УДК 528.063

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ, РЕАЛИЗУЮЩИЕ КОРРЕЛАТНЫЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ ПЛАНОВЫХ И ВЫСОТНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

О.Е. ГАРМАЗА, В.Е. ПЛЮТА, Н.С. СЫРОВА
(Полоцкий государственный университет)

Коррелатный способ уравнивания по праву является самым сложным при его реализации на ЭВМ. Причина заключается в неуниверсальности алгоритма составления матрицы условных уравнений, особенно при обработке главных геодезических сетей. Поскольку при оценке точности функции измеренных и уравненных величин оценочные функции составляются аналогично условным уравнениям, то возникают проблемы не только при уравнивании, но и после него на этапе окончательных вычислений. Приведен обзор существующих автоматизированных алгоритмов коррелатного способа уравнивания с одновременным обобщением известного способа профессора И.И. Монина на случай неравноточных измерений.

Введение

При коррелатном способе уравнивания под условием

$$V^{\mathrm{T}}\mathrm{P}V = \min \tag{1}$$

решают систему условных уравнений:

$$\mathrm{B}V + W = 0, \tag{2}$$

где $\mathrm{B}_{r\times N}$ – матрица коэффициентов условных уравнений; $\mathrm{W}_{r\times 1}$ – вектор свободных членов условных уравнений.

$\mathrm{V}_{N\times 1}$ – неизвестный вектор поправок в результаты измерений, вычисляемый по формуле:

$$V = -\mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{B}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}W, \tag{3}$$

где Р – диагональная матрица весов измерений.

Рассмотрим известные алгоритмы, автоматизирующие коррелатный способ уравнивания.

Алгоритм З.М. Юршанского

Автоматизированный алгоритм З.М. Юршанского [1] предлагает лишь частичную автоматизацию вычисления коэффициентов условных уравнений по формуле:

$$b_i = \frac{(W_i)_\varepsilon - W}{\varepsilon}, \tag{4}$$

где W – свободный член условного уравнения; W_i – значение свободного члена после искажения i-того измерения на малую величину ε.

Недостатком метода является то, что он предполагает программирование вычисления свободного члена, с последующим численным дифференцированием. Как показали исследования С.Г. Шнитко, величина ε может быть вычислена по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{|x| + 10^{-\frac{n}{3}}}}{10^{+\frac{n}{3}}}, \tag{5}$$

где x – аргумент функции (ордината или отметка); n – разрядная сетка ЭВМ.

Например, при $x = 0$, $n = 16$ величина $\varepsilon = 10^{-8}$, т.е. $\varepsilon = 10^{-\frac{n}{2}}$.

Алгоритм М.Д. Герасименко

В работах [2 – 4] разработана методика составления однозначных по форме условных уравнений для любых геодезических сетей, не зависящих от размерности пространства и числа определяемых пунктов.

Предполагается вычисление координат пунктов по необходимому числу измерений, для которых можно записать:

$$C+V_c=\overline{C}+\overline{V_c}\,, \tag{6}$$

где C – вектор-столбец измеренных значений избыточных величин; $\overline{C}$ – вектор-столбец вычисленных значений избыточных величин; V_c и $\overline{V_c}$ – вектор-столбцы соответствующих поправок.

Вектор $\overline{V_c}$ получается из выражения

$$\overline{V_c}=DV_x\,. \tag{7}$$

Здесь D – матрица частных производных от вектора $\overline{C}$ по координатам; V_x – вектор-столбец поправок к вектору предварительных координат определяемых пунктов.

Учитывая, что полученные вышеописанным методом предварительные координаты пунктов сети зависят только от значений необходимых измеренных величин, можно представить

$$V_x=F\,V_s\,. \tag{8}$$

Матрица F состоит из частных производных от вектора предварительных координат по измеренным величинам, выбранным в качестве необходимых.

Вектор-столбец V_s состоит из поправок к необходимым измеренным величинам.

Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} &G=DF\\ &B=\left[G-\mathrm{E}\right]\\ &W=\overline{C}-C\\ &V=\begin{bmatrix}V_s\\ V_c\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

получаем систему условных уравнений в матричном виде (2).

Этот способ имеет ряд преимуществ:

1) коэффициенты условных уравнений вычисляются по формулам, не зависящим от формы и размера геодезической сети;

2) не требуется решать неоднозначной задачи по выбору необходимых и избыточных измерений, так как с помощью первых вычисляются предварительные координаты пунктов, а для каждого избыточного измерения составляются однотипные условные уравнения координат.

Недостаток способа заключается в сложности реализации его на ЭВМ.

Алгоритм И.И. Монина

Все указанные выше способы обобщены на случай неравноточных измерений. При рассмотрении своего способа И.И. Монин пишет [5]: «веса измерений не вводятся и оценка точности уравненных величин не делается, так как эти вопросы хорошо известны». Действительно, зная B, матрицу весов P и вектор свободных членов W, оценка точности во всех пяти способах одинакова, а алгоритмы получения матриц B и W разные.

Традиционно способ И.И. Монина, изложенный в [5, 6], записывается для равноточных измерений.

Обобщим данный способ на случай неравноточных измерений.

Сначала приведем основные формулы способа И.И. Монина.

Для всех необходимых измерений (углов или длин линий) составляют систему параметрических уравнений поправок:

$$(V_1)_{t\times1}=(\mathrm{A}_1)_{t\times t}\,\delta\mathrm{X}_{t\times1}+(L_1)_{t\times1}, \tag{10}$$

а для оставшихся избыточных измерений записывают систему:

$$(V_2)_{r\times1}=(\mathrm{A}_2)_{r\times t}\,\delta\mathrm{X}_{t\times1}+(L_2)_{r\times1}, \tag{11}$$

где t – число параметров; r – количество условных уравнений; L – свободные члены параметрических уравнений.

При этом количество измерений $N=t+r$, что составляет количество строк в системах (10) и (11) совместно.

Запишем известную в коррелатном способе формулу для случая равноточных измерений:

$$V_{N\times 1} = -B^{T}_{N\times r}(B_{r\times N}B^{T}_{N\times r})^{-1}W_{r\times 1} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

где для третьего способа

$$B_{r\times N} = ((A_2)_{r\times t}(A_1)^{-1}_{t\times t}; -E_{r\times r}), \qquad (13)$$

E – единичная матрица;

$$W_{r\times 1} = -(A_2)_{r\times t}(A_1)^{-1}_{t\times t}(L_1)_{t\times 1} + (L_2)_{r\times 1}. \qquad (14)$$

В случае неравноточных измерений для системы уравнений (10) имеем матрицу весов $(P_1)_{t\times t}$, а для системы (11) – $(P_2)_{r\times r}$. Чтобы воспользоваться формулами (12) – (14), необходимо подставить в формулы (13) – (14) следующие матрицы:

$$(A_1)_{t\times t} = (P_1)^{\frac{1}{2}}_{t\times t}(A_1^{\text{для равноточных}})_{t\times t}, \qquad (15)$$

$$(A_2)_{r\times t} = (P_2)^{\frac{1}{2}}_{r\times r}(A_2^{\text{для равноточных}})_{r\times t}, \qquad (16)$$

$$(L_1)_{t\times 1} = (P_1)^{\frac{1}{2}}_{t\times t}(L_1^{\text{для равноточных}})_{t\times 1}, \qquad (17)$$

$$(L_2)_{r\times 1} = (P_2)^{\frac{1}{2}}_{r\times r}(L_2^{\text{для равноточных}})_{r\times 1}. \qquad (18)$$

Применяя без изменения формулы (12) – (14), необходимо откорректировать вектор $(V)_{N\times 1}$ по формуле:

$$V_{N\times 1} = \begin{bmatrix} (P_1)^{-\frac{1}{2}}_{t\times t}(V_1)_{t\times 1} \\ (P_2)^{-\frac{1}{2}}_{r\times r}(V_2)_{r\times 1} \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

Формулы (15) – (19) решают поставленную задачу.

Достоинством способа является автоматизация вычисления матрицы коэффициентов условных уравнений.

Как показали наши исследования, число обусловленности матрицы нормальных уравнений коррелат близко к числу обусловленности матрицы нормальных уравнений при параметрическом уравнивании, что является существенным недостатком этого способа.

Заключение. Приведенные способы различаются не только по алгоритму реализации, но и по степени автоматизированности вычислений, поэтому на геодезическом производстве следует отдать предпочтение алгоритму И.И. Монина, как наилучшему по универсальности при реализации на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юршанский, З.М. Обобщение задачи оценки точности функций без их предварительной линеаризации / З.М. Юршанский // Совершенствование программы и схемы построения опорных геодезических сетей на территории городов: материалы всесоюз. науч.-техн. конф. Ч. II. – Новосибирск: НИИГАиК. – 1980. – С. 16 – 25.
2. Герасименко, М.Д. Единый алгоритм составления условных уравнений и его применение для уравнивания и оценки точности геодезических построений / М.Д. Герасименко. – Тр. НИИГАиК. – Новосибирск. – 1975. – Т. 34. – С. 66 – 73.
3. Герасименко, М.Д. Современный метод наименьших квадратов с геодезическими приложениями / М.Д. Герасименко. – Владивосток, 1994. – 73 с.
4. Герасименко, М.Д. Уравнивание триангуляции по методу условий с использованием однотипных условных уравнений / М.Д. Герасименко // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1973. – № 3. – С. 43 – 46.
5. Монин, И.И. Единый алгоритм составления условных уравнений в геодезических сетях / И.И. Монин // Геодезия, картография и аэрофотосъемка: респ. межвед. науч.-техн. сб. – 1982. – Вып. 35. – С. 75 – 84.
6. Большаков, В.Д. Уравнивание геодезических построений: справочное пособие / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе, В.В. Голубев. – М.: Недра, 1989. – 413 с.

Поступила 22.03.2007