УДК 512.542

С. Ю. Башун (Полоцк. гос. ун-т, Беларусь)

КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ С ХОЛЛОВЫМИ $\{2, r\}$-ПОДГРУППАМИ, $r \in \pi(G) \backslash \{2, t\}$, $t \in \pi(G)$

We describe finite simple groups with Hall biprimary subgroups of even order that contain Sylow subgroups of odd order of the G-group, except one of Sylow's subgroups of odd order.

Описано скінченні прості групи, які мають холлові біпримарні підгрупи парного порядку, що містять силовські підгрупи непарного порядку групи G, за винятком однієї з силовських підгруп непарного порядку.

Введение. В настоящей статье рассматриваются только конечные группы. При этом используются стандартные обозначения и терминология современной теории конечных групп (см. [2, 3]). Как обычно, $|X|$ — число различных элементов конечного множества (порядок множества X), (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b, π — некоторое множество различных простых чисел ($\pi \in \mathbb{P}$), $\pi' = \mathbb{P} \backslash \pi$ — множество простых чисел, не принадлежащих π, $\pi(n)$ — множество всех различных простых делителей целого числа n и $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество попарно различных простых делителей порядка группы G. Соответственно, E_n — элементарная абелева группа порядка n, Q_8 — группа кватернионов порядка 8, G_p — силовская p-подгруппа группы G и m-примарная группа — это группа G, у которой $|\pi(G)| = m$.

Напомним, что $\mathrm{Chev}(p)$ — множество групп лиева типа с полем определения $GF(q)$ характеристики p, $q = p^f$ (поэтому иногда используется обозначение $\mathrm{Chev}(q)$) и T-группа — группа, у которой нет холловой $\{2, t\}$-группы для $t \in \pi(G) \backslash \{2\}$, а есть холловы $\{2, r\}$-подгруппы для всех $r \in \pi(G) \backslash \{2, t\}$.

Определение 0.1 [2, с. 86]. *Пусть $G \in \mathrm{Chev}(q)$, $q = p^f$. Тогда нормализатор силовской p-подгруппы G_p группы G называется подгруппой Бореля группы G.*

$B = G_p \leftthreetimes K$, где K называется подгруппой Картана группы G. Группа K всегда абелева [2, с. 61].

Любая собственная подгруппа группы G, содержащая подгруппу B, называется параболической подгруппой группы G.

В дальнейшем нам также потребуется понятие $\varepsilon = \varepsilon(q) = (-1)^{(q-1)/2}$, где $q = p^f$, p — простое число.

1. Предварительные результаты. Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1.1 [2, с. 87] (предложение 2.17) и [10] (утверждение (2.1)). *Пусть $G \in \mathrm{Chev}\,(p)$, B — подгруппа Бореля группы G и $B \subset Y \subset G$. Пусть $O_p(Y) = P^*$, $\overline{Y} = Y/P^*$. Тогда $\overline{Y} = \overline{H} \cdot \overline{Y}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{Y}_r$, где H — подгруппа Картана группы G ($B = G_p \leftthreetimes H$), $\overline{Y}_i \lhd \overline{Y}$, $\overline{Y}_i \in \mathrm{Chev}(p)$, $1 \leq i \leq r$, $Y = P^* \leftthreetimes H \cdot Y_1 \cdot \ldots \cdot Y_r$, где $Y_i \cong \overline{Y}_i$ для всех $i = \overline{1, r}$ (Y_i, $i = \overline{1, r}$, называют сомножителями Леви параболической подгруппы Y).*

Лемма 1.2. *Пусть $G \in \mathrm{Chev}(p)$, P — разрешимая параболическая подгруппа группы G, отличная от подгруппы Бореля. Тогда*

$$p = 2, \quad N_P(P_2) = N_G(G_2) = G_2,$$

$$p = 3, \quad N_P(P_3) = P_3 = G_3, \quad \textit{а} \quad P_2 \textit{ — абелева группа.}$$

Доказательство. По лемме 1.1 подгруппа P имеет только множители Леви, являющиеся разрешимыми группами. По предложению 2.13 [2] это могут быть множители типов $L_2(2)$, $Sz(2)$, $U_3(2)$ для $p = 2$ или $L_2(3)$ для $p = 3$. Указанные группы изоморфны соответственно группам $Z_3 \rightthreetimes Z_2$, $Z_5 \rightthreetimes Z_4$, $E_9 \rightthreetimes Q_8$, $E_4 \rightthreetimes Z_3 \cong A_4$ [7, с. XV]. Поэтому по лемме 1.1 для $P^* = O_2(P)$ и $\overline{P} = P/P^*$ имеем $\overline{P} = \overline{H} \cdot \overline{Y}_1 \cdot \overline{Y}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{Y}_r$, где $\overline{H} = H \cdot P^*/P^* \cong H/\left(H \cap P^*\right)$, $\overline{Y}_i = Y_i \cdot P^*/P^* \cong Y_i/\left(Y_i \cap P^*\right)$ для $i = \overline{1, r}$ и $Y_i \in \{L_2(2), Sz(2), U_3(2)\}$. Следовательно, $Y_i \cap P^* = 1$, $\overline{Y}_i \in \{L_2(2), Sz(2), U_3(2)\}$, $\overline{H} \cong H$ вследствие $H \cap P^* = 1$ (H — $2'$-группа (см. определение 0.1)). Таким образом, по лемме 1.1 подгруппа $\overline{P}$ — прямое произведение групп вида $Z_3 \cdot Z_2$, $Z_5 \cdot Z_4$, $E_9 \cdot Q_8$. Но тогда $N_{\overline{P}}(\overline{P}_2) = \overline{P}_2$ и $N_P(P_2) = P_2$, $P_2 = G_2$. Аналогично $Y_i \cong L_2(3)$ для $p = 3$, $i = \overline{1, r}$. Снова $N_{\overline{P}}(\overline{P}_3) = \overline{P}_3$, $N_P(P_3) = P_3$, $P_3 = G_3$, и P_2 равна прямому произведению групп, изоморфных E_4 (в частности, P_2 — абелева).

Лемма доказана.

Лемма 1.3 [2, с. 87] (предложение 2.17)**.** *Параболическая подгруппа P группы $G \in \mathrm{Chev}(q)$, $q = p^f$, отличная от подгруппы Бореля группы G, неразрешима, за исключением случаев, перечисленных в лемме* 1.2.

Лемма 1.4 [4] (теорема 3.1)**.** *Пусть $G \in \mathrm{Chev}\,(q)$ (нормальная или скрещенная), $q = p^f$. Пусть A — холлова π-подгруппа группы G, $p \in \pi$, $3 \notin \pi$. Тогда или $p = 2$, или $2 \notin \pi$. Более того, $A = G \cong Sz\left(2^{2k+1}\right)$ или A содержится в подгруппе Бореля группы G.*

Лемма 1.5 [6] (теорема 8.3)**.** *Пусть G — конечная группа лиева типа над полем характеристики $p \in \pi$. Если H — π-холлова подгруппа группы G, то H либо содержится в подгруппе Бореля группы G, либо является параболической подгруппой группы G.*

Лемма 1.6 [5] (теорема 5.8)**.** *Пусть G — простая группа, M — собственная подгруппа в G и $|G : M| = r^s$, s — простое число. Тогда G принадлежит к одному из следующих типов:*

(1) $L_2(11)$, $M \cong A_5$;

(2) $L_2(p)$, $p \geq 7$ — *простое число Мерсенна,* $M = N(G_p)$;

(3) $L_2(2^n)$, $M = N(G_2)$, $n = 3$, $r^s = 3^2$ *или* $s = 1$, $r = 2^n + 1$ — *простое число Ферма*;

(4) $U_4(2) \cong PSp_4(3)$, $r^s = 3^2$;

(5) A_n, $5 \leq n = r^s$, $M \cong A_{n-1}$;

(6) M_{11}, $M \cong M_{10} \supset A_6$, A_6;

(7) M_{23}, $M = M_{22}$;

(8) $L_n(q)$, n — *нечетное простое число,* $(n, q-1) = 1$, M — *максимальная параболическая подгруппа индекса* $r^s = (q^n - 1)/(q - 1)$, $L_{n-1}(q)$ *вкладывается в* M.

M или холлова r'-подгруппа, или G типа (4) *или* (5), $s \geq 2$.

Лемма 1.7 [8] (теорема XI.13.7)**.** *Если G — простая неабелева группа с абелевой силовской 2-подгруппой, то* $G \in \left\{L_2\left(2^f\right); L_2(q), q \equiv \pm 3 \pmod 8; J_1;{}^2G_2\left(3^{2n+1}\right)\right\}$.

Лемма 1.8 [8] (теорема XI.13.2). *Пусть* $G = {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2n+1}$, $3^n = m$. *Тогда* $|G| = q^3(q-1)(q+1)(q+3m+1)(q-3m+1)$, $G_2 \cong E_8$, $|N_G(G_2)| = 8\cdot7\cdot3$. *Группа* G *имеет холловы подгруппы* H_1 *и* H_2 *порядков* $q+3m+1$ *и* $q-3m+1$ *соответственно, которые являются централизаторами в* G *всех своих неединичных элементов,* $|N_G(H_i)/H_i| = 6$, $i = 1, 2$. *Для* $p > 3$ *силовские* p*-подгруппы группы* G *циклические.*

Лемма 1.9 [9]. *Пусть* p *и* s *— различные простые числа,* m *и* n *— натуральные числа и* $p^m = s^n + 1$. *Тогда имеет место одно из следующих утверждений:*

(1) $s = 2$, $p = 3$, $n = 3$, $m = 2$; $p = 3$, $m = 1$, $n = 1$, $s = 2$;

(2) $s = 2$, $m = 1$, n *— степень числа* 2, $p = s^n + 1$ *— простое число Ферма;*

(3) $p = 2$, $n = 1$, $s = 2^m - 1$ *— простое число Мерсенна, в частности,* m *— простое число.*

Лемма 1.10 [11]. *Пусть* x, y, $q > 1$, $n > 2$ *— целые числа и* n *делится на нечетное простое число* $p \leq 11$. *Тогда уравнение* $(x^n - 1)/(x-1) = y^q$ *имеет только следующие решения:*

$$(x, y, n, q) \in \{(3, 11, 5, 2); (7, 20, 4, 2); (18, 7, 3, 3)\}.$$

Лемма 1.11. *Пусть* x, y, $m \in \mathbb{N}$, $x > 1$. *Предположим, что:*

(1) $x^2 + x + 1 = y^m$

или

(2) $x^2 - x + 1 = y^m$.

Тогда $m = 1$, *или в случае* (1) $x = 18$, $m = 4$, $y = 7$, *а в случае* (2) $x = 19$, $m = 3$, $y = 7$.

Доказательство. (1) $x^2 + x + 1 = \left(x^3 - 1\right)/(x-1)$. По лемме 1.10 $m = 1$ или $x = 18$, $m = 3$, $y = 7$.

(2) Пусть $x = z + 1$, $z \in \mathbb{N}$. Тогда $x^2 = z^2 + 2z + 1$, $x^2 - x + 1 = z^2 + 2z + 1 - z - 1 + 1 = z^2 + z + 1 = y^m$. По предыдущему случаю (1) $z = 18$, $m = 3$ или $m = 1$. Но если $z = 18$, то $x = 19$.

Лемма доказана.

Лемма 1.12. *Пусть группа* $G \cong Sz(q)$, $q = r^{2m+1}$. *Тогда* G *не является* T*-группой.*

Доказательство. Пусть $r = 2^m$, тогда в G существуют холловы подгруппы U_1 и U_2 порядков $q + 2r + 1$ и $q - 2r + 1$ и в G нет холловых $\{2, s_i\}$-подгрупп для $s_i \in \pi(U_i)$, $i = 1, 2$ [8] (теорема XI.3.10), т. е. $G \cong Sz(q)$ не удовлетворяет условию леммы.

Лемма доказана.

Лемма 1.13. *Пусть* G *— конечная простая неабелева* T*-группа с абелевой силовской* 2*-подгруппой. Тогда или* $G \cong L_2(2^f)$, $q = 2^f$, $2^f + 1$ *— простое число Ферма* (f *— степень числа* 2) *или* $q \equiv \pm3 \pmod 8$. *Если* 3 *делит* $q + \varepsilon$, 4 *делит* $q - \varepsilon$, *то* $G \cong L_2(5)$. *Если* 4 *делит* $q - \varepsilon$ *и* 3 *делит* $q - \varepsilon$, *то* $q + \varepsilon = 2 \cdot t^b$ *и либо* A_4 *— холлова подгруппа в* G, *либо* 9 *делит* $q - \varepsilon$.

Доказательство. По лемме 1.7 $G \in \left\{J_1, {}^2G_2\left(3^{2n+1}\right), L_2\left(2^f\right), L_2(q), q \equiv \pm3 \pmod 8\right\}$.

Если $G \cong J_1$, то $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$. Согласно [6] (таблица 4) G не имеет холловых $\{2, 11\}$- и $\{2, 19\}$-подгрупп. Поэтому группа J_1 не удовлетворяет условию леммы.

Если $G \cong {}^2G_2(3^{2n+1})$, то по лемме 1.8 в группе G содержатся силовские циклические r-подгруппа и s-подгруппа из холловых подгрупп U_1 и U_2 соответственно. Можно взять $r \neq 3 \neq s$, так как в противном случае 3 делит $q + 1$, что невозможно. По условию в группе G имеются холлова $\{2, r\}$-подгруппа X и холлова $\{2, s\}$-подгруппа Y. По лемме 1.4 тогда X и Y содержатся в подгруппе Бореля $B = G_2 \leftthreetimes B_{2'}$ группы G, т. е. G_r и G_s должны нормализовать

G_2, что противоречит лемме 1.8, согласно которой $|N_G(G_2)| = 8 \cdot 7 \cdot 3$ (числа $q+3m+1$ и $q-3m+1$ взаимно просты).

Если $G \cong L_2(2^f)$, $q = 2^f$, то $N_G(G_2) \cong G_2 \leftthreetimes Z_{q-1}$. Поскольку в G есть холлова циклическая подгруппа X порядка 2^f+1, то по условию в G должны быть холловы $\{2,r\}$-подгруппы для всех $r \in \pi(X)\backslash\{t\}$. Если существует $r \neq t$, то рассмотрим холлову $\{2,r\}$-подгруппу Y. Согласно лемме 1.5 тогда Y либо содержится в подгруппе Бореля группы G (и, значит, $r \in \pi(N_G(G_2))$, что невозможно вследствие $(q-1,q+1)=1$), либо является разрешимой параболической подгруппой. В последнем случае по определению 0.1 она должна содержать подгруппу Бореля $B = N_G(G_2)$ группы G. По лемме 1.2 это возможно, если $q-1=1$. Но тогда $G \cong L_2(2) \cong Z_3 \leftthreetimes Z_2$, что невозможно для простой группы G. Итак, $r \neq t$ не существует и поэтому $q+1 = t^x$, $t^x = t = 2^f+1$ — простое число Ферма и f — степень простого числа 2 согласно лемме 1.9.

Пусть теперь $G \cong L_2(q)$, $q = p^f$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Тогда $|G_2| = 4$, $p \neq 2,3$.

Пусть 4 делит $q-\varepsilon$. В группе G имеется холлова разрешимая подгруппа $X \cong D_{q-\varepsilon}$ [3] (теорема II.8.27). Поэтому в X имеются холловы $\{2,r\}$-подгруппы для всех $r \in \pi(X)\backslash\{2\}$. Они являются также холловыми $\{2,r\}$-подгруппами в G. Поэтому $t \in \pi(q+\varepsilon)$. Предположим, что $2 < s \neq t$ и s делит $q+\varepsilon$. По условию в G имеется холлова $\{2,s\}$-подгруппа Y, так как $(q-\varepsilon, q+\varepsilon) = 2$. Если $s \neq 3$, то согласно теореме 8.9 [6] $s \in \pi(q-\varepsilon)$. Но по выбору $5 \in \pi(q+\varepsilon)$. Это противоречие показывает, что не существует $s \neq 3$.

Если $3 \in \pi(q+\varepsilon)$, то $t=3$ и $q+\varepsilon = 2 \cdot 3^a$.

В этом случае согласно [6] (таблица 10) $K = A_4$ является холловой подгруппой в G (3 не делит $q-\varepsilon$). Тогда $|G_3| = 3$, $q+\varepsilon = 6$, $q = 6-\varepsilon$ и $q \in \{5,7\}$. Только $q=5$ удовлетворяет условию $q \equiv -3 \pmod 8$.

Итак, если $3 \in \pi(q+\varepsilon)$, то $G \cong L_2(5)$.

Если $3 \in \pi(q-\varepsilon)$, то $q+\varepsilon = 2 \cdot t^b$, 9 делит $q-\varepsilon$, ибо в противном случае согласно [6] (таблица 10) $K \cong A_4$ будет холловой подгруппой в G.

Итак, если $K \cong A_4$ не есть холлова $\{2,3\}$-подгруппа в G, то 9 делит $q-\varepsilon$.

Лемма доказана.

2. Основной результат.

Теорема 2.1. *Пусть G — конечная простая неабелева T-группа. Тогда группа G изоморфна одной из следующих групп:*

$L_2\left(2^f\right)$, 2^f+1 — *простое число Ферма* (f — *степень числа 2*);

$L_2(7)$, $L_2(8)$, $L_2(5)$;

$L_2(q)$, $q+\varepsilon = 2 \cdot 3^a$, $a > 0$;

$L_3(3)$;

$L_2(q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. *При этом если* 3 *делит* $q+\varepsilon$, 4 *делит* $q-\varepsilon$, *то* $G \cong L_2(5)$; *если* 4 *делит* $q-\varepsilon$ *и* 3 *делит* $q-\varepsilon$, *то в любом случае* $q+\varepsilon = 2 \cdot t^b$, *и либо* A_4 *является холловой подгруппой, либо* 9 *делит* $q-\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathrm{Chev}(q)$, $q = p^f$.

(1) Рассмотрим случай $t = p > 3$.

По условию в G существуют холловы $\{2,r\}$-подгруппы для всех $r \in \pi(G)\backslash\{2, t=p\}$. По теореме 8.9 [6] все простые числа $r \neq 3, t$ содержатся в $\pi(q-\varepsilon)$. Но тогда $\pi(q+\varepsilon)$ не содержит отличных от 3 нечетных простых чисел. Поскольку $2 \in \pi(q-\varepsilon)$, то

$$\pi(G) = \pi(q-\varepsilon) \cup \{3, t\}. \tag{2.1}$$

Предположим, что q^3-1 делит $|G|$. Тогда q^2+q+1 делит $|G|$, $\left(q-\varepsilon, q^2+q+1\right) \in \{1,3\}$. Поэтому $q^2+q+1=3^x$, так как $t=p$. По лемме 1.11 $x=1$. Тогда $q(q+1)=2$, что невозможно.

Предположим, что q^3+1 делит $|G|$. Тогда q^2-q+1 делит $|G|$, $\left(q-\varepsilon, q^2-q+1\right) \in \{1,3\}$. Поэтому $q^2-q+1=3^y$. По лемме 1.11 $y=1$. Тогда $q(q-1)=2$, $q=2=p<3$.

Итак, $\left(q^3-1\right)\left(q^3+1\right)$ не делит $|G|$. По [7, с. XVI] $G \in \{L_2(q), P\Omega_5(q)\}$.

Предположим, что q^2+1 делит $|G|$, $\left(q-\varepsilon, q^2+1\right)=2$. Поэтому $q^2+1=2\cdot 3^z$ или $q^2+1=3^z$. Но 3 не может делить q^2+1, так как 3 делит q^2-1 по теореме Эйлера (и тогда число 3 делило бы и разность этих чисел, равную 2, что невозможно). Итак, $q^2+1=2^y$, $p^{2f}+1=2^y$. Поскольку $p>3$, то по лемме 1.9(3) $2f=1$, что невозможно. Итак, q^2+1 не делит $|G|$ и $G \ncong P\Omega_5(q)$ [7, с. XVI]. Остается для рассмотрения случай с $G \cong L_2(q)$.

Предположим, что 4 делит $q+\varepsilon$. Тогда 2^2 не делит $q-\varepsilon$, а в G имеется холлова диэдральная подгруппа $D_{q+\varepsilon}=H$. Поэтому она содержит все холловы $\{2,r\}$-подгруппы группы G для $r \in \pi(H)\backslash\{2,s\}$. Но тогда по (2.1) $\pi(q+\varepsilon)=\{2,3\}$. Пусть $s \in \pi(q-\varepsilon)\backslash\{2\}$. По условию в G должна существовать холлова $\{2,s\}$-подгруппа, $s \neq 3$. Но по теореме II.8.27 [3] такой подгруппы в группе G нет. Поэтому s не существует. Тогда $\pi(q-\varepsilon)=\{2\}$, $q-\varepsilon=2$, $q=3$, $\varepsilon=1$. Но по предположению (1) $q=p^f$, $p>3$. Поэтому 4 не делит $q+\varepsilon$, 4 делит $q-\varepsilon$, $q+\varepsilon=2\cdot 3^a$, $a>0$. Итак, в случае (1) теорема доказана.

(2) Рассмотрим случай, когда $t=p=3$.

Как и в случае (1), показываем, что $\pi(G)=\pi(q-\varepsilon)\cup\{3\}$, либо по теореме 8.9 [6] $G \cong {}^2G_2\left(3^{2m+1}\right)$. Но последний случай исключен в лемме 1.13.

Так же, как и в случае (1), показываем, что $q^3 \pm 1$ не делит $|G|$.

Предположим, что q^2+1 делит $|G|$. Из $\left(q-\varepsilon, q^2+1\right)=2$ и $q=3^f$ следует, что $q^2+1=2^b$, т. е. $3^{2f}+1=2^b$. По лемме 1.9 это невозможно. Итак, в этом случае $G \ncong P\Omega_5(q)$ [7, с. XVI], $G \cong L_2(q)$, $q=3^f$, $q+\varepsilon=2^m$, $3^f+1=2^m$ или $3^f-1=2^m$ ($\varepsilon=1$ или $\varepsilon=-1$). В первом случае по лемме 1.9 $f=1$. Но группа $L_2(3)$ не простая. Поэтому пусть $3^f-1=2^m$, $3^f=2^m+1$. По лемме 1.9 $m=3$, $3^f=q=9$, или $f=1$, $m=1$ (этот случай уже исключен выше). Итак, $G \cong L_2(9)$. Но группа $L_2(9)$ не удовлетворяет условию теоремы [7, с. 4].

(3) Рассмотрим случай $p \neq t=3$.

Пусть $p \in \pi(G)\backslash\{3\}$ и $2 \in \pi(G)\backslash\{3\}$. Предположим, что $p \neq 2$. По условию в G имеется холлова $\{2,p\}$-подгруппа. Но тогда по лемме 1.4 $p=2$, что противоречит предположению. Итак, впредь считаем, что $2=p \in \pi(G)\backslash\{3\}$ при $p \neq t=3$.

Пусть $r \in \pi(G)\backslash\{2,3\}$. По условию в G существует холлова $\{2,r\}$-подгруппа H. По лемме 1.4 $H \subseteq B$, где B — подгруппа Бореля группы G. Тогда H_r нормализует $G_2=H_2$. Поскольку r пробегает все нечетные простые числа из $\pi(G)\backslash\{2,t\}$, то $|G\colon N_G(G_2)|$ делит $|G_3|$. Тогда по лемме 1.6 $G \cong L_2(8)$, так как в группе $G \cong PSp_4(3)$ $|G\colon N_G(G_2)| \neq 3^x$.

(4) Рассмотрим случай, когда $p=2$, $t \neq 3$.

Предположим, что 3 не делит $|G|$. Тогда $G \cong Sz(q)$, $q=2^{2m+1}$ [8] (теорема XI.3.6). Но по лемме 1.12 G — не T-группа. Поэтому по случаю (3) можно считать, что в G существует холлова $\{2,3\}$-подгруппа Y, $r=3$. По лемме 1.5 либо Y лежит в подгруппе Бореля B, либо она сама является параболической разрешимой подгруппой в G. Поскольку $G \in \mathrm{Chev}\,(2)$, то по лемме 1.2 если Y — параболическая подгруппа в G, то подгруппа Картана $K=1$.

Если простые числа, отличные от 2, 3, t, не делят $|G|$, то согласно [2, с. 20] $G \in$ $\in \left\{L_2(5) \cong L_2\left(2^2\right), L_2(7), L_3(3)\right\}$.

Если же $r > 3,\ r \neq t,\ r$ делит $|G|$, то по условию в G существует холлова $\{2,r\}$-подгруппа X и по лемме 1.4 X содержится в подгруппе Бореля B группы G, т. е. $K \neq 1$. Поэтому Y также лежит в некоторой подгруппе Бореля группы G. Но тогда $Y^x \subseteq N(G_2)$, $x \in G$ и $\pi(B) = \pi(G)\backslash\{t\}$. Значит, $|G\colon B|$ делит $|G_t|$ и по лемме 1.6 $G \cong L_2(8)$, или $G \cong L_2(2^n)$, $|G_t| = t = 2^n + 1$ — простое число Ферма и, в частности, n — степень числа 2 (либо $G \cong U_4(2) \cong PSp_4(3)$ что исключено выше). Для остальных случаев заключения леммы 1.6 $p \neq 2$.

(5) Пусть $p > 2,\ t \neq 3$.

По условию в группе G имеется холлова $\{2,p\}$-подгруппа X. Если $p \neq 3$, то по лемме 1.4 X содержится в подгруппе Бореля B группы G. Тогда G_2 содержится в подгруппе Картана группы G и поэтому является абелевой (определение 0.1). Утверждение следует из леммы 1.13.

Если $p = 3$, то по лемме 1.5 либо холлова $\{2,3\}$-подгруппа X содержится в подгруппе Бореля группы G, и тогда G_2 содержится в подгруппе Картана, поэтому G_2 — абелева группа, либо X сама является разрешимой параболической подгруппой в группе G. Тогда по лемме 1.2 X_2 — абелева группа. Поскольку X — холлова подгруппа в G, то опять G_2 — абелева группа. Поэтому в случае $p = 3$ утверждение также следует из леммы 1.13.

Итак, в случае $G \in \mathrm{Chev}\,(q)$ теорема доказана.

Если $G \in \{A_n/n \geq 5\}$, то в G существуют бипримарные холловы только $\{2,3\}$-подгруппы [6] (таблица 2). Группы $G \cong A_7$ и $G \cong A_8$ не удовлетворяют условию, так как $|\pi(G)| = 4$. Группа $A_5 \cong L_2(5)$ рассмотрена ранее.

Если $G \in \mathrm{Spor}$, то из таблицы 4 [6] и из порядков групп из множества Spor [8] (раздел 5.3) следует, что группы множества Spor не удовлетворяют условию теоремы.

Теорема 2.1 доказана.

Литература

1. *Тютянов В. Н.* К гипотезе Холла // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 7. – С. 1181 – 1191.
2. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
3. *Huppert B.* Endliche Gruppen, I. – Berlin: Springer, 1967. – 793 S.
4. *Gross F.* Hall subgroups of order not divisible by 3 // Rocky Mountain J. Math. – 1993. – **23**, № 2. – P. 569 – 591.
5. *Arad Z., Fisman E.* On finite factorizable groups // J. Algebra. – 1984. – **86**, № 2. – P. 522 – 548.
6. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. – 2011. – **66**, № 5(401). – С. 3 – 46.
7. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. – London: Clarendon Press, 1985. – 252 p.
8. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups, III. – Berlin etc.: Springer, 1982. – 454 p.
9. *Zsigmondy K.* Zur theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. – 1892. – **3**, № 2. – S. 265 – 284.
10. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалье // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 1(247). – С. 57 – 96.
11. *Bugeaud Y., Hanrot G., Mignotte M.* Sur e‘ equation diophantienne $(x^n - 1)/(x - 1) = y^a$. III // Proc. London Math. Soc. – 2002. – **84**, № 1. – P. 59 – 78.

Получено 08.01.19