

УДК 624.012.45:539.376

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОДБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРОДОЛЬНОГО АРМИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА ПО КРИТЕРИЮ ПРОЧНОСТИ

канд. техн. наук, доц. Д.О. ГЛУХОВ  
(Полоцкий государственный университет)

*Рассматривается актуальная задача поиска оптимального продольного армирования железобетонного элемента, возникающая на стадии проектирования зданий и сооружений. Исследуются типовые случаи нагружения железобетонных элементов. Получена абстрактная модель, которая описывает совместную работу групп арматуры в сечении под нагрузкой. На основании обнаруженных особенностей и установленных зависимостей совместной работы групп арматуры предлагается пошаговый способ подбора минимального по площади продольного армирования, обладающий научной новизной, обеспечивающий выполнение требований по прочности.*

**Введение.** Опыт проектирования железобетонных конструкций показывает, что в современных системах автоматического проектирования строительных конструкций функция подбора продольного и поперечного армирования становится обязательной. В печати неоднократно возникает полемика по поводу корректности реализации данной функции в известных программных комплексах [1, 3].

В большинстве современных средств проектирования применяются средства определения площадей, так называемого, «размазанного» (ориентировочного) армирования или дискретного армирования. Причем в последнем случае задача подбора включает в себя и задачу выбора наилучшего размещения арматуры.

Очевидно, что ориентировочное армирование на стадии проектирования все равно интерпретируется как тот или иной вариант дискретного размещения стержней арматуры и, следовательно, для обеспечения качественного результата должно обеспечивать выполнение прочностных и эксплуатационных требований и при наихудшем размещении дискретной арматуры, иначе требуется пересмотр вычисленных площадей. Применение метода подбора ориентировочного армирования может приводить или к вынужденному переармированию элемента или к решению, не обеспечивающему требуемые прочностные или эксплуатационные характеристики элемента при заданных внешних нагрузках.

Достаточно часто на производстве возникает задача подбора армирования элемента при заданной номенклатуре диаметров имеющейся в наличии арматуры и известной схеме размещения продольного армирования в элементе. Причем в сечении обычно устанавливается арматура одного или двух диаметров, что позволяет повысить технологичность изготовления элементов конструкций. Поэтому задача подбора включает в себя следующие подзадачи:

- 1) разумное группирование арматуры с учетом предположений о характере загрузки элемента и вопросов технологичности изделия;
- 2) поиск схемы размещения арматуры, если схема размещения не задана изначально;
- 3) поиск минимально необходимых диаметров арматуры выбранных групп при заданных внешних нагрузках;
- 4) решение задачи унификации – подбора армирования по серии усилий, формируемых по эпюрам изгибающих моментов и продольных сил по длине элемента.

### Постановка задачи дискретной оптимизации продольного армирования

*Пространство поиска решения.* Рассмотрим подбор арматуры при допустимых  $n$  диаметрах:  $d = \{d_i\}$ ,  $i = 1..n$ .

Пусть мы располагаем в общей постановке  $m$  группами арматуры. Под группой мы понимаем некоторое подмножество арматуры, у которых мы в процессе подбора согласованно изменяем диаметры  $A = \{a_k\}$ ,  $k = 1..m$ . Количество стержней арматуры в группах определим как  $N = \{N_k\}$ .

Каждой группе при заданном для ее арматуры диаметре соответствует площадь армирования, которая для решения задачи оптимизации рассматривается как единое целое:

$$S = \{S_k\}, \quad S_k = \sum_{j=0}^{N_k-1} \pi \left( \frac{d_j}{2} \right)^2, \quad d_j \in d.$$

Тогда пространство поиска оптимального решения будет представлять собой  $N_{var}$  вариантов.  $N_{var} = n^m$ . Для 21-го значения диаметра и 6-ти групп арматуры имеем 85766121 вариантов, что потребует (при оценке одного плана армирования по I и II группам предельных состояний 5 миллисекунд) 119 часов.

Каждый вариант представляет собой сочетание  $k$  диаметров арматуры групп, которое мы будем называть планом армирования  $D = \{d_k\}, k = 1 \dots m$ . Очевидно, каждый план армирования определяется в  $k$ -мерном пространстве планов армирования, которое мы будем обозначать как  $\Omega = d^k$ .

*Нагрузки.* В общем случае вектор усилий для сечения, нормального к продольной оси железобетонного элемента, будем определять следующим образом:

$$P = \left\{ \langle N, M_x, M_y \rangle_1, \dots, \langle N, M_x, M_y \rangle_n \right\}.$$

Введем оператор проверки сечения [4] с заданным планом армирования при  $n$  наборах усилий от расчетной нагрузки  $P_1$  и нормативной нагрузки  $P_2$  по первой группе предельных состояний на неразрушение и оператор проверки по второй группе предельных состояний на допустимость ширины раскрытия трещины:

$$LI(P_1, D) = \begin{cases} false & \text{если разрушение} \\ true & \text{иначе} \end{cases}, \quad LII(P_2, D) = \begin{cases} false & \text{если разрушение} \\ true & \text{иначе} \end{cases}$$

*Критерий оптимизации армирования.* Сформулируем критерий оптимизации:

$$\Sigma_S = \sum_k S_k \rightarrow \min \quad |LI(P_1, D) \wedge LII(P_2, D)|,$$

т.е. требуется отыскать такой план армирования, при котором элемент удовлетворяет проверкам по первой и второй группам предельных состояний и площадь армирования минимальна.

#### **Анализ задачи оптимизации армирования по критерию прочности**

*Пространство поиска оптимума.* Уравнения равновесия, лежащие в основе деформационной модели железобетонного элемента, описывают равновесие между внутренними усилиями в сжатой и растянутой зонах. При этом поскольку каждая группа арматуры вносит свой вклад в интеграл напряжений, то возможно перераспределение влияния групп арматуры на результат. В силу этого существует множество планов, удовлетворяющих заданным внешним нагрузкам  $P$ , таких, что уменьшение диаметра стержней любой группы на следующую позицию в номенклатуре приводит к разрушению при заданных усилиях  $P$ .

При разумном группировании в предположении о том, как будет работать бетон и арматура, предполагается, что в группу включается арматура, работающая одинаково. То есть арматура, имеющая близкие по значению напряжения.

Введем ряд понятий:

**Определение 1.** Нижний граничный (предельный) план армирования – это такой план армирования, при котором уменьшение диаметра стержней любой группы на следующую позицию в номенклатуре приводит к разрушению.

**Определение 2.** Верхний граничный план армирования – это такой план армирования, при котором увеличение диаметра стержней любой группы на следующую позицию в номенклатуре приводит к разрушению.

**Определение 3.** Изолированный план армирования – это такой план армирования, при котором увеличение или уменьшение диаметра стержней любой группы на следующую позицию в номенклатуре приводит к разрушению.

**Определение 4.** Внутренний план армирования – это такой план армирования, при котором увеличение или уменьшение диаметра стержней любой группы на следующую позицию в номенклатуре не приводит к разрушению.

**Определение 5.** Множество допустимых планов армирования – это множество, включающее все верхние граничные, нижние граничные, внутренние и изолированные планы армирования, локализованные в пространстве  $\Omega$ , действительные для заданных усилий или серии усилий. Если речь идет о II группе предельных состояний, то учитывается еще и допустимость ширины раскрытия трещины для заданного класса эксплуатации конструкции.

Уменьшение диаметра арматуры одной группы можно компенсировать увеличением диаметра арматуры другой группы и таким образом двигаться по границе множества допустимых планов.

В общем случае, как показали численные эксперименты, множество допустимых планов армирования при заданных усилиях содержит как замкнутые подмножества, так и изолированные планы армирования.

Рассмотрим особенности пространств поиска решений задачи дискретной оптимизации плана продольного армирования по прочности.

**Изгибаемые элементы без предварительного напряжения**

Проиллюстрируем на примере для двутаврового сечения (400×300) с двумя группами: группа арматуры растянутой зоны и группа арматуры сжатой зоны сечения (рис. 1, г).

По оси  $x$  откладываются диаметры арматуры сжатой зоны, по оси  $y$  – диаметры арматуры растянутой зоны. Если при некотором сочетании диаметров расчет при заданных усилиях показывает, что элемент не разрушен, то на рисунке 1 присутствует точка; ситуации с разрушением отмечаются маленькими точками; нижние граничные планы соединяются линией.

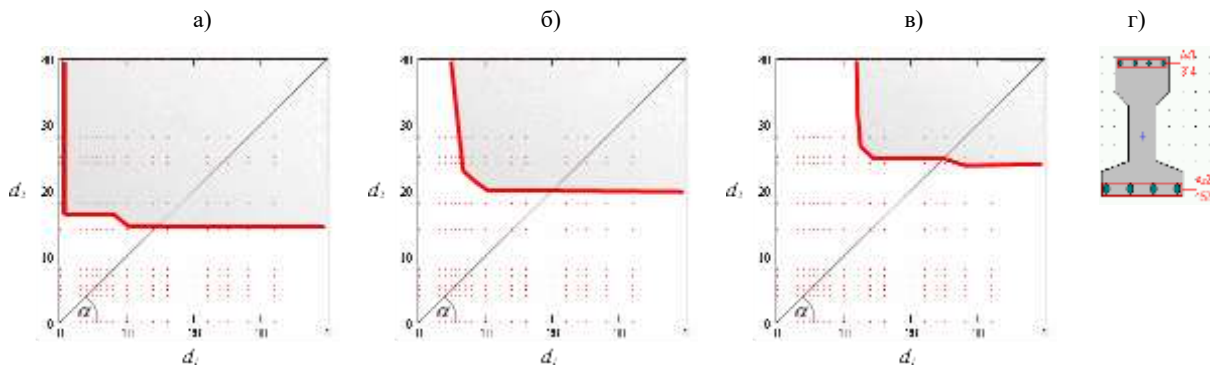


Рис. 1. Одноосный изгиб:  
а – 100 кН·м; б – 180 кН·м; в – 260 кН·м

Представленный пример иллюстрирует особенности расчета класса элементов без предварительного напряжения. Особенностью данного класса является то, что при сколь угодно больших диаметрах арматуры модель не ухудшается. Множество допустимых планов армирования неограниченно сверху.

Большинство методов оптимизации чувствительны к начальным условиям и требуют задания начальных условий. В данном случае предполагается, что оптимизация будет стремиться улучшить план армирования, для которого расчет при заданных усилиях не показывает разрушение. Если такой план не известен, то появляется необходимость решить задачу поиска хотя бы одного такого плана. Для данного класса можно гарантированно задать точку, принадлежащую множеству допустимых планов. Это точка с максимальными диаметрами арматуры всех групп.

**Предварительно напряженные элементы с симметричным армированием**

Второй класс задач связан с подбором армирования в предварительно напряженных элементах. Существенным отличием данного класса задач от предыдущего является ограниченность сверху множества допустимых планов. Данная ограниченность обусловлена тем, что при больших диаметрах и, следовательно, при значительных усилиях обжатия разрушение может возникать на стадии отпуски.

Проиллюстрируем это на примере двутаврового симметрично армированного элемента (400×300) с предварительно напряженной до 500 МПа арматурой S800 (рис. 2, г).

Результаты численного эксперимента представлены на рисунке 2.

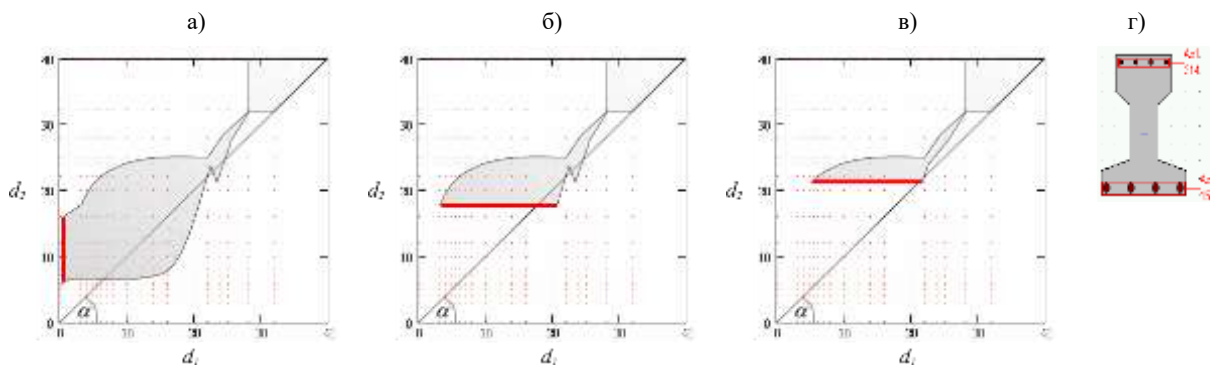


Рис. 2. Одноосный изгиб предварительно напряженного элемента с симметричными группами арматуры сжатой и растянутой зон:  
а – 100 кН·м; б – 180 кН·м; в – 260 кН·м

**Предварительно напряженные элементы с асимметричным армированием**

При несимметричном армировании множество допустимых планов трансформируется в соответствующей пропорции. Пример показан на рисунке 3 (а, б, в).

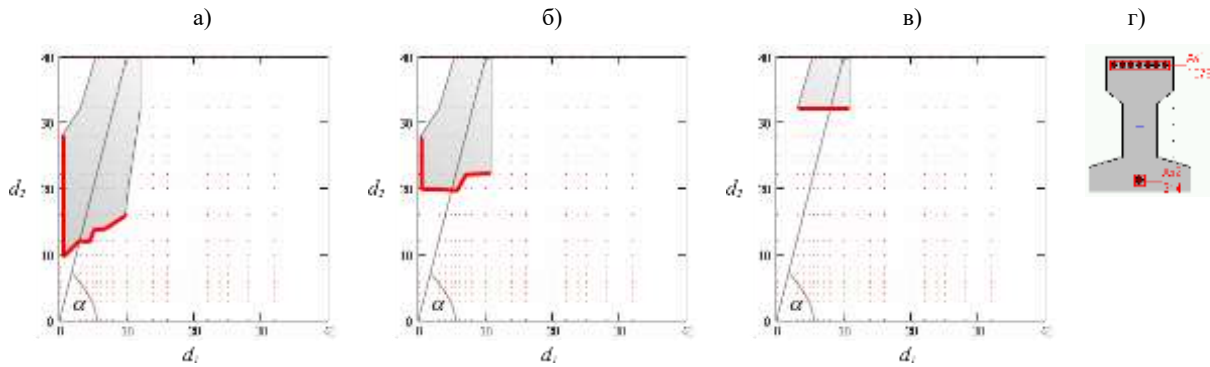


Рис. 3. Одноосный изгиб предварительно напряженного элемента с несимметричными группами арматуры сжатой и растянутой зон (в сжатой зоне в 7 раз больше предварительно напряженной арматуры):  
а – 100 кН·м; б – 180 кН·м; в – 260 кН·м

**Сжато-изгибаемые элементы**

В сжато-изгибаемых элементах наблюдается интересный эффект связанный с тем, что при увеличении продольной сжимающей силы противодействующие относительно изгиба группы арматуры начинают дополнять друг друга в обеспечении сопротивления сечению сжатию. Противодействующие группы становятся совместно работающими (рис. 4).

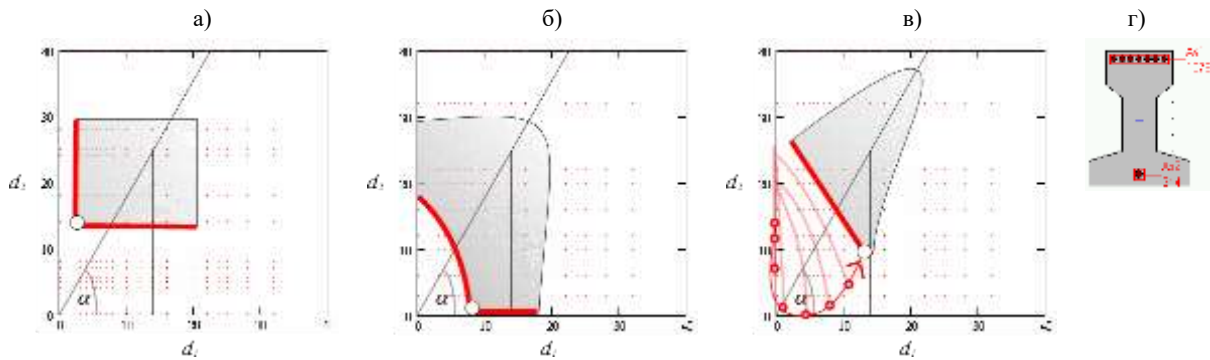


Рис. 4. Изменение множества допустимых диаметров для двух противодействующих групп при увеличении продольного сжимающего усилия; изгибающий момент 100 кН·м; продольная сила возрастает от варианта (а) к варианту (б)

**Совместно работающие группы арматуры**

Если рассматриваются группы арматуры, работающие совместно, то они дополняют друг друга, как представлено на рисунке 5.

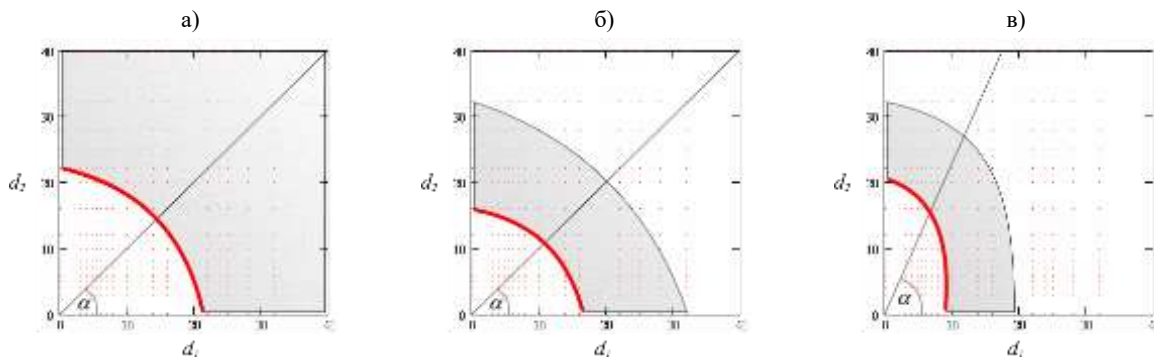


Рис. 5. Совместно работающие группы арматуры:  
а – для элемента без предварительного напряжения;  
б – предварительно напряженного элемента с одинаковым количеством стержней в группах;  
в – предварительно напряженного элемента с различным количеством стержней в группах

**Выводы**

1. Группы арматуры по характеру взаимодействия при обеспечении сопротивляемости сечения внешним усилиям делятся на три класса: противодействующие, не оказывающие влияния друг на друга и совместно работающие (дополняющие).

2. Множество допустимых планов армирования является ограниченным снизу значениями диаметров, при которых прочность сечения недостаточна.

3. Для предварительно напряженных элементов множество допустимых планов армирования является ограниченным сверху значениями диаметров, при которых происходит разрушение предварительно напряженного элемента на стадии отпуска.

4. Изолированные планы армирования встречаются только в предварительно напряженных элементах выше верхней границы множества и являются следствием неустойчивого равновесия между двумя группами предварительно напряженной арматуры.

Схему взаимодействия групп арматуры в пространстве планов армирования можно изобразить следующим образом (рис. 6).

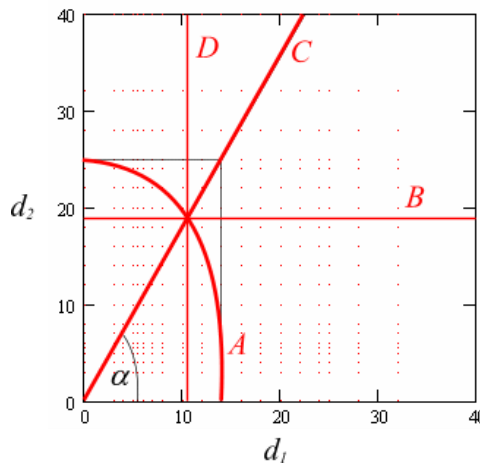


Рис. 6. Взаимодействие совместно работающих (A) (дополняющих) групп, не оказывающих влияние друг на друга групп (B, D), противодействующих групп (C)

Угол наклона линии взаимодействия C определяется соотношением:

$$tg \alpha = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}},$$

где  $n_1$  – количество стержней арматуры в первой группе;  $n_2$  – количество стержней арматуры во второй группе.

Эллипс A описывается уравнением:

$$(n_1 + n_2) d^2 = n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2,$$

где  $d$  – некоторый средний диаметр, обеспечивающий прочность по сечению при заданных усилиях;  $d_1, d_2$  – диаметры стержней первой и второй групп арматуры соответственно.

**Решение задачи оптимального подбора армирования**

На каждом этапе оптимизации мы располагаем планом армирования  $D_i$ , удовлетворяющим проверкам по I и II группам предельных состояний, и мы должны найти, если это возможно, план армирования  $D_{i+1}$ , который характеризуется меньшим значением критерия оптимизации.

Как было показано выше, стартовый для процесса оптимизации план армирования будем искать на линии взаимодействия C (см. рис. 6).

Учитывая рассмотренные особенности пространства планов армирования, построим алгоритм подбора:

- 1) зададим начальное значение шага оптимизации  $p = 0$  и критерия оптимизации  $\sum S_{min} = 10^{20}$ ;
- 2) на линии взаимодействия найдем план армирования  $D_i$ , являющийся нижним граничным планом;
- 3) если нижний граничный план не найден, то перейти к шагу 10;
- 4) вычислим для каждой группы  $\sigma_k = \max_{j=0}^{N_k-1} (\sigma_{Sj})$ , где  $\sigma_{Sj}$  – напряжение в  $j$ -том арматурном

стержне  $k$ -той группы арматуры;  $\sigma_k$  – максимальное напряжение в арматуре группы. Максимальное напряжение в арматурах группы характеризует вклад группы в сумму внутренних усилий, уравновешива-

вающих внешние. Это справедливо, если все арматуры группы работают одинаково, в противном случае стержни, расположенные в зоне малых напряжений, не будут участвовать в работе группы и фактически будут лишними. Поэтому группирование стержней должно быть выполнено с учетом специфики работы арматуры в сечении;

- 5) отсортируем группы по возрастанию значения  $\sigma_k$ ;
- 6) естественным предположением является то, что, пытаясь минимизировать общую площадь армирования, мы в первую очередь должны стремиться «убрать» менее значимую арматуру. То есть на каждом шаге будем пытаться уменьшить диаметр стержней группы с наименьшим из оставшихся значений  $\sigma_k$ ;
- 7) если уменьшение диаметра дает план армирования, не принадлежащий множеству допустимых планов, и если рассматриваемая группа является последней в отсортированном списке групп, то перейдем к шагу 8, иначе перейдем к рассмотрению следующей в отсортированном списке группы, инкрементуем шаг оптимизации и перейдем к пункту 6;
- 8) рассчитаем значение критерия  $\Sigma_{S_p}$ ;
- 9) если  $\Sigma_{S_p} < \Sigma_{S_{min}}$ , то переместимся по линии к следующему допустимому плану армирования с большим значением критерия оптимизации для следующего шага оптимизации ( $\Sigma_{S_{p+1}} > \Sigma_{S_p}$ ) и перейдем к пункту 4, иначе перейдем к пункту 11;
- 10) завершим оптимизацию с сообщением о невозможности подбора армирования для заданных внешних нагрузок;
- 11) завершим оптимизацию с наилучшим результатом  $\Sigma_{S_p}$  (рис. 7).

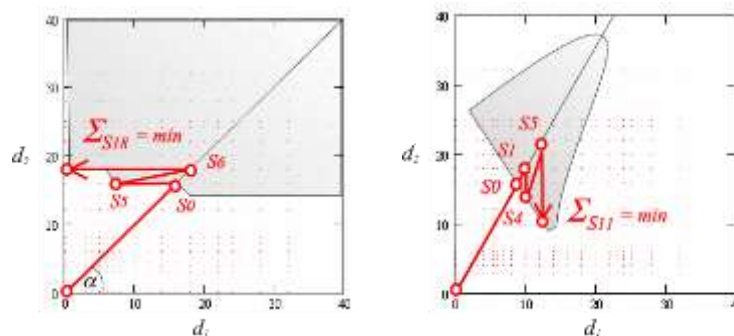


Рис. 7. Работа алгоритма оптимизации плана армирования

**Заключение.** Важным является тот момент, что мы ищем оптимальное решение, двигаясь от линии взаимодействия. Движение же по поверхности, образованной нижними граничными планами, позволило бы значительно ускорить поиск минимума. В рамках данной работы способ движения по поверхности не исследован.

Необходимо отметить и тот факт, что мы рассматриваем абстрактное представление о работе выделенных групп арматуры. На практике применяются искусственные обоснования необходимости арматуры, например, в сжатой зоне, такие как необходимость сохранения компактных габаритов изделия, минимизация массы железобетонного элемента под конкретные крановые устройства и др. Такие требования предлагаемый алгоритм не учитывает. Для решения задачи с такими ограничениями ее необходимо расширить до задачи подбора оптимального поперечного сечения армированного элемента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Краковский, М.Б. Программа «ОМ СНИП Железобетон» для расчета железобетонных конструкций на ЭВМ / М.Б. Краковский // Бетон и железобетон. – 2001. – № 2. – С. 9 – 12.
2. Тихий, М. Расчет железобетонных рамных конструкций в пластической стадии. Перераспределение усилий / М. Тихий, Й. Ракосник; пер. с чешск. Б.М. Сергеенко. – М.: Стройиздат, 1976. – 198 с.
3. Маляренко, А.А. Письмо в редакцию по поводу статьи М.Б. Краковского «Программа ОМ СНИП Железобетон для расчета железобетонных конструкций на ЭВМ» / А.А. Маляренко // Бетон и железобетон. – 2001. – № 5.
4. Лазовский, Д.Н. Алгоритмы расчета напряженно-деформированного состояния нормального сечения усиленного железобетонного элемента / Д.Н. Лазовский, Д.О. Глухов // Повышение качества строительных работ, материалов и проектных решений: сб. науч. тр. Вып. 2 / под ред. В.И. Микрина [и др.]. – Брянск: БГИТА, 2000.

Поступила 22.05.2007