дисперсивна по Оре. Пусть теперь A не содержится в H. Так как $|G/H| < |G|$, то нам лишь нужно показать, что условия теоремы справедливы для G/H. Ясно, что $G/H = (HA/H)(BH/H)$, где HA/H s-квазинормальна в G/H и BH/H дисперсивна по Оре. Пусть Q/H силовская q-подгруппа из AH/H и M/H – произвольная максимальная подгруппа в Q/H. Пусть Q_1 – силовская q-подгруппа из Q такая, что $Q = HQ_1$. Ясно, что Q_1 – силовская q-подгруппа группы AH. Значит, $Q = A_qH$ для некоторой силовской q-подгруппы A_q из A. Предположим, что Q/H не является циклической подгруппой. Тогда A_q не циклична. Покажем, что M/H слабо нормальна в G/H. Если $H \le A$, то это прямо следует из леммы 2.2. Допустим, что либо силовская p-подгруппа P из A циклическая, либо $P \le H$. Тогда $p \ne q$. Покажем, что $M \cap A_q$ – максимальная в A_q подгруппа. Так как $M \ne Q$ и $A_qH = Q$, то $M \cap A_q \ne A_q$. Предположим, что для некоторой подгруппы T из G мы имеем $M \cap A_q \le T \le A_q$, где $M \cap A_q \ne T \ne A_q$. Тогда $M = H(M \cap A_q) \le HT \le HA_q = Q$. Так как M – максимальная в Q подгруппа, то либо $M = TH$, либо $TH = HA_q$. Если $M = TH$, то $T \le M \cap A_q$, что противоречит выбору подгруппы T. Значит, $TH = HA_q$ и поэтому мы имеем $A_q = A_q \cap TH = T(A_q \cap H) \le T(M \cap A_q) = T$, противоречие. Следовательно, $M \cap A_q$ – максимальная в A_q подгруппа и по условию $M \cap A_q$ слабо нормальна в G. Значит, $M/H = (M \cap A_q)H/H$ слабо нормальна в G/H. Следовательно, условия теоремы справедливы для G/H.

(3) *Если p – простое число и $(p,|A|) = 1$, то $O_p(G) = 1$.*

Пусть $H = O_p(G) \ne 1$. Тогда ввиду (2) G/H дисперсивна по Оре. С другой стороны, если π – множество всех простых делителей $|A|$, то ввиду леммы 2.1 (3) и леммы 2.4 $A \le E$, где E – нормальная π-подгруппа в G и поэтому $G/E \cong B/B \cap E$ дисперсивна по Оре. Но тогда $G \cong G/H \cap E$ дисперсивна по Оре, противоречие. Значит, справедливо (3).

(4) *G разрешима.*

По условию A s-квазинормальна в G и поэтому ввиду леммы 2.1 (3) и леммы 2.4, A содержится в некоторой разрешимой нормальной подгруппе E группы G. Так как $G/E \cong B/B \cap E$ дисперсивна по Оре, то G разрешима.

(5) $A_G \ne 1$.

Предположим, что $A_G = 1$. Тогда согласно лемме 2.5 A нильпотентна. Пусть P – силовская p-подгруппа группы A. Поскольку A субнормальна в G, то P субнормальна в G. Значит, по лемме 2.4 $P \le O_p(G)$. Но ввиду (2) $G/O_p(G)$ дисперсивна по Оре и поэтому по выбору группы G $P = A$. Пусть q – наименьший простой делитель $|G/O_p(G)|$. Тогда G имеет нормальную максимальную подгруппу M такую, что $P \le M$ и $|G:M| = q$. Пусть r – наибольший простой делитель $|G|$, R – силовская r-подгруппа группы M. Тогда ввиду (1), R нормальна в M и поэтому R нормальна в G. Если $r \ne q$, то R – силовская r-подгруппа группы G и поэтому G/R дисперсивна по Оре. Отсюда следует, что G дисперсивна по Оре, противоречие. Следовательно, $r = q$. Но тогда $G/O_p(G)$ r-группа. Пусть B_r – силовская r-подгруппа в B. Тогда B_r – силовская r-подгруппа в G. Поскольку AB_q – подгруппа группы G и ввиду (1), AB_q дисперсивна по Оре, то B_q нормальна в AB_q. Так как B дисперсивна по Оре, то B_q нормальна в B и поэтому B_q нормальна в G. Следовательно, группа G дисперсивна по Оре. Полученное противоречие доказывает (5).

Заключительное противоречие

Пусть H – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в A. Пусть H – p-группа и P – силовская p-подгруппа группы A. Ввиду (2) G/H дисперсивна по Оре. Пусть q – наименьший простой делитель $|G/H|$. Тогда G имеет нормальную максимальную подгруппу M такую, что $P \leq M$ и $|G:M| = q$. Пусть r – наибольший простой делитель $|G|$, R – силовская r-подгруппа группы M. Тогда ввиду (1), R нормальна в M и поэтому R нормальна в G. Рассуждая как выше, видим, что $r = q$. Но тогда G/H – r-группа. Значит, $H = A$ и поэтому G дисперсивна по Оре согласно теореме 1.4 из [16]. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431 – 460.
2. Ito, N. Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen / N. Ito, J. Szep // Act. Sci. Math. – 1962. – Vol. 23. – P. 168 – 170.
3. Deskins, W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 125 – 132.
4. Thompson, J.G. An example of core-free quasinormal subgroups of p-groups / J.G. Thompson // Math. Z. – 1967. – Vol. 96, № 2. – P. 226 – 227.
5. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups in Infinite Groups / S.E. Stonehewer // Math. Z. – 1972. – Vol. 125. – P. 1 – 16.
6. Maier, R. The embedding of permutable subgroups in finite groups / R. Maier, P. Schmid // Z. Math. – 1973. – Vol. 131. – P. 269 – 272.
7. Schmid, P. Subgroups permutable with all Sylow subgroups / P. Schmid // J. Algebra. – 1998. – Vol. 207. – P. 285 – 293.
8. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups. Vol. 14: De Gruyter Expositions in Mathematics / R. Schmidt. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1994. – P. 475.
9. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois Math. Journal. – 1957. – Vol. 1. – P. 115 – 187.
10. Wang, Y. *C*-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1995. – Vol. 180. – P. 954 – 965.
11. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
12. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
13. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205 – 221.
14. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Polygonal Publishen House, Passaic, N.J., 1982. – 382 p.
15. Kegel, O.H. Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 90 – 93.
16. Скиба, А.Н. Конечные группы со слабо квазинормальными подгруппами / А.Н. Скиба, О.В. Титов. – Гомель, 2006. – 26 с. – (Препринт / Гомельский госуниверситет; № 9).
17. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 p.

Поступила 22.02.2007