УДК 528.06

ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ GPS-ИЗМЕРЕНИЙ

д-р техн. наук, проф. А.С. ЯРМОЛЕНКО
(Новгородский государственный университет),
О.Н. ПИСЕЦКАЯ
(Белорусская государственная сельскохозяйственная академия, Горки)

Сформулирована одна из основных научных задач высшей геодезии – теоретические аспекты условий определения параметров фигуры Земли. Исследуется практическая реализация определения параметров земного эллипсоида с использованием GPS-измерений. Доказано, что вопрос определения параметров земного эллипсоида с применением GPS-измерений является актуальным. Данные теоретические выводы подтверждены исследованиями, результатом которых является определение параметров земного эллипсоида на основе GPS-измерений с высокой точностью. Приведено описание алгоритмов для их определения различными способами. Отражены результаты исследований по определению параметров двухосного земного эллипсоида на основе одной из рассматриваемых моделей.

Введение. Одной из основных научных задач высшей геодезии является задача определения параметров фигуры Земли. С момента установления ее эллипсоидальности определению таких параметров, как большая полуось и сжатие, уделялось большое внимание. Данной проблематике посвящены исследования Клеро, Листинга, Стокса, М.С. Молоденского, В.В. Бровара, Ю.М. Неймана, Г.В. Демьянова.

До настоящего времени составляющие земного эллипсоида определялись по градусным измерениям. С течением времени в геодезии нашли применение новые способы определения геодезических данных посредством использования искусственных спутников Земли. Это привело к возможности определения параметров фигуры Земли с внедрением глобальных позиционных систем (GPS). Так, в частности, GPS-измерения приращений координат могут использоваться в решении задач по определению параметров земного эллипсоида.

Новейшие разработки в области применения GPS-измерений для определения параметров фигуры Земли принадлежат авторам: М. Бурше, М.И. Юркиной, Г. Морицу. Знакомство с данными работами ведет к необходимости продолжения исследований и разработке новых методов определения вышеупомянутых параметров с применением GPS-измерений. В связи с широким внедрением GPS-измерений имеется возможность более точного определения параметров земного эллипсоида, повышения точности геодезических работ при определении плановых и высотных координат точек земной поверхности.

В работе [1] была поставлена задача определения параметров двухосного земного эллипсоида с использованием GPS-измерений. В общем виде составлены уравнения поправок измерений и на их основе записан алгоритм определения указанных поправок известным параметрическим способом по методу наименьших квадратов. В настоящей работе предлагаются результаты исследований, выполненные в продолжение [1].

Основная часть. Нами составлена соответствующая программа определения параметров и на ее основе выполнены экспериментальные исследования на моделях объектов.

Установлено, что решение задачи на основе алгоритма (11) – (14) работы [1] обладает неустойчивостью. Так, число обусловленности обратной матрицы нормальных уравнений, вычисляемое по диагональным элементам обратной матрицы:

$$C = \frac{\max\left(q_{ii}\right)}{\min\left(q_{ii}\right)}, \tag{1}$$

где $\max\left(q_{ii}\right), \min\left(q_{ii}\right)$ – максимальный и минимальный диагональный элементы обратной матрицы.

Число обусловленности может составлять сотни тысяч. Практически это соответствует вырожденной системе уравнений.

В соответствии с теорией фигуры земли [2 – 5] параметры земного эллипсоида геометрическим методом определяют на основе следующих условий:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i^2 + \eta_i^2\right) = \min, \tag{2}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\zeta_i^2 = \min, \tag{3}$$

где ξ_i, η_i, ζ_i – компоненты уклонений отвесных линий в меридиане и первом вертикале, и высота геоида над эллипсоидом в пункте i.

При решении такой задачи используют дифференциальные формулы (2) и (3), устанавливающие связь ξ_i, η_i, ζ_i с изменениями параметров эллипсоида Δa и $\Delta\alpha$.

Так, можно записать, что для определенного пункта [3]

$$\zeta = \cos B\cos Ldx_0 + \cos B\sin Ldy_0 + \sin BdZ_0 - \frac{N}{a}\left(1-e^2\sin^2 B\right)\Delta a + M\left(1-e^2\sin^2 B\right)\sin^2 B\frac{d\alpha}{(1-\alpha)} + h, \quad (4)$$

где B, L – соответствующие геодезические широта и долгота пункта; N, M – радиусы кривизны главных нормальных сечений эллипсоида; e, α – первый эксцентриситет и сжатие эллипсоида соответственно; dx_0, dy_0, dz_0 – смещение начала геоцентрической системы координат; $da, d\alpha$ – дифференциалы большой полуоси и сжатия соответственно; h – геодезическая высота точки на геоиде в системе старого эллипсоида.

Если система прямоугольных координат x, y, z жестко связана с Землей, то [2]

$$dx_0 = dy_0 = dz_0 = 0, \quad (5)$$

и с учетом

$$N = \frac{a}{\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{1/2}} \quad (6)$$

уравнение (4) примет вид:

$$S = -\frac{a}{N}da + N\frac{b}{a}\sin^2 Bd\alpha + h, \quad (7)$$

где

$$b = a/(1-\alpha). \quad (8)$$

В общем виде уравнение (7) можно записать так:

$$ax_1 + b_1da + b_2d\alpha + W = 0, \quad (9)$$

где

$$a = -1;$$
$$x_1 = \zeta;$$
$$b_1 = \frac{a}{N};$$
$$b_2 = N\frac{b}{a}\sin^2 B;$$
$$W = h.$$

Составляя (7) для всех пунктов геодезической сети, можно записать:

$$BX + W = 0, \quad (11)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 00-1 & 000 & \dots & 000 & b_{11} & b_{12} \\ 00 & 0 & 00-1 & \dots & b_{21} & b_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 000 & 000 & \dots & 00-1 & b_{R1} & b_{R2} \end{pmatrix}; \quad (12)$$

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \\ \dots \\ \xi_k \\ \eta_k \\ \zeta_k \\ da \\ d\alpha \end{pmatrix}; \quad W = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_k \end{pmatrix}; \tag{13}$$

$$b_{i1} = -\frac{a}{N_i}; \; b_{i2} = N_i \frac{b}{a} \sin^2 B_i;$$

k – число пунктов, для которых определяются величины ξ, η, ζ.

С учетом выводов [1] и условного уравнения (11) можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} V = AX + L; \\ BX + W = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Настоящую систему можно решить при условии метода наименьших квадратов ошибок измерений с учетом (3). В данном случае это является многокритериальной задачей. Отличие ее от рассмотренных ранее алгоритмов заключается в том, что здесь реализуется метод наименьших квадратов ошибок измерений:

$$V^T PV = \min, \tag{15}$$

где P – весовая матрица измерений, и на основе полученного решения реализуется условие (3), которое не является методом наименьших квадратов в статистическом отношении, а методом наименьших квадратов высот геоида над новым эллипсоидом.

Алгоритм решения здесь будет таким. Вначале потребуется учет (15) для выполненных измерений. В результате получим систему следующих нормальных уравнений [1]:

$$NX + A^T PL = 0 , \tag{16}$$

где

$$N = (N_1, N_2) ; \tag{17}$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

а N_1 и N_2 относятся соответственно к векторам X_1 высот геоида (ζ); X_2 – компонент уклонений отвесных линий (ξ, η) и поправок Δa и $\Delta\alpha$.

Условие (11) с учетом (17) и (18) примет вид:

$$B_1 X_1 + B_2 X_2 + W = 0, \tag{19}$$

где

$$B_1 = -E,$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{21} & b_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{k1} & b_{k2} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Тогда можно записать следующий функционал Лагранжа:

$$\Phi = X_1^T X_1 + 2K_1^T \left(N_1 X_1 + N_2 X_2 + A^T PL \right) + 2K_2^T \left(B_1 X_1 + B_2 X_2 + W \right) = \min. \tag{21}$$

Дифференцируя (21) по X_1 и X_2, составим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial X_1} &= 2X_1^T + 2K_1^T N_1 + 2K_2^T B_1 = 0;\\ \frac{\partial\Phi}{\partial X_2} &= K_1^T N_2 + K_2^T B_2 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Решая (22) относительно X_1, получим

$$X_1^T = -K_1^T N_1 - K_2^T B_1. \quad (23)$$

После подстановки (23) в (16) имеем

$$-N_1 N_1^T K_1 - N_1 B_1^T K_2 + N_2 X_2 + A^T PL = 0, \quad (24)$$

а подстановка в (19) приводит к уравнению:

$$-B_1 N_1^T K_1 - B_1 B_1^T K_2 + B_2 X_2 + W = 0. \quad (25)$$

Таким образом, уравнения (24), (25) с (22) составляют систему нормальных уравнений, верхний треугольник которой имеет вид:

$$\begin{cases}-N_1 N_1^T K_1 + N_2 X_2 - N_1 B_1^T K_2 + A^T PL = 0;\\ \qquad 0X_2 + B_2^T K_2 + 0 = 0;\\ \qquad -B_1 B_1^T K_2 + W = 0.\end{cases} \quad (26)$$

Здесь первая строка соответствует уравнению (24), вторая – второму уравнению системы (22):

$$N_2^T K_1 + B_2^T K_2 = 0, \quad (27)$$

третья – уравнению (25).

На основе данного алгоритма легко получить частные случаи. Например, полагая

$$B_1 = (001001001...001);$$
$$B_2 = (0,0),$$

(26) можно записать так:

$$\begin{aligned}&-N_1 N_1^T K + N_2 X_2 - N_1 B_1^T K_2 + A^T PL = 0;\\ &0\times X_2 + 0\times K_2 + 0 = 0;\\ &-k\times K_2 = 0.\end{aligned} \quad (28)$$

Решение (28) будет соответствовать случаю, когда сумма высот геоида над эллипсоидом равна нулю для определенной территории.

Наконец можно принять: $B = 0$ и $X_1 = 0$.

Тогда будет иметь место следующая система нормальных уравнений:

$$N_2 X + A^T PL = 0. \quad (29)$$

В соответствии с алгоритмом [1] и приведенных выводов были составлены программы вычисления параметров земного эллипсоида в соответствии с (26), (28) и (29).

В качестве примера рассмотрена сеть из четырех пунктов, астрономические широты и долготы φ, λ, нормальные высоты H, предварительные значения компонент уклонений отвесных линий и высот геоида ζ которой приведены в таблице 1.

Таблица 1

Исходные данные для определения параметров земного эллипсоида

№ п/п	φ	λ	ξ	η	H	ζ
1	0,418900000	1,117000000	0,000006763	–0,000004499	189,000	26,524
2	0,628300000	1,047200000	0,000006763	–0,000004998	175,000	19,266
3	0,314200000	1,047200000	0,000005497	–0,000007999	780,000	26,995
4	0,314200000	0,977400000	0	0	109,000	0

Исходным является пункт 4; поправки в ξ, η, ζ для него не определяются.

Измеренные приращения координат приведены в таблице 2.

Таблица 2

Измеренные приращения координат

Базовые линии	Δx	Δy	Δz
3 – 1	–478708,220	–15909,458	621220,671
1 – 2	27441,447	–765750,280	1149724,306
2 – 3	451266,816	781659,572	–1770945,008
3 – 4	358440,451	–225674,805	2189,858
4 – 2	–809707,249	–555984,931	1768755,233

Измеренные приращения координат соответствуют модели эллипсоида с параметрами:

$$a = 6378245;$$
$$\alpha = 1/298,3.$$

Средняя квадратическая ошибка измерения приращений координат – 10 см.

Измерения приняты некоррелированными.

Разработанные алгоритмы и программы проверены при следующих начальных значениях параметров (Жданов, 1893 г.) [3]:

$$a = 6377717;$$
$$\alpha = 1/299,7.$$

В результате вычислений по алгоритму (29) получено:

$$a = 6378239,1;$$
$$\alpha = 1/298,35.$$

По алгоритму (28):

$$a = 6378180,4;$$
$$\alpha = 1/297,2.$$

Заключение. На основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что вопрос определения параметров земного эллипсоида с применением GPS-измерений является актуальным. Данные теоретические выводы подтверждены исследованиями, результатом которых является определение параметров земного эллипсоида на основе GPS-измерений с высокой точностью.

Так, их восстановленные значения в рассматриваемом примере на основе модели (29) получены с отклонением от заданных:

- по большой полуоси:

$$6378239,1 - 6378245 = -5,9 \text{ (м)};$$

- по сжатию:

$$298,35 - 298,3 = 0,05 \text{ (м)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ярмоленко, А.С. К определению параметров земного эллипсоида с помощью GPS-измерений / А.С. Ярмоленко, О.Н. Писецкая // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2005. – № 3. – С. 30 – 39.
2. Молоденский, М.С. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли / М.С. Молоденский, В.Ф. Еремеев, М.И. Юркина // Тр. ЦНИИГАиК, Вып. 131. – М.: Изд-во геодез. лит., 1960.
3. Изотов, А.А. Формы и размеры Земли по современным данным / А.А. Изотов. – М.: Изд-во геодез. лит., 1950.
4. Шимбирев, Б.П. Теория фигуры Земли / Б.П. Шимбирев. – М.: Недра, 1975.
5. Закатов, П.С. Курс высшей геодезии / П.С. Закатов. – М.: Недра, 1976.

Поступила 22.03.2007