УДК 528.063

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИРАЩЕНИЙ ОБРАТНОЙ ВЕСОВОЙ И РАСШИРЕННОЙ ПСЕВДООБРАТНОЙ МАТРИЦЫ РЕКУРРЕНТНЫМ СПОСОБОМ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ВЕСОВ ИЗМЕРЕНИЙ

А.А. СКРИПЛЕНОК
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрен метод рекуррентного уравнивания с применением расширенной псевдообратной матрицы. Выведены формулы, позволяющие автоматизировать вычисления при обработке плановых и спутниковых геодезических сетей.

Новый метод уравнивания распространен на обработку геодезических сетей рекуррентным способом. Полученные нами формулы имеют практическое значение при обработке не только плановых, но и спутниковых геодезических сетей.

Введение. Из двух известных в уравнительных вычислениях на ЭВМ способах уравнивания – коррелатного и параметрического – последний способ признается наиболее удобным для программирования, так как условные уравнения составлять во много раз труднее, чем параметрические. При этом в производственных программах, независимо от способа уравнивания, как правило, составляются и анализируются условные уравнения фигур, полюса и дирекционных углов, так как в инструктивных документах регламентируются допуски на свободные члены этих уравнений.

Вопросами автоматизации коррелатного способа уравнивания посвящено много работ, но так как эти методы оказались сложнее параметрического способа, то они реже используются на производстве. Между тем преимущества коррелатного способа уравнивания в анализе грубых ошибок в результатах измерений, уравнивании полигонометрии стимулируют разработку простых алгоритмов реализации этого метода.

1. Разработка формул для оценки точности рекуррентным способом

Рекуррентное уравнивание геодезических сетей, основанное на последовательном учете некоррелированных измерений с уравнением поправок:

$$\nu_i = a_i \delta x_i + l_i , \tag{1.1}$$

позволяет решать многие задачи уравнительных вычислений с применением формул:

$$Q_i = Q_{i-1} - \left(1/g_i\right) Z_i^T Z_i ; \tag{1.2}$$

$$Z_i^T = Q_{i-1} a_i^T ; \tag{1.3}$$

$$g_i = 1/\mathrm{P}_i + a_i Z_i^T , \tag{1.4}$$

где Q_{i-1} (при $i = 1$ равняется Q_0) – начальная обратная матрица, выбор которой впервые разработан Ю.И. Маркузе [1]; $P_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$ – вес i-того измерения; a_i – коэффициент параметрических уравнений поправок i-того измерения.

Вместо (1.4) можно использовать следующую формулу:

$$g_i = 1/\Delta P_i + a_i Z_i^T , \tag{1.5}$$

которая является более общей, так как позволяет рекуррентным способом получить

$$\Delta Q = Q_i - Q_{i-1} \text{ при } P_i = P_i + \Delta P_i,$$

где ΔP_i – приращение к весу результата i-того измерения.

Как отмечается в работе [2], при проектировании геодезических сетей возникает вопрос определения такой точности измерений углов, длин линий, превышений, которая обеспечивала бы определение искомых параметров сети с заданной точностью. При этом предлагался достаточно сложный алгоритм с применением расширенной псевдообратной матрицы [3].

Сущность нашего предложения заключается в использовании формулы (1.5), участвующей при вычислении:

$$\Delta Q_i = -\left(1/g_i\right) Z_i^T Z_i \,. \tag{1.6}$$

Если при проектировании сетей применяется вес i-того измерения, например для вариантов P_1, P_2, P_3, …, P_j, то формулы (1.5) и (1.6) надо применить j – 1 раз. А это неэкономно, так как достаточно найти ΔQ_1 по формуле (6) при $\Delta P_1 = 1$ и в дальнейшем применить формулу:

$$\Delta Q_{ij} = K_j \Delta Q_{i,1} \,, \tag{1.7}$$

где

$$K_j = \frac{g_{\Delta P=1}}{g_{\Delta P\neq 1}} \,. \tag{1.8}$$

Когда оптимальное значение P_j найдено, соответствующие минимуму целевой функции

$$\Phi\left(X\right) = \sum_{n=1}^{t} \left| M_n - M_{доп.} \right| , \tag{1.9}$$

в которой M_n – ошибка положения пункта, вычисляемая по формулам:

$$M = \sigma_0 \sqrt{\left(Q_{i,j}\right)_{tt} + \left(Q_{i,j}\right)_{t+1,t+1}} \,; \tag{1.10}$$

$$\left(Q_i\right)_{tt} = \left(Q_{i-1}\right)_{tt} + \left(\Delta Q_i\right)_{t,t} \,, \tag{1.11}$$

итерации останавливают.

Аналогичный алгоритм применим и при определении приращений расширенной псевдообратной матрицы:

$$F = \left(A^T P A\right)^{-1} A^T P \,, \tag{1.12}$$

когда

$$F_{i+1} = F_i + Q_i A^{\mathrm{T}} \Delta P_j + K_j \Delta Q_{i,1} A^T P \,, \tag{1.13}$$

где

$$\Delta P_j = \begin{pmatrix} 0 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && 0 &&&&& \\ &&& 0 &&&& \\ &&&& \Delta P_j &&& \\ &&&&& 0 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& 0 \end{pmatrix} . \tag{1.14}$$

Область применения равенства (1.13) – при уравнивании и проектировании геодезических сетей с изменяющимися весами измерений.

2. Коррелатно-параметрическое уравнивание геодезических сетей рекуррентным способом

Рассмотрим алгоритм с применением корреляционной матрицы поправок в результаты измерений, используемый в параметрическом способе уравнивания [4]:

$$K_V = \left(E - AF\right) P^{-1} \,, \tag{2.1}$$

где $E_{N \times N}$ – единичная матрица; $A_{N \times 1}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; $P_{N \times N}$ – матрица весов результатов измерений, при этом

$$F = \left(A^T PA\right)^{-1} A^T P . \qquad (2.2)$$

В работе [5] впервые обнаружена взаимосвязь матрицы коэффициентов условных уравнений B, с матрицей K_V:

$$B^*_{N\times N} = K_V P = E - AF , \qquad (2.3)$$

где N – количество результатов измерений.

В теории коррелатного уравнивания используют матрицу $B_{r \times N}$, где r – количество избыточных измерений. Здесь решают систему условных уравнений:

$$BV + W = 0 , \qquad (2.4)$$

где $V_{N \times 1}$ – неизвестный вектор поправок в результаты измерений; $W_{r \times 1}$ – вектор свободных членов независимых условных уравнений.

Чтобы перейти от B^* к B, на ЭВМ устанавливают в геодезической сети в произвольном порядке необходимые измерения, а коэффициенты уравнений для оставшихся r избыточных измерений выделяют по независимым строкам из $B^*_{N \times N}$ и записывают их в $B_{r \times N}$.

Отметим, что матрица $B_{r \times N}$ может выбираться не всегда для всех r строк из $B^*_{N \times N}$, входящих в (2.3). Для плановой геодезической сети можно составлять на ЭВМ наиболее простые условные уравнения фигур, горизонта и дирекционных углов, а остальные, дополняющие до r независимые уравнения, переписать из (2.3). Например, при уравнивании геодезического четырёхугольника триангуляции предлагаемым способом достаточно составить три условных уравнения фигур, а вместо одного из пяти возможных вариантов условия полюса выбрать из матрицы B^* любую из восьми строк.

Ещё одна из целей данного исследования – автоматизировать алгоритм, используя рекуррентный способ.

Как известно, рекуррентное уравнивание геодезических сетей, основанное на последовательном учёте некоррелированных измерений с уравнением поправок

$$V_i = a_i \delta x_i + l_i , \qquad (2.5)$$

позволяет решать многие задачи уравнительных вычислений с применением формул:

$$Q_i = Q_{i-1} - \left(\frac{1}{q_i}\right) z_i^T z_i ; \qquad (2.6)$$

$$z_i^T = Q_{i-1} a_i^T ; \qquad (2.7)$$

$$q_i = \frac{1}{P_i} + a_i z_i^T , \qquad (2.8)$$

где Q_{i-1} – обратная матрица весов $i - 1$ измерения; P_i – вес i-того измерения; a_i – коэффициент параметрических уравнений поправок i-того измерения.

Однако этот алгоритм основан на параметрическом рекуррентном уравнивании. Необходимо применить коррелатное рекуррентное уравнивание. В итоге получим

$$\left(Q^{-1}_{i-1_{r\times r}} + B_{r\times N} P^{-1}_{N\times N} B^T_{N\times r}\right)^{-1} = Q_{i-1_{r\times r}} - Q_{r\times r} B_{r\times N} G^{-1}_{N\times N} B^T_{N\times r} Q_{r\times r} ; \qquad (2.9)$$

$$G_{N\times N} = P_{N\times N} + B^T_{N\times r} Q_{r\times r} B_{r\times N} , \qquad (2.10)$$

где Q_{i-1} – обратная матрица весов; $P_{N \times N}$ – матрица весов; $B_{r\times N}$ – матрица коэффициентов условных уравнений.

Основой формул (2.9) и (2.10) послужил коррелатный рекуррентный способ, приведенный в [6] М.А. Герасименко. Однако в нашей работе в формуле (2.10) дан вес $P^{-1}_{N\times N}$ вместо $P_{N\times N}$:

$$Z_i = Q_{i-1} b_i \,; \tag{2.11}$$

$$g_i = P_i + b_i^T Z_i \,; \tag{2.12}$$

$$Q_i = Q_{i-1} - \left(\frac{1}{g_i}\right) Z_i Z_i^T \,; \tag{2.13}$$

$$Q_0 = R_0^{-1} = E \cdot 10^m \,, \tag{2.14}$$

где $B_{r\times 1}$ – вектор-столбец матрицы условных уравнений.

В **заключение** отметим, что формулы (2.11) – (2.14) решают поставленную задачу по коррелатному уравниванию геодезических сетей рекуррентным способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркузе, Ю.И. Основы уравнительных вычислений: учеб. пособие для вузов / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1990. – 240 с.
2. Тамутис, З.П. Проектирование инженерных геодезических сетей / З.П. Тамутис. – М.: Недра, 1990. – 138 с.
3. Бондаренко, В.А. Области применения расширенной псевдообратной матрицы в теории и практике оптимального проектирования геодезических сетей / В.А. Бондаренко, В.И. Мицкевич. – Новополоцк, 1999. – 2 с. – Деп. в ЦНИИГАиК 28.06.1999, № 670 – Гд 99.
4. Линник, Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / Линник Ю.В. – М.: Физматиздат, 1962. – 352 с.
5. Герасименко, М.Д. Уравнивание триангуляции по методу условий с использованием однотипных условных уравнений / М.Д. Герасименко // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1973. – № 3. – С. 43 – 46.
6. Герасименко, М.Д. Современный метод наименьших квадратов с геодезическими приложениями / М.Д. Герасименко. – Владивосток, 1994. – 73 с.

Поступила 22.03.2007