

УДК 519.6: 532.5

## О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны

Волосова Н.К., аспирант;  
Басараб М.А., профессор, д.ф. - м.н.  
Московский государственный технический университет МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва  
Волосов К.А., профессор, д.ф. - м.н.;  
Волосова А.К., к.ф.- м.н.  
Российский Университет Транспорта (МИИТ), г. Москва  
Пастухов Д.Ф., к. ф.-м. н., доцент;  
Пастухов Ю.Ф., к. ф.-м. н., доцент  
Полоцкий государственный университет

**Аннотация.** Описан алгоритм решения классической гидродинамической задачи с использованием конечного матричного алгоритма решения уравнения Пуассона. Исследованы особенности кусочно-линейного профиля скорости на структуру вихрей в решении задачи. Получено что поле функции тока и поле линий тока различают вихри первого порядка (совпадают детали обеих полей). Меньшие вихри второго порядка определяются полем линий тока. Градиент скорости кусочно-линейного профиля на верхней стороне прямоугольной каверны определяет число вихрей второго порядка и их расположение. При небольшом градиенте (равном 2) с профилем "равнобедренный треугольник" появляется один вторичный вихрь справа и снизу. При достаточно большом градиенте (равном 10) с профилем "равнобедренная трапеция" имеем два симметричных вихря второго порядка справа и слева у дна. Увеличение градиента профиля скорости приводит к смещению центра крупного вихря первого порядка противоположно вектору скорости  $u_{\max}$ , а уменьшение градиента к смещению центра вихря первого порядка вдоль  $u_{\max}$ .

**Ключевые слова:** классическая гидродинамическая задача в прямоугольной каверне, гидродинамика, поле линий тока.

## About role of the profile to velocities on upper side in gidrodinamic problem for rectangular cavity

Volosova N.K., Basarab M.A., Volosov K.A., Volosova A.K.,  
Pastuhov D.F., Pastuhov YU.F.

**Постановка задачи.** Рассмотрим классическую гидродинамическую задачу в прямоугольной области с системой уравнений в частных производных и начальными и краевыми условиями для физических полей [1]. Обозначим  $(u(x, y), v(x, y))$  вектор скорости жидкой частицы. Начало прямоугольной системы координат расположим в нижнем левом угле прямоугольника, направим ось  $y$ -вверх, ось  $x$ -вправо.

$$\begin{cases} \psi_{xx} + \psi_{yy} = -w(x, y), & 0 < x < L, \quad 0 < y < R, \\ w = v_x - u_y, \\ u = \psi_y; v = -\psi_x, \\ w_t + u \cdot w_x + v \cdot w_y = v(w_{xx} + w_{yy}), \\ \psi|_{\Gamma} \equiv 0, \Gamma \equiv (x=0, 0 \leq y \leq R) \cup (x=L, 0 \leq y \leq R) \cup (0 \leq x \leq L, y=0) \cup (0 \leq x \leq L, y=R), \\ v|_{\Gamma} \equiv 0, \\ u|_{\Gamma_1} \equiv 0, \Gamma_1 \equiv (x=0, 0 \leq y \leq R) \cup (x=L, 0 \leq y \leq R) \cup (0 \leq x \leq L, y=0), u|_{\Gamma_1} = u_{\max} \end{cases} \quad (1)$$

Где в системе уравнений(1) обозначена  $w = v_x - u_y$  - функция вихря,  $\psi(x, y)$  - функция тока, определяющая поле скоростей формулой  $u = \psi_y; v = -\psi_x, \psi|_{\Gamma} \equiv 0$ . Вертикальная компонента скорости на границе каверны отсутствует  $v|_{\Gamma} \equiv 0$ , а горизонтальная имеет постоянное максимальное значение на верхней стороне прямоугольника  $u_{\max}$  и направлена направо, а на остальной части границы равна нулю (условие прилипания). Для инициализации задачи(1) необходимо задать начальные физические поля (достаточно задать начальное поле горизонтальной и вертикальной компонент скорости), а также связь граничных значений вихря с приграничными значениями функции тока и краевыми значениями скорости.

Преобразуем систему уравнений(1), введя безразмерные переменные

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{xx} + \bar{\psi}_{yy} = -\bar{w}(x, y), \quad 0 < \bar{x} = \frac{x}{L} < 1, \quad 0 < \bar{y} = \frac{y}{L} < k = \frac{R}{L}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_{\max}}, \quad \psi_{\max} = Lu_{\max} \\ \bar{w} = \bar{v}_x - \bar{u}_y, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_{\max}}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_{\max}}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w_{\max}}, \quad w_{\max} = \frac{u_{\max}}{L} \\ \bar{u} = \bar{\psi}_y; \quad \bar{v} = -\bar{\psi}_x, \\ \bar{w}_i + \bar{u} \cdot \bar{w}_x + \bar{v} \cdot \bar{w}_y = \frac{1}{\text{Re}} (\bar{w}_{xx} + \bar{w}_{yy}), \quad 0 < \bar{t} = \frac{t}{T}, \quad T = \frac{L}{u_{\max}}, \quad \text{Re} = \frac{u_{\max} L}{\nu} \\ \bar{\psi}|_{\Gamma} \equiv 0, \quad \bar{v}|_{\Gamma} \equiv 0, \quad \bar{u}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \bar{u}|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = 1 \end{array} \right. \quad (2)$$

В дальнейшем штрихи над переменными и функциями в задаче(2) из соображения удобства опускаем.  $K=1$  если прямоугольник-квадрат. Опишем численный алгоритм решения задачи(2).

### 1.Инициализация.

Зададим кусочно-линейный профиль скорости в виде равнобедренной трапеции на верхней стороне прямоугольника ( $k=1$  – в классической задаче для прямоугольной каверны) из соображения непрерывности по формуле.

$$u(x, k) \equiv u_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{\tau}, & 0 \leq x \leq \tau, \\ 1, & \tau \leq x \leq 1 - \tau, \\ \frac{1-x}{\tau}, & 1 - \tau \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (3)$$

Профиль скорости с формулой(3) на передней плоскости  $y=1$  представлен на рисунке 1.

Начальное поле горизонтальной скорости определим профилем горизонтальной скорости на верхнем отрезке прямоугольника, на котором оно постоянно с линейно уменьшающейся амплитудой к нулю на его нижней стороне  $y=0$ . Поле скорости в формуле(4) изменяет знак в интервале  $0 \leq y_m \leq 1$ .

$$u(x_n, y_m) = -u_0(x_n) \left( \frac{y_m}{k} \right) \sin \left( \frac{3\pi y_m}{2k} \right), \quad x_n = nh_1, \quad y_m = mh_2, \quad h_1 = \frac{1}{n_1}, \quad h_2 = \frac{k}{n_2}, \quad \tau = \frac{n_0}{n_1}. \quad (4)$$

Если бы поле горизонтальной скорости(4) не меняло знак, то все частицы жидкости одновременно двигались бы слева направо, мы используем модель несжимаемой жидкости с постоянной геометрической формой прямоугольной кюветы. Тогда за любой промежуток времени центр масс жидкости переместится вправо, т.е. получим противоречие с тем, что центр масс жидкости стационарен, по крайней мере, это верно для установившегося движения. А задача инициализации для ускорения решения задачи заключается именно в таком выборе начальных полей, которые наиболее близки к полям установившегося течения. Найдем начальное поле вертикальной скорости несжимаемой жидкости, используя интегральную формулу трапеции

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 &\Leftrightarrow v(x_n, y_m) = - \int_0^{y_m} \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, y) dy \Leftrightarrow v(x_n, y_m) = -h_2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, y_m) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, y_k) \right) = \\ &= -h_2 \left( \frac{1}{2} \frac{u(x_{n+1}, y_m) - u(x_{n-1}, y_m)}{2h_1} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{u(x_{n+1}, y_k) - u(x_{n-1}, y_k)}{2h_1} \right), \quad m = \overline{2, n_2 - 1}, \quad n = \overline{1, n_1 - 1} \\ v(x_n, y_1) &= -h_2 \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, y_1), \quad n = \overline{1, n_1 - 1} \end{aligned} \quad (5)$$

Для интегрирования начального поля горизонтальной компоненты скорости использовано условие прилипания частиц жидкости на дне. На следующем этапе инициализации можно вычислить поле вихря во внутренних точках прямоугольника по начальному полю скоростей.

$$w = v_x - u_y \Leftrightarrow w(x_n, y_m) = \frac{v(x_{n+1}, y_m) - v(x_{n-1}, y_m)}{2h_1} - \frac{v(x_n, y_{m+1}) - v(x_n, y_{m-1})}{2h_2}, \quad n = \overline{1, n_1 - 1}, \quad m = \overline{1, n_2 - 1} \quad (6)$$

В работе[2,3]использовалась следующая аппроксимирующая формула

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \left( \frac{-10}{3} u_{m,n} + \frac{2}{3} (u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}) \right) + \frac{1}{6} (u_{m-1,n-1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n+1}) &= f_{m,n} + \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy}) + \\ + h^4 \left( \frac{1}{360} (f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{1}{90} f_{xyyy}^{(4)} \right) + O(h^6), \quad n = \overline{1, n_1 - 1}, \quad m = \overline{1, n_2 - 1} \end{aligned}$$

Если в правой части отбросить производные шестого порядка (из-за невозможности их аппроксимации на минимальном 9-точечном шаблоне), а лапласиан  $f_{xx} + f_{yy}$  аппроксимировать на 5-ти точечном шаблоне крест, то имеем

$$\frac{1}{h^2} \left( \frac{-10}{3} u_{m,n} + \frac{2}{3} (u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}) + \frac{1}{6} (u_{m-1,n-1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n+1}) \right) = f_{m,n} + \frac{h^2}{12h^2} (f_{m-1,n} + f_{m,n-1} + f_{m+1,n} + f_{m,n+1} - 4f_{m,n}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{-10}{3} u_{m,n} + \frac{2}{3} (u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}) + \frac{1}{6} (u_{m-1,n-1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n+1}) \right) = \frac{h^2}{12} (f_{m-1,n} + f_{m,n-1} + f_{m+1,n} + f_{m,n+1} + 8f_{m,n})$$

Для решения Пуассона  $\psi_{xx} + \psi_{yy} = -w(x, y)$  за конечное число элементарных операций матричным методом [3,4] нужно модифицировать его правую часть в 4 угловых узлах

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-10}{3} \psi_{1,n_1-1} + \frac{2}{3} (\psi_{2,n_1-1} + \psi_{1,n_1-2} + \psi_{1,n_1} + \psi_{0,n_1-1}) + \frac{1}{6} (\psi_{2,n_1-2} + \psi_{0,n_1-2} + \psi_{2,n_1} + \psi_{0,n_1}) = \frac{-h^2}{12} (8w_{1,n_1-1} + w_{0,n_1-1} + w_{2,n_1-1} + w_{1,n_1-2} + w_{1,n_1}) \\ \overline{w_{1,n_1-1}} \equiv \frac{-h^2}{12} (8w_{1,n_1-1} + w_{0,n_1-1} + w_{2,n_1-1} + w_{1,n_1-2} + w_{1,n_1}) - \frac{2}{3} (\psi_{1,n_1} + \psi_{0,n_1-1}) - \frac{1}{6} (\psi_{0,n_1-2} + \psi_{2,n_1} + \psi_{0,n_1}) \\ \frac{-10}{3} \psi_{n_2-1,1} + \frac{2}{3} (\psi_{n_2-2,1} + \psi_{n_2-1,2} + \psi_{n_2-1,0} + \psi_{n_2,1}) + \frac{1}{6} (\psi_{n_2-2,2} + \psi_{n_2,2} + \psi_{n_2-2,0} + \psi_{n_2,0}) = \frac{-h^2}{12} (8w_{n_2-1,1} + w_{n_2,1} + w_{n_2-2,1} + w_{n_2-1,0} + w_{n_2-1,2}) \\ \overline{w_{n_2-1,1}} \equiv \frac{-h^2}{12} (8w_{n_2-1,1} + w_{n_2,1} + w_{n_2-2,1} + w_{n_2-1,0} + w_{n_2-1,2}) - \frac{2}{3} (\psi_{n_2-1,0} + \psi_{n_2,1}) - \frac{1}{6} (\psi_{n_2,2} + \psi_{n_2-2,0} + \psi_{n_2,0}) \\ \frac{-10}{3} \psi_{n_2-1,n_1-1} + \frac{2}{3} (\psi_{n_2-2,n_1-1} + \psi_{n_2-1,n_1-2} + \psi_{n_2-1,n_1} + \psi_{n_2,n_1-1}) + \frac{1}{6} (\psi_{n_2-2,n_1-2} + \psi_{n_2,n_1-2} + \psi_{n_2-2,n_1} + \psi_{n_2,n_1}) = \frac{-h^2}{12} (8w_{n_2-1,n_1-1} + w_{n_2,n_1-1} + w_{n_2-2,n_1-1} + w_{n_2-1,n_1} + w_{n_2-1,n_1-2}) \\ \overline{w_{n_2-1,n_1-1}} \equiv \frac{-h^2}{12} (8w_{n_2-1,n_1-1} + w_{n_2,n_1-1} + w_{n_2-2,n_1-1} + w_{n_2-1,n_1} + w_{n_2-1,n_1-2}) - \frac{2}{3} (\psi_{n_2-1,n_1} + \psi_{n_2,n_1-1}) - \frac{1}{6} (\psi_{n_2,n_1-2} + \psi_{n_2-2,n_1} + \psi_{n_2,n_1}) \\ \frac{-10}{3} \psi_{1,1} + \frac{2}{3} (\psi_{2,1} + \psi_{1,2} + \psi_{1,0} + \psi_{0,1}) + \frac{1}{6} (\psi_{2,2} + \psi_{0,2} + \psi_{2,0} + \psi_{0,0}) = \frac{-h^2}{12} (8w_{1,1} + w_{0,1} + w_{2,1} + w_{1,0} + w_{1,2}) \\ \overline{w_{1,1}} \equiv \frac{-h^2}{12} (8w_{1,1} + w_{0,1} + w_{2,1} + w_{1,0} + w_{1,2}) - \frac{2}{3} (\psi_{1,0} + \psi_{0,1}) - \frac{1}{6} (\psi_{0,2} + \psi_{2,0} + \psi_{0,0}) \end{array} \right. \quad (7)$$

И в граничных узлах, расположенных на 4 граничных отрезках

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{10}{3} \psi_{1,n} + \frac{2}{3} (\psi_{1,n-1} + \psi_{2,n} + \psi_{1,n+1} + \psi_{0,n}) + \frac{1}{6} (\psi_{2,n-1} + \psi_{2,n+1} + \psi_{0,n-1} + \psi_{0,n+1}) = \frac{-h^2}{12} (8w_{1,n} + w_{0,n} + w_{2,n} + w_{1,n-1} + w_{1,n+1}) \\ \overline{w_{1,n}} = -\frac{h^2}{12} (8w_{1,n} + w_{0,n} + w_{2,n} + w_{1,n-1} + w_{1,n+1}) - \frac{2}{3} \psi_{0,n} - \frac{1}{6} (\psi_{0,n-1} + \psi_{0,n+1}), n = \overline{2, n_1 - 2} \\ -\frac{10}{3} \psi_{n_2-1,n} + \frac{2}{3} (\psi_{n_2-1,n-1} + \psi_{n_2-2,n} + \psi_{n_2-1,n+1} + \psi_{n_2,n}) + \frac{1}{6} (\psi_{n_2-2,n-1} + \psi_{n_2-2,n+1} + \psi_{n_2,n-1} + \psi_{n_2,n+1}) = \frac{-h^2}{12} (8w_{n_2-1,n} + w_{n_2,n} + w_{n_2-2,n} + w_{n_2-1,n-1} + w_{n_2-1,n+1}) \\ \overline{w_{n_2-1,n}} = -\frac{h^2}{12} (8w_{n_2-1,n} + w_{n_2,n} + w_{n_2-2,n} + w_{n_2-1,n-1} + w_{n_2-1,n+1}) - \frac{2}{3} \psi_{n_2,n} - \frac{1}{6} (\psi_{n_2,n-1} + \psi_{n_2,n+1}), n = \overline{2, n_1 - 2} \\ -\frac{10}{3} \psi_{m,1} + \frac{2}{3} (\psi_{m-1,1} + \psi_{m,2} + \psi_{m+1,1} + \psi_{m,0}) + \frac{1}{6} (\psi_{m-1,2} + \psi_{m+1,2} + \psi_{m-1,0} + \psi_{m+1,0}) = \frac{-h^2}{12} (8w_{m,1} + w_{m-1,1} + w_{m+1,1} + w_{m,0} + w_{m,2}) \\ \overline{w_{m,1}} = -\frac{h^2}{12} (8w_{m,1} + w_{m-1,1} + w_{m+1,1} + w_{m,0} + w_{m,2}) - \frac{2}{3} \psi_{m,0} - \frac{1}{6} (\psi_{m-1,0} + \psi_{m+1,0}), m = \overline{2, n_2 - 2} \\ -\frac{10}{3} \psi_{m,n_1-1} + \frac{2}{3} (\psi_{m-1,n_1-1} + \psi_{m,n_1-2} + \psi_{m+1,n_1-1} + \psi_{m,n_1}) + \frac{1}{6} (\psi_{m-1,n_1-2} + \psi_{m+1,n_1-2} + \psi_{m-1,n_1} + \psi_{m+1,n_1}) = \frac{-h^2}{12} (8w_{m,n_1-1} + w_{m-1,n_1-1} + w_{m+1,n_1-1} + w_{m,n_1-2} + w_{m,n_1}) \\ \overline{w_{m,n_1-1}} = -\frac{h^2}{12} (8w_{m,n_1-1} + w_{m-1,n_1-1} + w_{m+1,n_1-1} + w_{m,n_1-2} + w_{m,n_1}) - \frac{2}{3} \psi_{m,n_1} - \frac{1}{6} (\psi_{m-1,n_1} + \psi_{m+1,n_1}), m = \overline{2, n_2 - 2} \\ \overline{w_{m,n}} = -\frac{h^2}{12} (8w_{m,n} + w_{m-1,n} + w_{m+1,n} + w_{m,n-1} + w_{m,n+1}) \quad \forall m \in \overline{2, n_2 - 2}, n \in \overline{2, n_1 - 2} \end{array} \right. \quad (8)$$

Далее находим поле функции тока согласно работам [3,4] то есть матричные коэффициенты прогонки вперед

$$\psi_1^T = -A^{-1} B \psi_2^T + A^{-1} \overline{w_1^T} \Leftrightarrow \lambda_1 = -A^{-1} B, \nu_1 = A^{-1} \overline{w_1^T}, \quad (9)$$

$$\text{где } a_{m,n} = \begin{cases} -\frac{10}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \\ \frac{2}{3}, m = n + 1 \vee m = n - 1 \\ 0, m \geq n + 2 \vee m \leq n - 2 \end{cases}, \quad b_{m,n} = \begin{cases} \frac{2}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \\ \frac{1}{6}, m = n + 1 \vee m = n - 1 \\ 0, m \geq n + 2 \vee m \leq n - 2 \end{cases} \quad (10)$$

$$\lambda_m = -(B\lambda_{m-1} + A)^{-1} B, v_m = (B\lambda_{m-1} + A)^{-1} (w_m^T - B v_{m-1}), m = \overline{2, n_2 - 2} \quad (11)$$

Находим предпоследнюю строку матрицы поля функции тока

$$\psi_{n_2-1}^T = (B\lambda_{n_2-2} + A)^{-1} (w_{n_2-1}^T - B v_{n_2-2}) \quad (12)$$

Найдем все остальные строки матрицы поля функции тока по формулам прогонки назад

$$\psi_m^T = \lambda_m \psi_{m+1}^T + v_m, m = \overline{n_2 - 2, 1} \quad (13)$$

Итак, все начальные поля получены. Переходим к циклу.

## 2. Описание циклической части алгоритма

1. Задать краевые условия для полей

$$\psi^{k,0,n} = \psi^{k,n_2,n} = \psi^{k,m,0} = \psi^{k,m,n_1} = 0, n = \overline{0, n_1}, m = \overline{0, n_2}, v^{k,0,n} = v^{k,n_2,n} = v^{k,m,0} = v^{k,m,n_1} = 0, n = \overline{0, n_1}, m = \overline{0, n_2}$$

$$u^{k,0,n} = u^{k,m,0} = u^{k,m,n_1} = 0, u^{k,n_2,n} = u_0(n), n = \overline{0, n_1}, m = \overline{0, n_2}$$

2. Модифицировать правую часть уравнения Пуассона для функции вихря  $w^{k,m,n}$  по формулам (7),(8). Решить уравнение Пуассона, или найти поле функции тока  $\psi_{m,n}^{k+1}$  во внутренних точках по формулам (9)-(13).

3. Найти поле скорости на следующем временном шаге во внутренних точках  $u^{k+1}(x_n, y_m) \equiv u_{m,n}^{k+1}, v_{m,n}^{k+1}, m = \overline{1, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}$  по формулам (14)

$$v = -\psi_x \Leftrightarrow v_{m,n}^{k+1} = -\frac{\psi_{m,n+1}^{k+1} - \psi_{m,n-1}^{k+1}}{2h_1}, u = \psi_y \Leftrightarrow u_{m,n}^{k+1} = \frac{\psi_{m+1,n}^{k+1} - \psi_{m-1,n}^{k+1}}{2h_2}, m = \overline{1, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \quad (14)$$

4. Найти граничные значения функции вихря в граничных точках согласно [1] со вторым порядком точности

$$\left\{ \begin{aligned} w_{m,0}^{k+1} &= \frac{7\psi_{m,0}^{k+1} - 8\psi_{m,1}^{k+1} + \psi_{m,2}^{k+1}}{2h_1^2} - 3\frac{v_{m,0}^{k+1}}{h_1}, m = \overline{1, n_2 - 1} \\ w_{m,n_1}^{k+1} &= \frac{7\psi_{m,n_1}^{k+1} - 8\psi_{m,n_1-1}^{k+1} + \psi_{m,n_1-2}^{k+1}}{2h_1^2} + 3\frac{v_{m,n_1}^{k+1}}{h_1}, m = \overline{1, n_2 - 1} \\ w_{0,n}^{k+1} &= \frac{7\psi_{0,n}^{k+1} - 8\psi_{1,n}^{k+1} + \psi_{2,n}^{k+1}}{2h_2^2} + 3\frac{u_{0,n}^{k+1}}{h_2}, n = \overline{1, n_1 - 1} \\ w_{n_2,n}^{k+1} &= \frac{7\psi_{n_2,n}^{k+1} - 8\psi_{n_2-1,n}^{k+1} + \psi_{n_2-2,n}^{k+1}}{2h_2^2} - 3\frac{u_{n_2,n}^{k+1}}{h_2}, n = \overline{1, n_1 - 1} \\ w_{0,0}^{k+1} &= \frac{w_{0,1}^{k+1} + w_{1,0}^{k+1}}{2}, w_{n_2,0}^{k+1} = \frac{w_{n_2,1}^{k+1} + w_{n_2-1,0}^{k+1}}{2}, w_{0,n_1}^{k+1} = \frac{w_{0,n_1-1}^{k+1} + w_{1,n_1}^{k+1}}{2}, w_{n_2,n_1}^{k+1} = \frac{w_{n_2,n_1-1}^{k+1} + w_{n_2-1,n_1}^{k+1}}{2} \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Покажем, например, что первая формула (15) дает второй порядок погрешности аппроксимации.

$$\psi_{m,1} = \psi_{m,0} + \psi_x|_{m,0} h_1 + \psi_{xx}|_{m,0} \frac{h_1^2}{2} + \psi_{xxx}|_{m,0} \frac{h_1^3}{6} + O(h_1^4)$$

$$\psi_{m,2} = \psi_{m,0} + \psi_x|_{m,0} 2h_1 + \psi_{xx}|_{m,0} \frac{4h_1^2}{2} + \psi_{xxx}|_{m,0} \frac{8h_1^3}{6} + O(h_1^4)$$

$$v_{m,0} = -\psi_x|_{m,0},$$

$$\frac{7\psi_{m,0} - 8\psi_{m,1} + \psi_{m,2}}{2h_1^2} - 3\frac{v_{m,0}}{h_1} = \frac{7\psi_{m,0} - 8\left(\psi_{m,0} + \psi_x|_{m,0} h_1 + \psi_{xx}|_{m,0} \frac{h_1^2}{2} + \psi_{xxx}|_{m,0} \frac{h_1^3}{6} + O(h_1^4)\right) + \psi_{m,0} + \psi_x|_{m,0} 2h_1 + \psi_{xx}|_{m,0} \frac{4h_1^2}{2} + \psi_{xxx}|_{m,0} \frac{8h_1^3}{6} + O(h_1^4)}{2h_1^2} + 3\frac{\psi_x|_{m,0}}{h_1} = -\psi_{xx}|_{m,0} + O(h_1^2)$$

Так как на границе  $\psi_{xx} + \psi_{yy} = -w(x, y) \Rightarrow \psi_{xx}|_{m,0} = -w_{m,0}$ , то имеем

$$w_{m,0}^{k+1} = \frac{7\psi_{m,0}^{k+1} - 8\psi_{m,1}^{k+1} + \psi_{m,2}^{k+1}}{2h_1^2} - 3\frac{v_{m,0}^{k+1}}{h_1} + O(h_1^2), m = \overline{1, n_2 - 1}.$$

Аналогично доказываются остальные формулы(15). Отметим, что вторую формулу(15) можно получить формально из первой(4-ую из 3-ей) проведя замену  $h_1 \rightarrow -h_1$  и изменив начало отсчета  $n = 0 \rightarrow n = n_1$ . Имея поле вихря в граничных точках, можно решить параболическое уравнение динамики вихря  $w^{k+1}_{m,n}$  на следующем временном слое  $k+1$  во внутренних точках  $n = \overline{1, n_1 - 1}, m = \overline{1, n_2 - 1}$ .

$$5. w_t + v \cdot w_x + u \cdot w_y = \frac{1}{\text{Re}} (w_{xx} + w_{yy}) \Leftrightarrow w^{k+1}_{m,n} = w^k_{m,n} + \frac{\tau}{\text{Re} \cdot h^2} \left( -\frac{10}{3} w^k_{m,n} + \frac{2}{3} (w^k_{m-1,n} + w^k_{m+1,n} + w^k_{m,n-1} + w^k_{m,n+1}) + \frac{1}{6} (w^k_{m-1,n-1} + w^k_{m-1,n+1} + w^k_{m+1,n-1} + w^k_{m+1,n+1}) \right) - \tau (u^{k+1}_{m,n} \cdot w^k_{m,n} + v^{k+1}_{m,n} \cdot w^k_{m,n}) \quad (16)$$

Где первые производные функции вихря в формуле(16) определяются формулами

$$w^k_{x,m,n} = \begin{cases} \frac{1}{12h} (w^k_{m,n-2} - w^k_{m,n+2} + 8(w^k_{m,n+1} - w^k_{m,n-1})) + O(h^4), & m = \overline{2, n_2 - 2}, n = \overline{2, n_1 - 2} \\ \frac{1}{2h} (w^k_{m,n+1} - w^k_{m,n-1}) + O(h^2), & (m = 1 \vee n_2 - 1) \vee (n = 1 \vee n_1 - 1) \end{cases}$$

$$w^k_{y,m,n} = \begin{cases} \frac{1}{12h} (w^k_{m-2,n} - w^k_{m+2,n} + 8(w^k_{m+1,n} - w^k_{m-1,n})) + O(h^4), & m = \overline{2, n_2 - 2}, n = \overline{2, n_1 - 2} \\ \frac{1}{2h} (w^k_{m+1,n} - w^k_{m-1,n}) + O(h^2), & m = (1 \vee n_2 - 1) \vee n = (1 \vee n_1 - 1) \end{cases} \quad (17)$$

Для устойчивого интегрирования уравнения(16) нужно использовать достаточно малый временной шаг  $\tau \leq \frac{\text{Re} \cdot h^2}{4}$  [1], мы использовали шаг  $\tau = \frac{\text{Re} \cdot h^2}{100}$  и 5000 интервалов в цикле на сетке  $n_1 = n_2 = 100$ .

6. Наконец, новому индексу поля вихря нужно присвоить старый индекс и перейти к пункту 1 цикла.

$$w^{k+1}_{m,n} \rightarrow w^k_{m,n}, k \rightarrow k + 1, m = \overline{0, n_2}, n = \overline{0, n_1}, k = 0, n_0 - 1$$

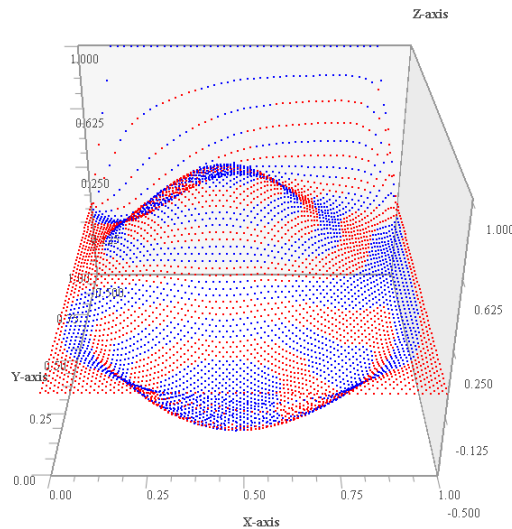


Рис. 1. Зависимость горизонтальной компоненты скорости  $u(x_n, y_m)$  при  $\text{Re}=1000$

На Рисунке 2 приведено поле функции тока для числа Рейнольдса  $\text{Re}=1$ . Это поле полностью совпадает с аналогичным рисунком в статье Romanio[5,fig9, p22] при  $\text{Re}=1$ .

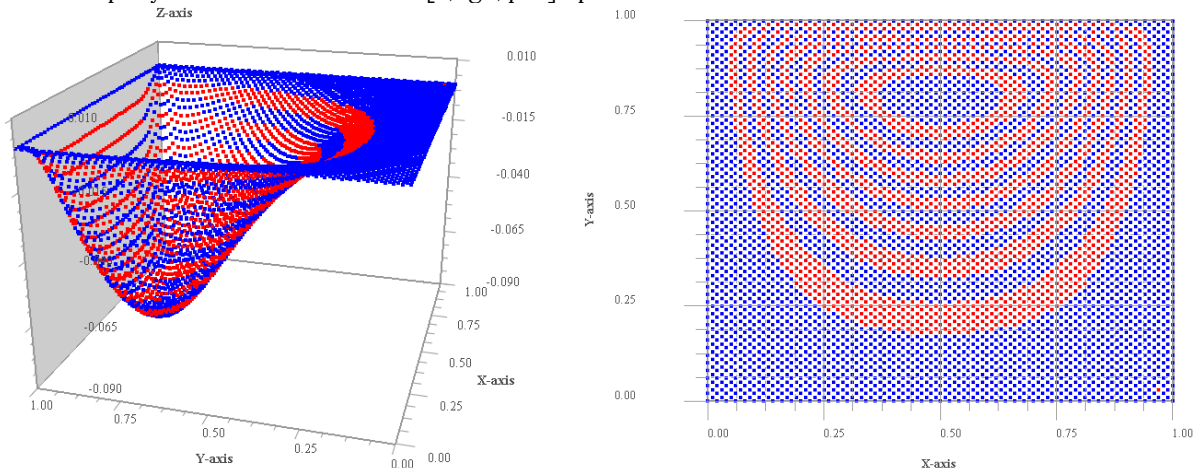


Рис. 2. Поле функции тока с параметром Рейнольдса  $\text{Re}=1$

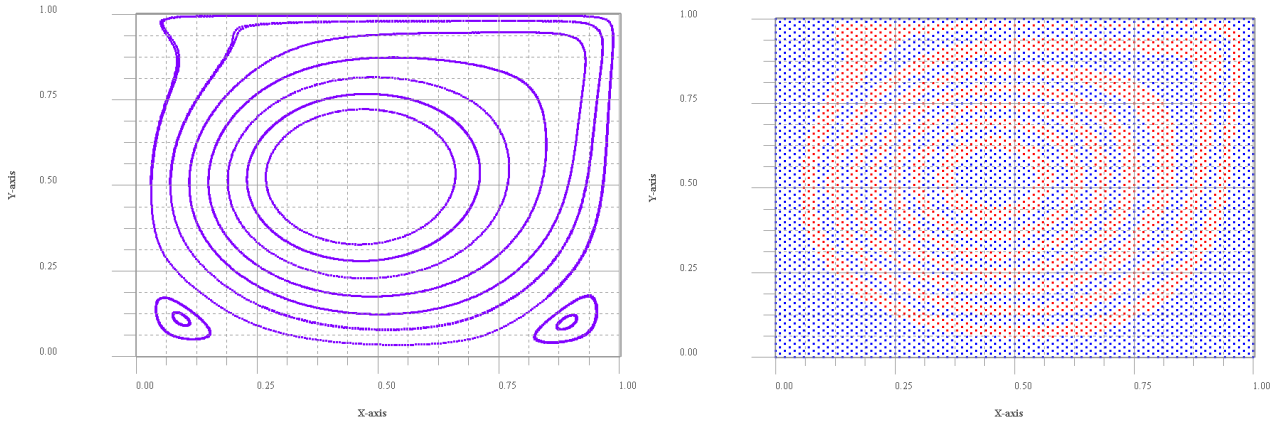


Рис. 3. Поле линий тока и функции тока для  $Re=1000$  для профиля скорости "равнобедренная трапеция" с соотношением кусочно-линейных областей как 1:8:1

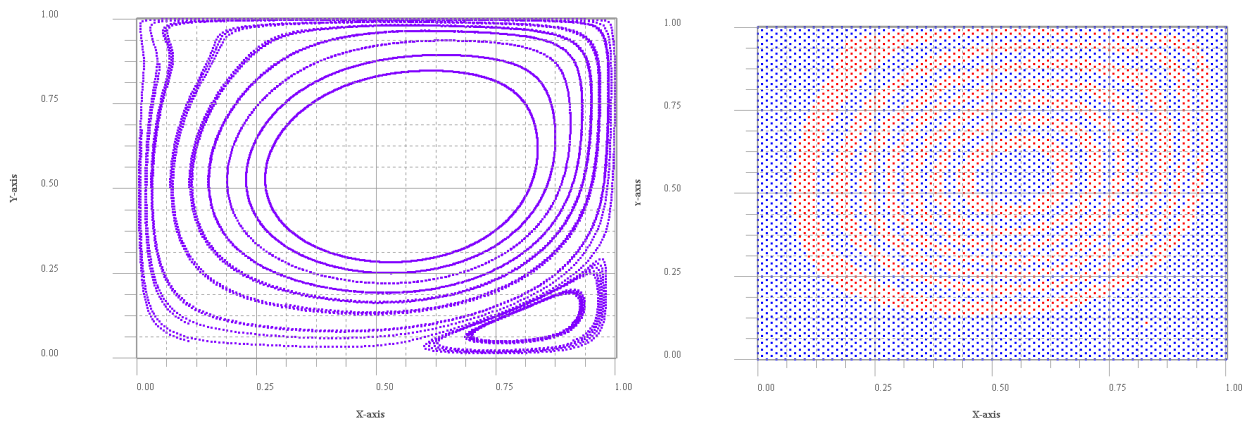


Рис. 4. Поле линий тока и функции тока для  $Re=1000$  для профиля скорости "равнобедренный треугольник" с соотношением кусочно-линейных областей как 5:0:5

Дифференциал дуги линии тока определяется по найденному полю скоростей  $u^{n_0}(x_n, y_m) \equiv u_{m,n}^{n_0}, v_{m,n}^{n_0}, m = \overline{1, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}$  на конечном временном слое  $n_0$  дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{u(x, y)} = \frac{dy}{v(x, y)} \quad (18)$$

Поле скоростей во всех точках прямоугольника  $(x, y)$ , не совпадающих с узлами  $(x_n, y_m), n = \overline{1, n_1 - 1}, m = \overline{1, n_2 - 1}, x_n \leq x \leq x_{n+1}, y_m \leq y \leq y_{m+1}$ , линейно интерполируется по формуле

$$\begin{cases} u(x, y) = \left( u_{m,n} \frac{(x_{n+1} - x)}{h_1} + u_{m,n+1} \frac{(x - x_n)}{h_1} \right) \frac{(y_{m+1} - y)}{h_2} + \left( u_{m+1,n} \frac{(x_{n+1} - x)}{h_1} + u_{m+1,n+1} \frac{(x - x_n)}{h_1} \right) \frac{(y - y_m)}{h_2} \\ v(x, y) = \left( v_{m,n} \frac{(x_{n+1} - x)}{h_1} + v_{m,n+1} \frac{(x - x_n)}{h_1} \right) \frac{(y_{m+1} - y)}{h_2} + \left( v_{m+1,n} \frac{(x_{n+1} - x)}{h_1} + v_{m+1,n+1} \frac{(x - x_n)}{h_1} \right) \frac{(y - y_m)}{h_2} \end{cases} \quad (19)$$

Используя(18),(19), получим связь соседних точек линии тока ( $h_3$  -дифференциал дуги линии тока – геометрический шаг, который не связан с шагом основной равномерной сетки) по формуле

$$x^{l+1} = x^l + h_3 \frac{u(x, y)}{\sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}}, y^{l+1} = y^l + h_3 \frac{v(x, y)}{\sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}}, l = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Сравнивая полученные поля линий тока и функции тока конечного решения (Рис.3, Рис.4) видно, что

1.Функция тока определяет вихри первого порядка (совпадают детали левого и правого рисунков).

2.Меньшие вихри второго порядка определяются полем линий тока (левые рисунки).

3.Градиент скорости кусочно-линейного профиля на верхней стороне прямоугольной каверны определяет число вихрей второго порядка и их расположение. При небольшом градиенте (равном 2) с профилем «равнобедренный треугольник» (Рис.4) имеем один вторичный вихрь справа-снизу. При достаточно большем градиенте (равном 10) с профилем «равнобедренная трапеция» (Рис.3)имеем два симметричных вихря второго порядка справа и слева у дна[1,5,6].

4.Увеличение градиента профиля скорости (Рис.3) приводит к смещению центра вихря первого порядка противоположно вектору скорости, а уменьшение к смещению вдоль  $u_{\max} = 1$ (Рис.4).



Отбрасывание слагаемых с производными 6 порядка в формулах(7),(8) с конечным алгоритмом решения уравнения Пуассона, приводит к уменьшению порядка аппроксимации. Но простота формул (7),(8) с неизвестной аналитически правой частью дает малую скорость накопления ошибки округления (на сетке  $200 \times 200$  норма Чебышева для невязки уравнения Пуассона равна  $10^{-10}$ ). Конечный матричный метод для уравнения Пуассона без потери точности увеличивает быстродействие алгоритма в десятки раз. Различие деталей в полях линий тока и функции тока напоминает применение уравнения Пуассона в задачах стеганографии [7],[8].

#### Литература:

1. A. Salih Streamfunction - Vorticity Formulation // Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach 2013. p.10.
2. Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
3. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 3-1 (61). С. 4–11.
4. Волосова Н.К. О конечных методах решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с краевым условием Дирихле / Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2020. – № 4. – С. 78–92.
5. Hendrik C. Kuhlmann and Franchesco Romano The lid – driven cavity, p 85.
6. Д.Б. Гуров, Т.Г. Елизарова, Ю.В. Шеретов. Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидродинамической системы уравнений // Математическое моделирование. 1996. том 8, № 7, С. 33–44.
7. Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR-кода в стеганографии / С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов // Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). С. 14–25.
8. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии / Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова // Мир транспорта. – 2019. Т.17. № 3(82). С. 16–39.