

Такая многопараметричность определяет множественность решений при определении резонансного характера взаимодействия ЭМВ с АС. В этом случае представляет интерес выявление факторов, влияющих на процесс взаимодействия, для оптимизации выбора параметров воздействующих ЭМВ. Численные исследования компонентов тензора диэлектрической проницаемости выбранной модели позволяют провести оценки основных закономерностей при вариации одного или нескольких параметров. Аттестация компонентов или комбинаций компонентов тензора диэлектрической проницаемости может быть проведена по двум вариантам.

1. Одномерный:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\xi &= \varepsilon_\xi (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n), \\ \varphi_m &= \text{var}, \text{ из } \varphi_1 \dots \varphi_n = \text{const}, \\ m &= 1 \dots n, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\xi$  – номер компонента или комбинации компонентов тензора,  
 $\varphi_m$  – аттестационный параметр.

2. Двухмерный:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \text{var}, \varphi_h = \text{var} \text{ из } \varphi_1 \dots \varphi_n = \text{const}, \\ m &= 1 \dots n, h \neq m \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \text{var}, \varphi_h = \text{var}, \varphi_\tau = \text{var} \text{ из } \varphi_1 \dots \varphi_n = \text{const}, \\ m &= 1 \dots n, h \neq m, \tau \neq m, h \neq \tau. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом алгоритмы оценок, направленные на определение закономерностей резонансного поведения ЭМВ, зависят от исследуемых параметров выбранной электродинамической модели.

При одночастотной гармонической модуляции амплитуды и частоты радиосигнал имеет вид

$$e(t) = E_\omega (1 + k_m \cos \Omega t) \cos [\omega t + \beta \cdot \cos \Omega t], \quad (5)$$

где  $E_\omega$  – амплитуда сигнала несущей частоты  $\omega$ ;  
 $k_m$  – коэффициент амплитудной модуляции;  
 $\beta$  – индекс частотной модуляции.

При воздействии сигнала со смешанной амплитудно-частотной модуляцией (АЧМ) составляющие скорости частиц будут определяться

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_x = \frac{e}{m} E_x (1 + \beta \cdot \cos \Omega t) \frac{j\tilde{\omega}_4 + \nu}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2} - \frac{e}{m} \omega_r E_y (1 + \beta \cdot \cos \Omega t) \frac{1}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2}, \\ \mathfrak{g}_y = \omega_r \frac{e}{m} \frac{E_x (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2} + \frac{e}{m} \frac{E_y (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)(j\tilde{\omega}_4 + \nu)}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2}, \\ \mathfrak{g}_z = \frac{e}{m} \frac{E_z (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)}{j\tilde{\omega}_4 + \nu}, \end{cases} \quad (6)$$

где 
$$\tilde{\omega}_4 = \omega [1 - k_m^2 \sin^2 \Omega t]. \quad (7)$$

Плотности токов определяются выражениями

$$\begin{cases} \delta_x = \varepsilon_0 \omega_n^2 E_x \frac{(1 + \beta \cdot \cos \Omega t)(j\tilde{\omega}_4 + \nu)}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2} - \frac{\varepsilon_0 \omega_r^2 \omega_r E_y (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2}, \\ \delta_y = \frac{\varepsilon_0 \omega_n^2 \omega_r E_x (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2} + \frac{\omega_r^2 \varepsilon_0 E_y (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)(j\tilde{\omega}_4 + \nu)}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2}, \\ \delta_z = \frac{\varepsilon_0 \omega_n^2 E_z (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)}{j\tilde{\omega}_4 + \nu}, \end{cases} \quad (8)$$

а компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды для двух частичного потока

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \epsilon_r (1 - k_m^2 \sin \Omega \cdot t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Gamma i}^2 \tilde{\omega}_4}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2 - v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} + j \left[ \frac{\epsilon_r \beta \cdot k_m \sin \Omega \cdot t}{1 + \beta \cdot \cos \Omega \cdot t} - \frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0} - \frac{\omega_{\Gamma i}^2 v_i}{\omega} \frac{\tilde{\omega}_4^2 + v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_{\Gamma i}^2 \tilde{\omega}_4}{\omega} \frac{(\omega_{\Gamma i} - v_i)^2 - \tilde{\omega}_4^2}{((v_i + \omega_{\Gamma i})^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} + \right. \\ &\quad \left. - j \left[ \frac{\omega_{\Gamma i}^2 v_i}{\omega} \frac{(\tilde{\omega}_4 + v_i)^2 + \omega_{\Gamma i}^2}{((v_i + \omega_{\Gamma i})^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} \right] \right\}, \\ \dot{\epsilon}_2 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Gamma i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2 + v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} - \frac{2j \tilde{\omega}_4 v_i \omega_{\Gamma i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega [(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2]} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_{\Gamma i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega} \frac{(\tilde{\omega}_4 + v_i)^2 + v_i^2}{((v_i + \omega_{\Gamma i})^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_3 &= \epsilon_r (1 - k_m^2 \sin \Omega \cdot t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Gamma i}^2 \tilde{\omega}_4}{\omega} \frac{1}{v_i^2 + \tilde{\omega}_4^2} + \right. \\ &\quad \left. + j \left[ \frac{\epsilon_r \beta \cdot k_m \sin \Omega \cdot t}{1 + \beta \cdot \cos \Omega \cdot t} - \frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0} - \frac{\omega_{\Gamma i}^2 v_i}{\omega} \frac{1}{\tilde{\omega}_4^2 + v_i^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) видно, что компоненты тензора включают в себя параметры смешанного модулированного сигнала ( $K_m$ ,  $\beta$ ,  $\Omega$ ,  $K_\omega$ ) и имеют более сложную зависимость по сравнению с АМ- и ЧМ-сигналами.

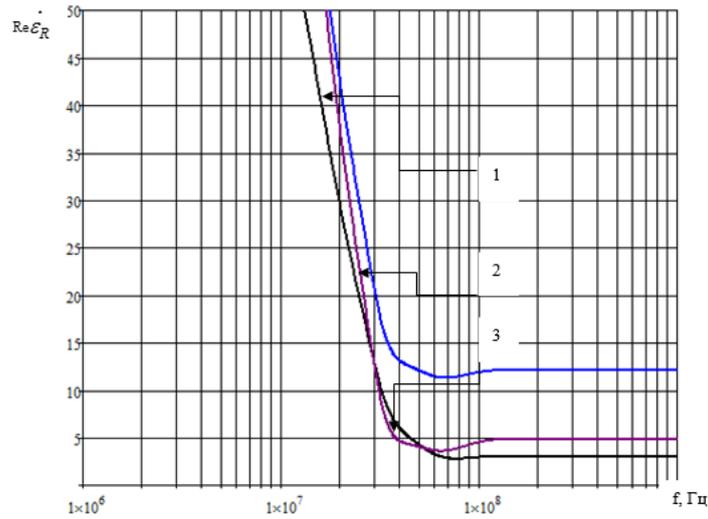
Тензор диэлектрической проницаемости имеет вид (9). Компоненты  $\tilde{\epsilon}$  были проанализированы для тех же значений  $\epsilon_r$ ,  $\sigma_r$ ,  $v_{эффе}$  и  $N_e$ , что и в предыдущих случаях.

Численные исследования показали, что  $\text{Re } \dot{\epsilon}_R \approx \text{Re } \dot{\epsilon}_L$  и  $\text{arg } \dot{\epsilon}_R \approx \text{arg } \dot{\epsilon}_L$ . Как видно из рисунка 1, комбинационный элемент (КЭ)  $\text{Re } \dot{\epsilon}_R$  при частоте несущего колебания  $f = 10^5 \dots 10^6$  Гц не изменяется и примерно равен нулю, причем влияние частоты амплитудной модуляции на диэлектрическую проницаемость на этом отрезке частот практически отсутствует. В диапазоне частот  $f = 10^6 \dots 10^9$  Гц изменение коэффициента  $k_m$  и частоты модуляции  $F$  приводит к существенному изменению величины  $\text{Re } \dot{\epsilon}_R$ . Увеличение частоты модуляции и коэффициента амплитудной модуляции (АМ) приводит к уменьшению  $|\text{Re } \dot{\epsilon}_R|$  и изменению частот  $f_{2\Omega}$  и  $f_{2\Omega}$ . Так, при  $F = 1$  МГц,  $k_m = 0,5$  происходит уменьшение  $f_{2\Omega}$  и увеличение  $f_{2\Omega}$ , а для  $F = 10$  МГц,  $k_m = 1$  – увеличение и  $f_{2\Omega}$ , и  $f_{2\Omega}$  по сравнению со значениями частот для  $F = 100$  кГц и  $k_m = 0,1$ . Индекс частотной модуляции (ЧМ)  $\beta$  не влияет на комбинационные элементы  $\text{Re } \dot{\epsilon}_R$  и  $\text{Re } \dot{\epsilon}_L$  [6–8].

Как видно из рисунка 2, значение  $\text{arg } \dot{\epsilon}_R$  изменяется от  $10^\circ$  до  $180^\circ$  на отрезке частот  $10^5 \dots 5 \cdot 10^7$  Гц, а дальше происходит резкое уменьшение фазы до  $-180^\circ$  (при  $f \approx 5 \cdot 10^7$  Гц) и до  $-60^\circ$  (при  $f \approx 10^8$  Гц) при  $F = 10$  МГц,  $\beta = 10$  и  $k_m = 1$ . При дальнейшем увеличении частоты несущего колебания фаза остается неизменной. Для  $F = 10$  МГц,  $\beta = 10$  и  $k_m = 1$  характер изменения  $\text{arg } \dot{\epsilon}_R$  остается прежним, за исключением численных значений. Дальнейшее увеличение частоты практически не оказывает влияния на величину  $\text{arg } \dot{\epsilon}_R$ . При  $\beta = 100$  и частоте модуляции  $F = 100$  кГц...1 МГц  $\text{arg } \dot{\epsilon}_R \approx -180^\circ$  во всем диапазоне частот.

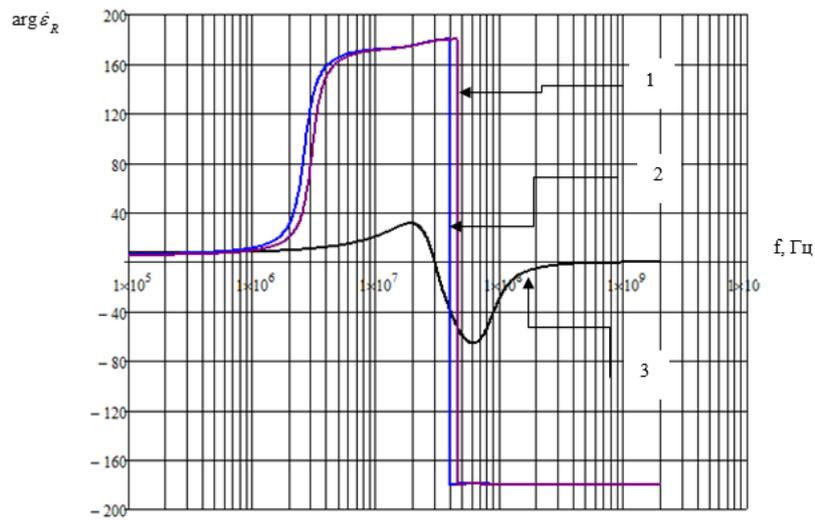
Анализ зависимостей  $\text{arg } \dot{\epsilon}_R = \varphi(k_m)$  показывает, что при  $k_m = 0 \dots 0,9$  (рисунок 3) величина  $\text{Re } \dot{\epsilon}_R$  остается постоянной. Дальнейшее увеличение  $k_m$  приводит к росту КЭ тензора диэлектрической проницаемости. Особенно заметное влияние этого коэффициента наблюдается при значениях  $k_m = 0,9 \dots 1,0$ . На фазу КЭ (рисунок 4) оказывают влияние очень маленькие значения коэффициента АМ ( $k_m \approx 0 \dots 0,1$ ) [9].

Анализ фазовых зависимостей показывает, что резкий фазовый сдвиг происходит при изменении частоты в пределах 50...60 МГц. Данный фактор может быть использован для создания метода поиска и оконтуривания залежей углеводородов при помощи АЧМ-сигнала.



1 – для  $F = 100$  кГц,  $k_m = 0,1$ ; 2 – для  $F = 1$  МГц,  $k_m = 0,5$ ; 3 – для  $F = 10$  МГц,  $k_m = 1$

Рисунок 1. – Зависимости  $\text{Re } \dot{\epsilon}_R$



1 – для  $F = 100$  кГц,  $\beta = 10$ ,  $k_m = 0,1$ ; 2 – для  $F = 10$  МГц,  $\beta = 10$ ,  $k_m = 1$ ;  
3 – для  $F = 10$  МГц,  $\beta = 10$ ,  $k_m = 10$

Рисунок 2. – Зависимости  $\text{arg } \dot{\epsilon}_R$

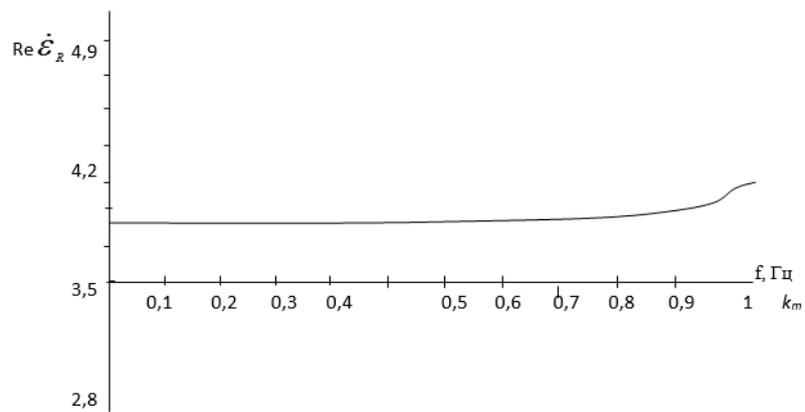
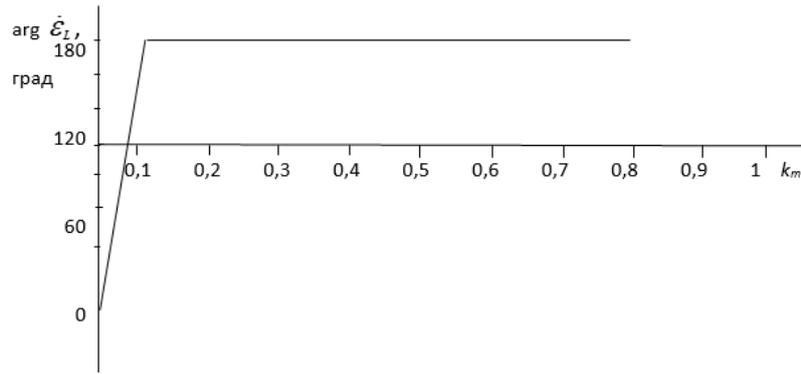
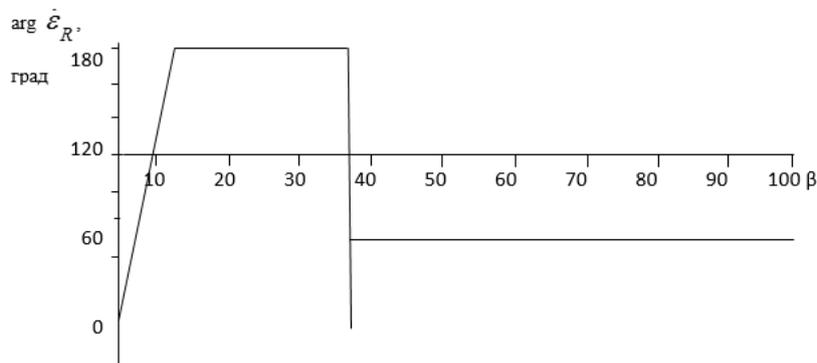


Рисунок 3. – Зависимость  $\text{Re } \dot{\epsilon}_R = f(k_m)$

Рисунок 4. – Зависимость  $\arg \dot{\varepsilon}_L = f(k_m)$ 

Как видно из рисунка 5, влияние индекса ЧМ на фазу КЭ наиболее существенно при  $\beta = 0 \dots 12$ , когда фаза  $\arg \dot{\varepsilon}_R$  резко изменяется от  $-180^\circ$  до  $180^\circ$ , и при  $\beta \approx 25 \dots 28$ , когда фаза изменяется от  $180^\circ$  до  $-180^\circ$ . При  $\beta = 12 \dots 37$  значение  $\arg \dot{\varepsilon}_R \approx 180^\circ$ , а при  $\beta = 37 \dots 100$   $\arg \dot{\varepsilon}_R \approx -180^\circ$ .

Рисунок 5. – Зависимость  $\arg \dot{\varepsilon}_R = \varphi(k_m)$ 

Таким образом, оптимальный режим поиска и оконтуривания залежей углеводородов достигается при значении  $\beta = 37$  и  $\beta = 0 \dots 12$ .

Для получения отражательных характеристик исследуемая среда над УВЗ представляется в виде анизотропной неоднородности. В общем случае пространственная ориентация внешней нормали к границе раздела сред и волнового вектора  $\vec{k}$  является произвольной, и процесс взаимодействия ЭМВ с локальным включением на трассе распространения радиоволн (РРВ) можно представить в виде режима наклонного падения плоской волны с вертикальной поляризацией на безграничную поверхность с анизотропным импедансом (в приближении больших характерных размеров неоднородности по сравнению с длиной волны зондирующего сигнала). Появление кроссполяризационной компоненты в структуре поля, отраженной от анизотропной неоднородности плоской волны с заданной линейной поляризацией, приводит к необходимости исследования пары коэффициентов Френеля  $R_{\text{ВВ}}$ ,  $R_{\text{ВГ}}$  для вертикальной и  $R_{\text{ГГ}}$ ,  $R_{\text{ГВ}}$  для горизонтальной поляризации падающей волны. В случае вертикальной поляризации ЭМВ для выбранной системы координат справедливы следующие соотношения [3]

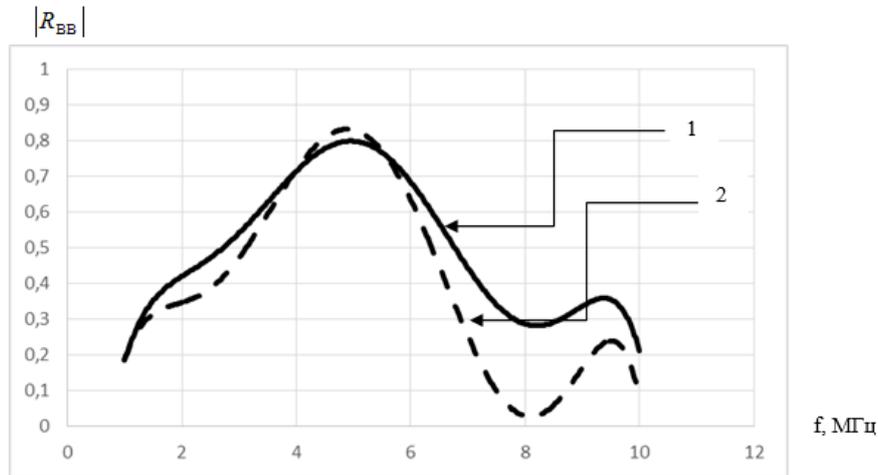
$$\begin{aligned} E_x &= E_{\text{зад}} + E_{\text{хотр}} = E_0(1 - R_{\text{ВВ}}) \cos \Theta \\ E_y &= -E_0 R_{\text{ВГ}} \\ H_x &= \frac{E_0}{Z_0} R_{\text{ВГ}} \cos \Theta \\ H_y &= \frac{E_0}{Z_0} (1 + R_{\text{ВВ}}) \end{aligned} \quad (10)$$

и импедансные граничные условия [4]

$$\begin{aligned}
 E_x &= -Z_0(\dot{Z}_{11}H_x - \dot{Z}_{12}H_y), \\
 E_y &= -Z_0(\dot{Z}_{21}H_x - \dot{Z}_{22}H_y), \\
 Z_{11} = Z_{22} &= -\frac{1}{2j\sqrt{\dot{\epsilon}_R\dot{\epsilon}_L}}(\sqrt{\dot{\epsilon}_R} - \sqrt{\dot{\epsilon}_L}), \\
 Z_{12} = Z_{21} &= -\frac{1}{2\sqrt{\dot{\epsilon}_R\dot{\epsilon}_L}}(\sqrt{\dot{\epsilon}_R} + \sqrt{\dot{\epsilon}_L}),
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

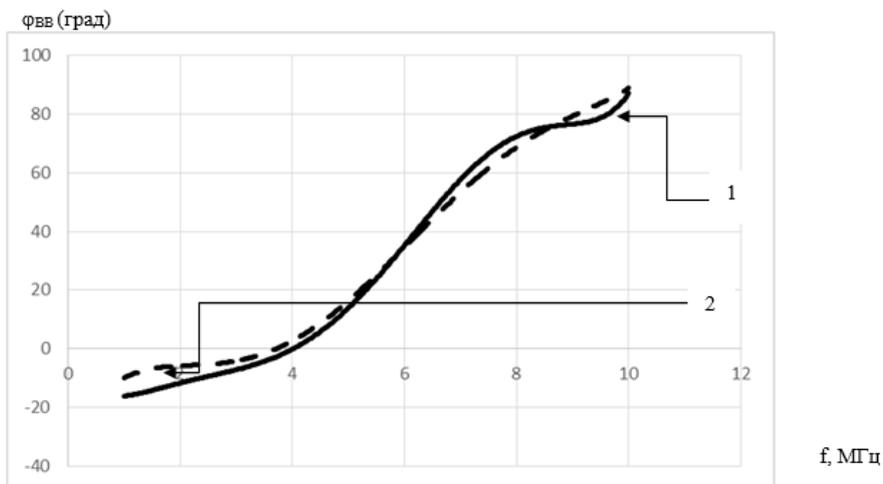
где  $E_0$ ,  $\Theta$  – амплитуда падающей волны и угол падения ЭМВ относительно внешней нормали  $\vec{n}$ ,  
 $E_{x,y}$ ,  $H_{x,y}$  – проекции падающей и отраженной волны на координатные оси,  
 $Z_0$  – характеристическое сопротивление среды над УВЗ.

На рисунках 6, 7 представлены частотные зависимости модуля  $|R_{\text{ВВ}}|$  и фазы  $\varphi_{\text{ВВ}}$  при  $\theta = 0^\circ$  для различных соотношений частот и амплитуд двух воздействующих сигналов, рассчитанных по формулам (11).



1 – для  $k_m = 0,5$ ; 2 – для  $k_m = 1$

Рисунок 6. – Зависимости  $|R_{\text{ВВ}}| = f(f)$  при нормальном падении



1 – для  $k_m = 0,5$ ; 2 – для  $k_m = 1$

Рисунок 7. – Зависимости  $|\varphi_{\text{ВВ}}| = f(f)$  при нормальном падении

Выражения (10) учитывают возникающие в структуре отраженной волны кроссполяризационные искажения, что приводит к смещению траектории луча относительно направления распространения падающей волны. В случае использования круговой поляризации принимаемая ЭМВ будет иметь эллиптическую в общем случае поляризацию, а возникающие при этом поляризационные искажения за счет влияния анизотропной неоднородности могут быть оценены коэффициентом эллиптичности [10; 11].

В исследуемом диапазоне частот наблюдается неравномерный характер изменения  $|R_{\text{ВВ}}|$ . Модуль коэффициента отражения имеет максимальное значение, равное 0,85, в диапазоне частот от 4 до 6 МГц. На частотах в диапазоне от 100 кГц до 5 МГц наблюдается рост этого коэффициента от 0,2 до 0,85, а на частотах выше 5 МГц – плавное уменьшение от 0,85 до 0,1 на частоте  $f_2 = 10$  МГц. Величина  $|R_{\text{ВВ}}|$  зависит от коэффициента модуляции  $k_m$ . Влияние коэффициента  $k_m$  сказывается незначительно, отличия характеристик практически несущественны. В целом характер изменения величины  $|R_{\text{ВВ}}|$  от частоты  $f$  при различных коэффициентах  $\beta$  имеет одинаковый вид.

Таким образом, при анализе отражательных характеристик максимум коэффициента отражения  $|R_{\text{ВВ}}| = 0,85$  наблюдается на частоте  $f = 5$  МГц для значения коэффициента модуляции  $k_m = 0,5$ , что может быть использовано для дальнейшего создания методов поиска и идентификации залежей углеводородов в режиме АЧМ-сигнала.

**Заключение.** Доказано, что применение АЧМ-сигнала приводит к появлению дополнительных функциональных зависимостей компонентов тензора от параметров воздействующего сигнала. Это дает возможность повысить уровень информации о залежи углеводородов. Также в режиме АЧМ-сигналов изменения частоты модуляции и коэффициента АМ вызывают изменение частот электронно-плазменного резонанса. Коэффициент АМ приводит к изменению как комбинированных элементов тензора диэлектрической проницаемости, так и их фаз (только при  $k_m \approx 0 \dots 0,1$ ). Влияние коэффициента частотной модуляции проявляется при его значениях  $\beta < 12$  и  $\beta = 37$ . При указанных значениях наступает электронно-плазменный резонанс.

Учитывая анализ отражательных характеристик АЧМ-сигналов для создания электрофизической установки для поиска и оконтуривания УВЗ на основе регистрации фазовых сдвигов высокочастотных и модулирующих сигналов в режиме амплитудной модуляции с несущей частотой в интервале от 1 до 5 ГГц и модулирующей частотой в интервале от 10 до 100 МГц, которая позволила повысить уровень достоверности идентификации углеводородов до 85–90% и точность определения границ залежи на 10–15%, был использован АЧМ-сигнал, дающий наиболее качественные параметры по коэффициенту отражения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов, С.Б. Высокочастотные электромагнитные методы исследования нефтяных и газовых скважин / С.Б. Денисов. – М. : Недра, 1986. – 142 с.
2. Фролов, А.Д. Поиски нефтегазовых месторождений радиоволновыми методами / А.Д. Фролов, В.Д. Озеров // Региональная, разведочная и промысловая геофизика. – М. : ВИЭМС, 1969. – № 19. – 32 с.
3. Каленов, Е.Н. Эффективность применения электроразведки при поисках нефти и газа / Е.Н. Каленов // Геофизические исследования земной коры. – М. : Недра, 1976. – С. 137–141.
4. Матвеев, Б.К. Электроразведка при поисках месторождений полезных ископаемых / Б.К. Матвеев. – М. : Недра, 1982. – 375 с.
5. Ваньян, Л.Л. Становление электромагнитного поля и его использование для решения задач структурной геологии / Л.Л. Ваньян. – М. : Наука, 1966. – 103 с.
6. Черняк, Г.Я. Электромагнитные методы в гидрогеологии и инженерной геологии / Г.Я. Черняк. – М. : Недра, 1987. – 215 с.
7. Гололобов, Д.В. Поиск месторождений углеводородных залежей радиоволновым методом / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич // Приборы. Справочный журнал. – М. : Научтехмаш, 1999. – № 10. – С. 25–27.
8. Гололобов, Д.В. Фазовые методы идентификации углеводородных залежей / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич, А.О. Рак // Инженерный вестник. – 2005. – № 1 (20). – С. 16–18.
9. Способ геоэлектроразведки углеводородных залежей : пат. ВУ 17382 / В.Ф. Янушкевич, Д.В. Гололобов, О.В. Орлова. – Оpubл. 24.04.2013.
10. Способ геоэлектроразведки углеводородных залежей : пат. ВУ 16771 / А.О. Бездель, В.Ф. Янушкевич, Ю.А. Щаденков. – Оpubл. 28.02.2013.

11. Калининцев, С.В. Отражательные характеристики углеводородной залежи при двухчастотном взаимодействии в режиме мощного НЧ-сигнала / С.В. Калининцев, Н.В. Цывис, В.Ф. Янушкевич // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2004. – № 4. – С. 40–44.
12. Отражательные характеристики среды над УВЗ при двухчастотном взаимодействии / Д.В. Гололобов [и др.] // Проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств : материалы III Международ. науч.-техн. конф., Новополоцк, 26–28 мая 2004 г. / Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2004. – Т. 2. – С. 226–229.

18.03.2020

**THE ANALYSIS OF PHASE CHARACTERISTICS OF THE ENVIRONMENT  
OVER THE HYDROCARBON DEPOSIT AT INFLUENCE OF SIGNALS  
WITH THE MIXED TYPE MODULATION**

**S. KALINTSEV, V. YANUSHKEVICH, V. TALDIKIN**

*The process of the influence of electromagnetic waves on an anisotropic medium is investigated on the basis of the existing theory of the interaction of electrical signals and anisotropic media. The results obtained in the course of research allow us to qualitatively evaluate the use of modulated signals to optimize the methods of electromagnetic search and contouring of hydrocarbon deposits.*

**Keywords:** *anisotropic medium, hydrocarbon deposit, quasi-hydrodynamic approximation, modulated signal, hydrocarbon deposits contouring, phase characteristic, collision frequency.*

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.6:517.958

### О КОНЕЧНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

**Н.К. ВОЛОСОВА**

(Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана);

д-р физ.-мат. наук, проф. К.А. ВОЛОСОВ

(Российский университет транспорта, Москва);

канд. физ.-мат. наук А.К. ВОЛОСОВА

(ООО «Трамплин», Москва);

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ

(Полоцкий государственный университет)

*Предложен алгоритм прогонки в матричной форме с шестым порядком погрешности для решения уравнения Пуассона на прямоугольнике за конечное число арифметических операций. Аналитическим примером и программой, использующей данный алгоритм, подтвержден шестой порядок погрешности. В теореме 1 доказана монотонность матриц с диагональным преобладанием, у которых элементы главной диагонали отрицательны (положительны), а недиагональные положительны (отрицательны). В теореме 2 получена верхняя оценка бесконечной нормы обратной к монотонной матрице. В теореме 3 получены достаточные условия корректности предложенного алгоритма. Показано, что быстродействие данного алгоритма в десятки раз выше быстродействия алгоритма решения уравнения Пуассона на прямоугольнике методом простой итерации с той же формулой аппроксимации с шестым порядком погрешности.*

**Ключевые слова:** метод прогонки в блочной форме, диагональные матрицы, монотонные матрицы, обратные задачи математической физики, численные методы, уравнение Пуассона, трансляция аналитического решения в численный массив.

**Введение.** Матрицы и матричные уравнения специального типа применяются во многих разделах прикладной математики. В квантовой механике динамика частиц со спином определяется матрицами квартернионов (полуквартернионов) [1; 2]. Уравнение Пуассона на прямоугольнике (параллелепипеде) можно решить методом прогонки [3; 4; 5; 6; 10; 12; 13; 19]. Алгебраический метод прогонки совместно с формулой простой итерации [5] является приближенным методом, так как число итераций не ограничено, но имея формулу аппроксимации уравнения Пуассона с шестым порядком погрешности, можно значительно снизить погрешность и время вычислений [5]. В данной работе рассмотрен метод прогонки в матричной форме для численного решения уравнения Пуассона за конечное число арифметических операций. Идея работы частично основана на идее статьи [10], а также на идее модификации краевых столбцов и строк в матрице правой части уравнения Пуассона с шестым порядком аппроксимации [5]. Однако в работе [10] и в данной работе возможно обобщение задачи, то есть решение уравнения Пуассона на прямоугольной сетке  $n_1 \times n_2$  с квадратными ячейками  $h_1 = h_2 = h$ , но матрицы коэффициентов  $A, B$  при этом по-прежнему квадратные  $n_1 \times n_1$ . Этот эффект мы назвали эффектом прямоугольной шахты, в которой перемещается квадратная кабина лифта (квадратные матрицы  $A, B$   $n_1 \times n_1$ ) в направлении  $n_2$ , минимальное перемещение  $h_1 = h_2 = h$  (перемещение поперек шахты не разрешается). Возможны ситуации  $n_1 < n_2$ ,  $n_1 > n_2$  – длина шахты как больше размера кабины, так и меньше. Получены достаточные условия корректности предложенного алгоритма, теоремы 1, 2, 3. Метод можно использовать в численных задачах математической физики [15; 16; 17], а также в двумерных задачах гидродинамики, система уравнений которых содержит уравнение Пуассона от функции тока, где правая часть – функция вихря  $\Delta\psi = -\omega$  [20].

**Постановка задачи.** Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольнике с неизвестной функцией  $u(x, y)$  с неоднородными граничными условиями  $u \in [c, d]$ ,  $x \in [a, b]$  ( $\varphi_1(y)$ ,  $\varphi_2(y)$ ,  $\varphi_3(x)$ ,  $\varphi_4(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [c, d]$ ):

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & (x, y) \in D = (a, b) \times (c, d) \\ u(a, y) = \varphi_1(y), u(b, y) = \varphi_2(y), u(x, c) = \varphi_3(x), u(x, d) = \varphi_4(x), & x \in [a, b], y \in [c, d]. \end{cases} \quad (1)$$